**Actividad 5: Suma y diferencia de cubos**

(Actividad de *profundización* sobre factorización)



El propósito de esta actividad es apoyar las habilidades de los estudiantes, cuando abordan expresiones algebraicas que involucran la suma o la diferencia de potencias múltiplos de 3.

Preámbulo: 10 minutos de discusión con el grupo, antes de empezar la Parte I de esta actividad

* El profesor discute problemas relacionados con diferencia de cuadrados. El profesor pondrá énfasis en el proceso inverso; esto es, iniciando a partir de formas factorizadas, los estudiantes deben producir una diferencia de cuadrados (pocos ejemplos donde los estudiantes multipliquen factores, usando papel y lápiz para llegar a la diferencia de cuadrados, con el propósito de que ellos vean que ciertos términos se pueden cancelar).
* El profesor preguntará a los estudiantes cómo generan factores, cuyo producto sea una diferencia de cuadrados. El propósito es que los estudiantes puedan concluir que ellos deben producir expresiones como x2 - y2, pero no como x2 + y2.

## Parte I (con CAS, 10 minutos): De la forma factorizada a la forma expandida

Las siguientes formas factorizadas son diferentes de aquellas que ya se han abordado abordado. Usa el comando EXPAND de la calculadora para investigar si la multiplicación indicada de factores produce resultados interesantes.

|  |  |
| --- | --- |
| Forma factorizada  | Forma expandida mostrada por la calculadora  |
| 1.  |  |
| 2.  |  |
| 3.  |  |
| 4.  |  |
| 5.  |  |

**Parte II (con papel y lápiz así como con CAS, 15 minutos): Construcción y verificación de una regla algebraica general**

*a)* Observa la forma de cada resultado mostrado por la calculadora. ¿Cómo se relaciona esta forma con los factores correspondientes? Describe esta relación.

*b)* Establece la regularidad o patrón que hayas observado (mediante los cinco ejemplos) en términos de dos reglas algebraicas generales.

*c)* Usa papel y lápiz para mostrar que las reglas que encontraste, en la Pregunta *b* precedente, funcionan.

[Reglas anticipadas:  y ]

*d)* ¿Cómo usarías la calculadora para verificar las reglas algebraicas obtenidas de la Pregunta *b* precedente? Usa la tabla de abajo para mostrar tu trabajo.

|  |  |
| --- | --- |
| Expresión introducida en CAS  | Resultado mostrado por CAS  |
| Algunas estrategias anticipadas de los estudiantes  |  |
| 1) EXPAND() |  |
| 2)  = (x3+y3) |  |
| 3) —(x3+y3) = 0 |  |
|  |  |
|  |  |

*e)* ¿Hay alguna conexión entre: (i) las reglas generadas y (ii) las ecuaciones formadas por expresiones equivalentes? Por favor, explica.

|  |
| --- |
|  |

## Discusión en el salón de clases de las Partes I y II

## Discusión con el grupo (será efectuada después de completar las Partes I y II): (10 minutos)

* ¿Qué resultados son de interés o notables? Si observaste alguno, ¿te diste cuenta de él en la Parte I?
* Discusión de la Parte II *a)*: ¿Qué notaste, respecto de la regularidad de los factores, en este conjunto de expresiones? ¿Qué regularidad ves entre esos factores y sus correspondientes formas expandidas producidas por la calculadora?
* Discusión de la Parte II *b)*: ¿Qué regla algebraica general generaste para describir la regularidad que observaste en la Parte II *a)*?

[, ]

[Anticipamos que un posible desafío para los estudiantes será representar esta regularidad, usando una regla algebraica]

* Discusión de la Parte II *c)*: ¿Cómo puedes mostrar que las reglas por ti generadas en la Parte II *b)* funcionan?

[Resultado que puede poner énfasis: (i) ¿por qué los términos intermedios, de las expresiones, se cancelan?, (ii) ¿cómo este argumento está relacionado con lo que sucede en el caso de la diferencia de cuadrados?]

* Discusión de la Parte II *d)*: ¿Qué estrategias usaste al responder la Pregunta II *d*? Justifica tu elección de estrategias. ¿Cuál es tu interpretación respecto de lo que se muestra en la pantalla de la calculadora?
* Discusión de la Parte II *e)*: se recalca que las ecuaciones formadas por expresiones equivalentes son llamadas **identidades.** ¿En qué forma, las reglas algebraicas precedentes, son identidades?

##### **Parte III (con papel y lápiz, y con CAS, 20 minutos; será completada como tarea, si es necesario)**

**(A)** Factoriza cada una de las siguientes expresiones, usando sólo papel y lápiz. Muestra todo tu trabajo en la parte derecha de la columna mostrada en seguida:

|  |  |
| --- | --- |
| Expresión dada | Trabajo involucrado en la factorización de la expresión dada |
| 1.  |  |
| 2.  |  |
| 3.  |  |

4. Explica cómo usaste las identidades de la suma y de la diferencia de cubos para factorizar las expresiones precedentes.

|  |
| --- |
|  |

**(B)** 1. Factoriza esta expresión, usando papel y lápiz: .

|  |
| --- |
|  |

2. ¿Qué identidades te ayudaron a factorizar la expresión de la Pregunta B 1 precedente? Por favor, explica cómo usaste esas identidades.

|  |
| --- |
|  |

3. Factoriza esta expresión, usando papel y lápiz: .

|  |
| --- |
|  |

4. ¿Qué identidades te ayudaron a factorizar la expresión precedente? Por favor, explica cómo usaste esas identidades.

|  |
| --- |
|  |

## Discusión en el salón de clases de la Parte III, A y B (alrededor de 10 minutos)

Discusión de la descomposición en factores de expresiones binomiales; cuyos exponentes de sus respectivas literales, son, ya sea pares o múltiplos de 3.

