**Nombre:**

**Fecha:**

**Actividad 5: Suma y diferencia de cubos**

**Parte I (con calculadora): de la forma factorizada a la forma expandida**

Las siguientes formas factorizadas son diferentes de aquellas que ya se han abordado. Usa el comando EXPAND de la calculadora para investigar si los resultados obtenidos, al efectuar la multiplicación indicada por los factores, presentan alguna regularidad.

|  |  |
| --- | --- |
| Forma factorizada | Forma expandida mostrada por la calculadora |
| 1. | *x3+8* |
| 2. | *x3-27* |
| 3. | *x3+343* |
| 4. |  |
| 5. |  |

**Parte II (con papel y lápiz así como con calculadora): Construcción y verificación de una regla algebraica general**

II *a)* Observa la forma de cada uno de los resultados mostrados en la pantalla de la calculadora. ¿Cómo es esta forma relacionada con los factores correspondientes? Describe esta relación.

La forma del resultado es un binomio compuesto del cubo del primer término del primer factor, seguido por el signo del primer factor y por el cubo del segundo término del primer factor. Se debe señalar también que el segundo factor está constituido del cuadrado del primer término del primer factor, seguido por el signo opuesto del primer factor y del producto de los dos términos del primer facor, seguido por el mismo signo del primer factor y del cuadrado del segundo término del primer factor.

II *b)* Establece la regularidad o los patrones que hayas observado (a través de los cinco ejemplos precedentes) en términos de dos reglas algebraicas generales.

Regla 1: *(a + b)(a2 – ab + b2) = a3 + b3*

Regla 2: *(a — b)(a2 + ab + b2) = a3 — b3*

II *c)* Usa papel y lápiz para mostrar que las reglas que encontraste, en la Pregunta II*b* precedente, funcionan.

*(a + b)(a2 – ab + b2) = a3 — a2b + ab2 + a2b — ab2  + b3 = a3 + b3*

*(a — b)(a2 + ab + b2) = a3 + a2b + ab2 — a2b — ab2 — b3 = a3 — b3*

II *d)* ¿Cómo usarías tu calculadora para verificar las reglas algebraicas que obtuviste de la Pregunta II*c* precedente? Usa la tabla siguiente para mostrar tu trabajo.

|  |  |
| --- | --- |
| Expresión introducida en la calculadora | Resultado mostrado en la pantalla de la calculadora |
| EXPAND(*(a + b)(a2 – ab + b2))* | *a3 + b3* |
|  |  |
| EXPAND(*(a — b)(a2 + ab + b2))* | *a3 — b3* |
| O bien |  |
| FACTOR(*a3 + b3)*  FACTOR(*a3 — b3)*  O bien  *(a + b)(a2 – ab + b2) = a3 + b3*  *(a — b)(a2 + ab + b2) = a3 — b3* | *(a + b)(a2 – ab + b2)*  *(a — b)(a2 + ab + b2)*  True  True |
|  |  |

## Discusión en el salón de clases de las Partes I y II

##### **Parte III (con papel y lápiz): de la forma expandida a la forma factorizada**

III(A) Factoriza cada una de las siguientes expresiones, usando sólo papel y lápiz. Muestra todo tu trabajo en la parte derecha de las columnas de abajo:

|  |  |
| --- | --- |
| Expresión dada | Trabajo involucrado en la factorización de la expresión dada |
| 1. | *8u3—v3 = (2u-v)(4u2 + 2uv + v2)* |
| 2. | *27w3 + 8z3 = (3w + 2z)(9w2—6wz + 4z2)* |
| 3. | *(u + 2)3 — (u—2)3 = ((u + 2)—(u—2))((u + 2)2 + (u + 2)(u—2) + (u—2)2)*  *= (u + 2—u + 2)(u2 + 4u + 4 + u2—4 + u2—4u + 4)*  *= 4(3u2 + 4)* |

4. Explica cómo usaste las identidades de la suma y de la diferencia de cubos para factorizar las expresiones precedentes.

|  |
| --- |
| Hice corresponder el primer término de la expresión dada a *a*3, y el segundo término de la expresión dada a *b*3. Por ejemplo, en la segunda expresión *27w3* es (*3w*)*3* y *8z3* es *(2z)3*. En seguida, factoricé como si la expresión fuera *a3+b3*, o bien *a3—b3.* Procedí de forma semejante para las otras expresiones dadas.  La tercera expresión de arriba necesitó de manipulaciones algebraicas suplementarias para obtener la forma factorizada final. |

