Actividad 2: Continuación de la Equivalencia de Expresiones

**Lección 3**

Parte I (30 minutos): Exploración e interpretación de los efectos de la tecla ENTER y de los comandos EXPAND y FACTOR

*Notas para el profesor*

Algunas dificultades anticipadas de los estudiantes durante esta actividad deben ser abordadas durante la discusión, siguiendo el trabajo individual:

1. En la Parte I: Relación de la estructura de la expresión 1 dada con el resultado de EXPAND. Puede ayudar a evitar dicha dificultad, la relación entre la propiedad distributiva de la multiplicación o de la división y la adición:

[ ]

1. Manipular formas que involucren la factorización de –1. Esto será encontrado primero en la Parte I, expresión 3, y surge de nuevo en la tarea asignada (Parte III) donde los estudiantes tienen necesidad de manipular expresiones algebraicas en papel y lápiz, para determinar el conjunto máximo posible de los valores que pueden ser asignados a *x*.
2. Restricciones de la equivalencia. En la Parte I B, para la expresión 4 dada, los comandos de CAS producen formas simplificadas que “ocultan” las restricciones de los valores que puede tomar *x* (i.e., R\{-2}). Esperamos, entonces, que los estudiantes tengan la necesidad de guiarse mediante la comprensión de que la equivalencia de las expresiones 1 y 4 está sujeta a las restricciones de *x* para la expresión dada 4. En la Parte II A, los estudiantes confrontarán de nuevo este resultado. En este caso, el máximo conjunto posible para los valores de *x* es R\{-3, 4}. Ellos confrontarán esto de nuevo en la tarea asignada (Parte III).

(A) **(con CAS).** Completa lo que falta en la tabla siguiente, usando lo mostrado en la pantalla de la calculadora, tal como se requiera: (Nota: los resultados han sido introducidos en la versión del profesor).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Expresión dada** | **Resultado producido por la tecla ENTER** | **Resultado producido por**  **FACTOR** | **Resultado producido por EXPAND** |
| 1. |  |  |  |
| 2. |  |  |  |
| 3. |  |  |  |
| 4. |  |  |  |

(B) **(con papel y lápiz)**

1. Para la expresión dada 1:

* Describe cómo es la estructura de cada una de las tres formas producidas por la calculadora; compara con la expresión dada.
* Esas tres formas producidas por la calculadora, ¿son equivalentes a la expresión dada? Por favor, explica.

1. Para la expresión 2 dada, muestra los pasos algebraicos para llegar a la forma producida por la tecla ENTER.
2. Considera la expresión 3 dada. Usa álgebra en papel y lápiz para mostrar cómo obtener la forma producida por el comando FACTOR.
3. Considera la expresión 4 dada. Usa álgebra en papel y lápiz para mostrar cómo obtener la forma producida por el comando EXPAND.
4. En la tabla de la Parte I A, precedente, ¿cuáles de las expresiones son equivalentes entre ellas? (compáralas tanto como puedas). Por favor, justifica tu respuesta. Esta equivalencia ¿tiene algunas restricciones en cuanto a los valores que puede tomar *x*? Por favor, explica.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Discusión en el salón de clase de las Partes I A y B, después del trabajo individual: “¿cuáles son las expresiones equivalentes en la tabla precedente?”

Dos resultados adicionales para el profesor al realizar la discusión:

1. Todos los comandos precedentes de CAS producen expresiones equivalentes a la expresión dada, y sujeta a ciertas restricciones. Esas expresiones son, por tanto, equivalentes entre ellas.
2. De las cuatro expresiones dadas, 2 y 3 son equivalentes, así como 1 y 4 (sujeta a la restricción de que *x* debe ser distinta de -2). ¿Por qué? (Los estudiantes, ¿cómo decidieron o determinaron esas equivalencias?)