Nuestro particular interés respecto de las preguntas A(4), B(2), y B(4) está en conocer cómo los estudiantes “mapean” la expresión dada sobre las dos identidades de esta lección. La discusión en el salón de clases “mostraría” las formas de pensamiento de los estudiantes en torno a esos mapeos.

Resultados de discusiones específicas:

* En la discusión de la Parte A, una pareja de estudiantes muestra su trabajo y explica la estructura que ellos observan en las expresiones dadas, relacionadas con las identidades. Por ejemplo, ¿qué identificación hicieron entre la expresión 1, digamos, y la forma estándar de *x*3 - *y*3?
* En la discusión de la Parte B: ver que la estructura de la identidad es compleja, debido a la naturaleza de los exponentes. Ello permite a los estudiantes compartir lo que perciben en la estructura de las expresiones B(1) y B(3). En particular, ¿ellos ven la expresión B(3) como una diferencia de cuadrados y como una diferencia de cubos?
* “¿Qué expresiones binomiales involucran exponentes que no permiten encontrar una descomposición en factores?” Es posible que se deba proporcionar algunos ejemplos, similares a los abordados en B(1) y B(3) de la Parte III.

**Parte IV (Tarea desafío con papel y lápiz): Aplicación de las identidades**

El propósito de esta parte es profundizar en la relevancia que tienen las identidades para los estudiantes; se les dan oportunidades para extender y aplicar tales identidades en un contexto numérico y algebraico. Esta parte, también, vincula una componente de modelación algebraica.

Problema 1:

Pierre afirma que: “Para cualesquiera dos números enteros cuya diferencia sea 2, la diferencia de sus cubos es siempre un entero par”.

Argumenta a favor o en contra de la afirmación de Pierre. Muestra tu trabajo en el espacio de abajo.

Problema 2:

Eric hace la siguiente aseveración: “Cualquier entero obtenido de la potencia 6 de otro número entero se le resta 1, entonces el resultado es siempre divisible por el número entero que fue elevado a la potencia 6 más 1, así como por ese entero menos 1”.

Argumenta a favor o en contra de la afirmación de Eric. Muestra tu trabajo en el espacio de abajo.

Discusión con el grupo (será conducida el día siguiente después de completar la tarea desafío de la

Parte IV): (20 minutos)

Problema 1: “Con relación al primer problema, ¿Pierre está en lo correcto? ¿Cómo mostraste que la afirmación de Pierre era correcta o falsa?”

* Si las estrategias que presentan los estudiantes son en su mayoría numéricas, pregunte al grupo si alguien usó una estrategia algebraica. Invite a esos estudiantes para que compartan sus formas de trabajo con el resto del grupo.
* En torno a las dificultades anticipadas (y resultados que realzan la discusión):
1. Expresar una cantidad en términos de otra (“dos enteros cuya diferencia es 2”), con el propósito de producir una expresión algebraica cúbica que contenga una sola variable;
2. Interpretar el resultado final de la expansión cúbica como un número par;
3. Ver el álgebra como herramienta útil para probar algo matemáticamente.

• “¿Con qué estrategias numéricas nos quedamos? ¿Con qué estrategias algebraicas nos quedamos?”

(**Nota**: Estas preguntas son propuestas para indagar lo siguiente: Los estudiantes ¿están más convencidos por los ejemplos numéricos o por las representaciones algebraicas generales de esas relaciones numéricas?)

* “¿Alguno de los estudiantes usó la calculadora en la solución de este problema? ¿Cómo fue usada la calculadora?

Problema 2: “En cuanto al segundo problema, ¿Eric estaba en lo correcto? ¿Cómo mostró que la afirmación de Eric era cierta o falsa?

* Si las estrategias que presentan los estudiantes son en su mayoría numéricas, pregunte al grupo si alguien usó una estrategia algebraica. Invite a esos estudiantes para que compartan sus formas de trabajo con el resto del grupo.
* En torno a las dificultades anticipadas (y resultados que realzan la discusión):
1. Después de la afirmación: “Cualquier entero obtenido de la potencia 6 de otro número entero se le resta 1, entonces el resultado es siempre divisible por el número entero que fue elevado a la potencia 6 más 1, así como por ese entero menos 1” ha sido traducida en forma algebraica, ¿qué hacer con esta forma?
2. Una carencia en cuanto a la comprensión de que los factores son también divisores puede llevar a la necesidad de una discusión extensa de este hecho y volver al contexto aritmético.