## Discusión en clase de las partes III A

III(B) 1. Factoriza esta expresión, usando papel y lápiz: .

|  |
| --- |
| *v9 + w9 = (v3)3 + (w3)3*  *= (v3 + w3)(v6—v3w3 + w6)* [podríamos detenernos aquí, pero podemos continuar…]  *= (v + w)(v2—vw + w2)(v6—v3w3 + w6)* |

2. ¿Qué identidades te ayudaron a factorizar la expresión de la Pregunta III(B) 1 precedente? Por favor, explica cómo aplicaste estas identidades.

|  |
| --- |
| Primero expresé *v9 + w9* como *(v3)3 + (w3)3*. Como es evidentemente una suma de cubos, utilicé la regla para *a3 + b3* y le hice corresponder *v3* a *a* y *w3* a *b*. Después de haber factorizado, me di cuenta de que el primer factor era *v3 + w3*. Por tanto, pude factorizar esta parte de forma semejante, utilizando la misma regla. |

3. Factoriza la expresión, usando papel y lápiz: .

|  |
| --- |
| *x6—y6 = (x3)2—(y3)2*  *= (x3 + y3)(x3—y3)*  *= (x + y)(x2—xy + y2)(x—y)(x2 + xy + y2)*  O bien  *x6—y6 = (x2)3—(y2)3*  *= (x2—y2)((x2)2 + x2y2 + (y2)2)*  *= (x—y)(x + y)(x4 + x2y2 + y4)*   [se puede verificar que se obtiene la misma factorización que la de arriba]  *= (x—y)(x + y)(x2 + xy + y2)(x2—xy + y2)* |

4. ¿Qué identidades te ayudaron a factorizar la expresión ? Por favor, explica cómo aplicaste estas identidades.

|  |
| --- |
| Hay dos formas de ver la expresión .  La primera forma es verla como una diferencia de cuadrados (el primer caso de arriba), aplicar primero la identidad para la diferencia de cuadrados y, en seguida, aplicar las dos reglas para la suma y la diferencia de cubos.  La segunda forma es verla como una diferencia de cubos (el segundo caso de arriba), aplicar en seguida la regla para la diferencia de cubos, después aplicar la identidad para la diferencia de cuadrados. El factor de grado cuatro puede también ser factorizado completamente, como se procedió antes. |

## Discusión en el salón de clases de las Partes III B

**Parte IV (Tarea-desafío con papel y lápiz): aplicación de identidades**

Problema 1:

Pierre afirma que: “Para cualesquier par de enteros cuya diferencia sea 2, la diferencia de sus cubos es siempre un número entero par”.

Argumenta a favor o en contra de la afirmación de Pierre. Muestra tu trabajo en el espacio siguiente.

Supongamos que los dos enteros son representados por *x* y *x—2*.

La diferencia de sus cubos es *x3—(x—2)3*, expresión que se puede re-expresar como sigue, aplicando la regla para la diferencia de cubos:

*x3—(x—2)3 = (x—(x—2))(x2 + x(x—2) + (x—2)2)*

*= (x—x + 2)(x2 + x2—2x + x2—4x + 4)*

*= 2(3x2—6x + 4)*

Uno de los dos factores del resultado final es 2. Este resultado es un número par. Además, los dos números de inicio *x* y *x—2,* siendo enteros, el resultado será también un número entero.

Problema 2:

Eric hace la siguiente afirmación: “Si a cualquier número entero obtenido de la potencia 6 de otro número entero se le resta 1, entonces el resultado es siempre divisible por el número entero que fue elevado a la potencia 6 más 1, así como por ese entero menos 1”.

Argumenta a favor o en contra de la afirmación de Eric. Muestra tu trabajo en el espacio de abajo.

Sea *x* el entero inicial. Si este número es elevado a la potencia 6, se obtiene *x6*. Si en seguida se sustrae uno, se tiene *x6—1*.

Se puede re-escribir *x6—1* como sigue:

*x6—1 = (x2)3—13*

*= (x2—1)(x4 + 1x2 + 1)*

*= (x—1)(x + 1)(x4 + 1x2 + 1)*

Dado que *x—1* y *x + 1* son dos factores de *x6—1*, esto muestra que *x6—1* es siempre divisible por cada uno de estos factores. Además, se tiene claramente que *x—1* es “ el entero inicial menos uno” y que

*x + 1* es “ el entero inicial más uno”.