**Parte II (30 minutos)**: **formas de mostrar la equivalencia de expresiones, usando varios enfoques de CAS**

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

Tabla 1

|  |
| --- |
| Expresión dada |
| 1. |
| 2. |
| 3. |
| 4. |

(A) Determina el máximo conjunto común posible para los valores de *x* de este conjunto de expresiones. Muestra y explica cómo llegaste a tu resultado. (Nota: respuesta simplificada en la versión del profesor).

|  |
| --- |
| R \ {-3, 4} |

(B) Usando, una vez y sólo una vez, cada uno de los cuatro métodos para determinar la equivalencia, muestra que las cuatro expresiones de la Tabla 1 son equivalentes. Escribe en la Tabla 2, aquello que introduces y obtienes en CAS. (Puedes usar la hoja de trabajo dada en la última página para conservar los registros de tu trabajo.)

Tabla 1

|  |
| --- |
| Expresión dada |
| Exp1: |
| Exp2: |
| Exp3: |
| Exp4: |

Tabla 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Método de CAS** | **Qué introduces en CAS** | **Resultado mostrado por CAS** |
| Verificación de la igualdad |  |  |
| FACTOR |  |  |
| EXPAND |  |  |
| ENTER |  |  |

(C) Usando sólo los resultados de la Tabla 2, prueba las seis afirmaciones de equivalencia mostradas en la Tabla 3.

Tabla 3 (el símbolo “≡” denota equivalencia)

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación de equivalencia** | **Prueba de la equivalencia** |
| Exp1 ≡ Exp2 |  |
| Exp 1 ≡ Exp3 |  |
| Exp1 ≡ Exp4 |  |
| Exp2 ≡ Exp3 |  |
| Exp2 ≡ Exp4 |  |
| Exp3 ≡ Exp4 |  |

Discusión en el salón de clases de las Partes II A, B, C:

(i) Una idea es usar la propiedad transitiva del signo “≡” para mostrar las afirmaciones de equivalencia dadas en la Tabla 3. Los estudiantes pueden, por ejemplo, completar la Tabla 2 como sigue (note que hemos usado nuestra propia notación en esta muestra). Esta forma de trabajo u otras similares, permiten a los estudiantes justificar de manera eficiente las seis equivalencias dadas en la Tabla 3. Un elemento clave de este enfoque es percibir que la forma extendida de, digamos, la Expresión 1 es de la misma forma que la Expresión dada 3.

Tabla 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Método de CAS** | **Qué introduces en CAS** | **Resultado mostrado por CAS** |
| Verificación de la igualdad | Exp3 = Exp4 | True |
| FACTOR | FACTOR (Exp4) | 3(*x*-3)(2*x*-1) |
| EXPAND | EXPAND (Exp1) | Exp3 |
| ENTER | ENTER (Exp2) | 3(*x*-3)(2*x*-1) |

(ii) Un segundo resultado surge en el formato alternativo al verificar la igualdad.

(i.e., “Exp.3 **–** Exp.4 = 0”). Los estudiantes pueden tratar esto fuera de la verificación alternativa en este punto.

**Parte III:** **Tarea**

(Propósito: ver cómo los estudiantes muestran la equivalencia cuando quedan limitados con sus propios artificios, o bien ellos notan que las formas factorizadas y expandidas, para este conjunto dado de expresiones, son idénticas. Resultado de la discusión sugerida: ¿alguno de ustedes usó FACTOR como opuesto a EXPAND para todas las expresiones? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo llevaste a cabo esas formas de comparación?

**A. Prueba que las cuatro expresiones de la Tabla 4 son equivalentes, mediante algún método de CAS que desees. Muestra tu trabajo en la Tabla 5.**

**Tabla 4**

|  |
| --- |
| Expresión dada |
| 1. |
| 2. |
| 3. |
| 4. |

**Tabla 5**

|  |  |
| --- | --- |
| **Qué introduces en CAS** | **Resultado mostrado por CAS** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**B. Determina el máximo conjunto de valores posibles que puede tomar *x*, para este conjunto de expresiones. Muestra cómo determinas este conjunto.**

|  |
| --- |
|  |

**C. ¿Encuentras algo sorprendente en torno a las formas factorizadas y expandidas de este conjunto dado de expresiones? Por favor, explica.**

|  |
| --- |
|  |

**Hoja de trabajo de la Parte II (B)**

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en CAS | Resultado mostrado por CAS |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |