Actividad 8: Sistemas de ecuaciones

El propósito de esta actividad es desarrollar en los estudiantes la comprensión de los métodos algebraicos de sustitución e igualación, usados para resolver sistemas de ecuaciones.

**Lección 1** (Partes I y II, como introducción a los sistemas de ecuaciones)

Parte I (con CAS, 25 minutos): uso de evaluaciones numéricas para verificar soluciones de cierto tipo de ecuaciones

(A) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. La siguiente tabla contiene una ecuación y algunos valores numéricos.

*Sin resolver* esta ecuación, determina si los valores de la columna izquierda son soluciones de la ecuación (usando CAS). Pero antes de usar CAS, describe en el rectángulo de abajo cómo propones el uso de CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

1. Ahora, el trabajo con la calculadora (pero sin resolver, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valores de *x* | Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
| *x* = -2 |  |  |
| *x* = 2 |  |  |
| *x* = -5 |  |  |

1. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

(B) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene una nueva ecuación y algunos valores numéricos.

*Sin resolver* esta ecuación, pero de nuevo usando CAS, determina si cada par de valores dados, en la columna izquierda, es solución. Pero antes de usar CAS describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones el uso de CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

1. Ahora, el trabajo con la calculadora (pero sin resolver, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valores de la pareja *x* y *y* | Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
| *x* = 3 y *y* = 12 |  |  |
| *x* = -3 y *y* = 4 |  |  |
| *x* = -18 y *y* = -6 |  |  |

1. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

# (C) Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene un sistema de ecuaciones y algunas parejas ordenadas de números.

*Sin resolver* este sistema de ecuaciones, determina si cada par de valores dados en la columna izquierda, es solución (usando CAS). Pero antes de usar CAS describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones el uso de CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

1. Ahora, el trabajo con la calculadora (pero sin resolver). Por favor, escribe, en el rectángulo de abajo, qué introduces en la calculadora, así como los resultados que muestra ésta en su pantalla.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valores de la pareja *x* y *y* | Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
| *x* = 0 y *y* = 2 |  |  |
| *x* = 4 y *y* = 3 |  |  |
| *x* = 2 y *y* = 1 |  |  |

1. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones? Por favor, explica.
2. ¿Hay algunas preguntas o ideas que se te hayan ocurrido, mientras trabajabas con estos tres tipos de ecuaciones?

###### Discusión en el salón de clases de la Parte I

##### Discusión de resultados (después de que los estudiantes hayan terminado la Parte I)

* ¿Cómo verificaste que los valores dados eran soluciones?
* De entre los valores numéricos dados, ¿cuáles fueron soluciones?

¿Cómo aparece, en la calculadora, esta información? ¿Cómo, por ejemplo, interpretas la siguiente expresión que aparece en la pantalla de la calculadora?

“ **|** *x* = 2 → false”

• ¿Qué respondiste cuando se te preguntó: ¿puedes encontrar otras soluciones de estas ecuaciones (o sistemas de ecuaciones)?

* ¿Qué preguntas particulares vinieron a tu mente, cuando trabajabas con estos tres tipos de ecuaciones?

**Parte II (con CAS, 35 minutos):**

**Interpretación de las soluciones que da CAS de ecuaciones con dos incógnitas**

(A) Resolver una ecuación con una incógnita.

Uso del comando “SOLVE” de CAS para resolver la siguiente ecuación:

*4(3x-7) = 2(3-x)+5*

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
|  |  |

(B) Resolver una ecuación con dos incógnitas.

Las siguientes seis preguntas se refieren a la ecuación: *2x+7 = 8y+11*.

1. ¿Qué conjeturas como resultado si usas CAS para resolver esta ecuación, en términos de *x*?
2. Usa CAS para resolver esta ecuación en términos de *x*:

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
|  |  |

1. ¿Cómo interpretas el resultado dado por CAS?
2. ¿Qué conjeturas como resultado si usas CAS para resolver esta ecuación, en términos de *y*?
3. Usa CAS para resolver la ecuación: *2x+7 = 8y+11* en términos de *y:*

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
|  |  |

1. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por CAS?

(C) Distinciones entre las soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), CAS mostraba valores numéricos como soluciones de *x*. Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostraba los resultados en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?
2. ¿Puedes usar esas expresiones mostradas por CAS para encontrar soluciones numéricas de las ecuaciones? Por favor, explica.

##### **Discusión en el salón de clases de la Parte II A, B, C**

Discusión de resultados (después de que los estudiantes hayan terminado la Parte II A, B, C)

* ¿Por qué CAS mostró una expresión en *y* o en *x* cuando usaste el comando SOLVE para resolver la ecuación: *2x+7 = 8y+11*?
* ¿Cómo interpretas la expresión producida por el comando SOLVE cuando resuelves ecuaciones con dos incógnitas?
* ¿Cómo puedes usar esas expresiones para encontrar soluciones numéricas de esta ecuación?

**[**Puntos a resaltar: a) Las parejas (soluciones numéricas de la ecuación) no son dadas al azar, ellas están determinadas por las condiciones de la ecuación.

b) Las parejas (soluciones numéricas) son generadas por la regla *x* = *f*(*y*)… y son las mismas que se generan con la regla *y* = *f-*1(*x*)… **]**

**Ejemplo:**

Usa CAS para generar parejas solución, tomando en cuenta las expresiones obtenidas con el comando “SOLVE”: *x= 2(2y+1)* y *y* = 

(i) Genera algunas parejas solución con la regla: *x= 2(2y+1*):

*x= 2(2y+1)* **|** *y* = 1 →x = 6

*x= 2(2y+1)* **|** *y* = 2 →x = 10

*x= 2(2y+1)* **|** *y* = 3 →x = 14

(ii) Genera algunas parejas solución con la regla: *y* =:

*y* = **|** *x* = 6 →y = 1

*y* = **|** *x* = 10 →y = 2

*y* = **|** *x* = 14 →y = 3

(iii) Verifica alguna de esas soluciones en la ecuación original:

*2x + 7* = *8y + 11* **|** *x* = 6 and *y* = 1 →true

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**(D)** Uso de CAS para generar y verificar soluciones de ecuaciones con dos incógnitas (debe ser completada como tarea).

1. Usa CAS para generar tres soluciones de cada una de estas ecuaciones (registra todo aquello que introduces en CAS, mientras prosigues con tu trabajo, así como de todo aquello que CAS muestra como resultado en cada paso). Verifica al menos una solución en cada una de las ecuaciones (con CAS).

(a) 

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
|  |  |

(b) 

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
|  |  |

1. Da al menos una pregunta o idea que se le haya ocurrido, mientras realizabas este trabajo (por ejemplo, una pregunta referente a las dificultades que hayas tenido).

**Lección 2** (Partes IIIA, IIIB, IIIC)

**Punto de inserción**: después de que los estudiantes hayan trabajado con los métodos de Igualación y de Sustitución.

Preámbulo referente a la tarea del día anterior (preguntas, comentarios, etc., 5 minutos)

**Parte IIIA (con papel y lápiz, 15 minutos):**

**Repaso de los métodos de Igualación y de Sustitución**

Discusión introductoria:

“Recuerda que ya discutimos aquello que se entiende como sistemas de ecuaciones”.

(a) “¿Cómo le explicarías a alguien que no haya escuchado de este tema antes?”

(b) “Da un ejemplo de un sistema de ecuaciones”

(c) “¿Qué puedes decir respecto al número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales?”

Trabajo individual del estudiante:

1. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

|  |  |
| --- | --- |
| MÉTODO DE IGUALACIÓN  El Método de Igualación algebraica consiste en: | *x* + 3*y* = 5  7*x* + 6*y* = 20 |
| 1. Despejar la misma variable en ambos lados de las ecuaciones, con lo cual obtenemos dos expresiones; cada una con una sola variable independiente; | *y* = (5-*x*)/3  *y* = (20-7*x*)/6 |
| 2. Proponer que las dos ecuaciones obtenidas en el paso 1 son iguales, con objeto de construir una ecuación con una variable; | (5-*x*)/3 = (20-7*x*)/6 |
| 3. Resolver la ecuación que resulta de la igualación; | (5-*x*)/3 = (20-7*x*)/6  2(5-*x*) = (20-7*x*)  10-2*x* = 20-7*x*  7*x*-2*x* = 20-10  5*x* = 10  *x* = 2 |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | *y* = (5 – *x*)/3 = (5 – 2)/3 = 1  La pareja solución es (*x*, *y*) = (2, 1)  ¡Verifique esto! |

Pregunta: ¿Por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

1. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

|  |  |
| --- | --- |
| MÉTODO DE SUSTITUCIÓN  El Método de Sustitución algebraica consiste en: | 2*x* + 3*y* = 25  5*x* + *y* = 30 |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables en una de las ecuaciones; | *y* = 30 – 5*x* |
| 2. Sustituir la expresión obtenida en el paso 1, de la variable apropiada, en la otra ecuación; de este modo construimos una ecuación con una variable; | 2*x* + 3(30 – 5*x*) = 25 |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2; | 2*x* + 90 – 15*x* = 25  -13*x* = 25-90  -13*x*=-65  *x* = 65/13 |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema para calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | *y* = 30 – 5(65/13)  = 65/13  La pareja solución es (*x*, *y*) = (65/13, 65/13)  ¡Verifique esto! |

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

1. ¿En qué forma estos dos métodos (Métodos de Igualación y de Sustitución) permiten reducir el sistema dado en una ecuación que ya sabemos resolver?

# **Discusión en el salón de clases de la Parte IIIA**

Breve discusión de las respuestas de los estudiantes a las Preguntas 1, 2, y 3

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

### Parte IIIB (con CAS, 25 minutos): Uso del Método de Igualación con la CAS

**Nota para el profesor:** es posible que algunos estudiantes tengan dificultades con esta parte. Si algunos de ellos tienen dificultades conceptuales con el método de Igualación, encontrarán esto como desafío para pasar del método usado con papel y lápiz a su correspondiente uso con la calculadora. Así, tenemos dos propósitos en esta sección: (a) usar la actividad como indicador de sus dificultades, y (b) proveerlos de una herramienta que les permita enfrentar esas dificultades u obstáculos. Con referencia a (b), un obstáculo potencial puede ser la ausencia de principios teóricos que justifiquen la creación de una igualdad, en la que están involucradas dos expresiones algebraicas donde se expresa una variable en términos de la otra. En este caso, una discusión en torno a la propiedad transitiva de la igualdad puede ser de utilidad.

He aquí un sistema de ecuaciones lineales: 

1. Con CAS, usa el Método de Igualación para resolver este sistema de ecuaciones (registra todo aquello que introduces en la CAS, mientras prosigues con su trabajo, así como de todo aquello que la calculadora muestra como resultado, al usar sus comandos).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| El Método de Igualación consiste en: | Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de ese modo, crear dos expresiones donde cada una tiene una variable común. |  |  |
| 2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales, con objeto de construir una ecuación con una variable; y resolver la ecuación que resulta. |  |  |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. |  |  |

2. ¿Cómo verificas con CAS que tu solución es correcta?

1. En el Paso 4 de la Pregunta 1 precedente, reemplazaste el valor obtenido en el Paso 3 (para la primera variable) en una de las ecuaciones. Ahora sustituye este mismo valor obtenido en el Paso 3 en la otra ecuación. ¿Qué sucede? ¿Por qué crees que ocurre esto?

# **Discusión en el salón de clases de la Parte IIIB**

Discusión de resultados (después de que los estudiantes hayan terminado la Parte IIIB)

* ¿Cómo respondiste la pregunta 2 precedente? “¿Qué hiciste para verificar con CAS que tu solución es correcta?”
* ¿Qué sucedió cuando sustituiste el mismo valor obtenido en el Paso 3, en la otra ecuación? ¿Cómo explicas este hecho? (Obtener el mismo valor en los dos casos, tal vez algunos estudiantes hablarán del punto de intersección de las dos líneas rectas; sin embargo, estamos interesados en ver si algunos de ellos sugieren alguna explicación algebraica: esto es, que al sustituir un valor particular de *x* en las dos ecuaciones, ellas dan el mismo valor de *y*.)
* ¿Cuál es la lógica subyacente en los dos primeros pasos del Método de Igualación y cómo están vinculados los pasos 3 y 4 de este Método? (Puntos a resaltar: los principios que apoyan los primeros dos pasos están basados en la equivalencia y en el axioma de la propiedad transitiva de la igualdad; los primeros dos pasos nos permiten, por tanto, obtener una ecuación con una sola variable, algo con lo que ya estamos familiarizados, y encontrar los valores de esta variable nos lleva a obtener el valor de la otra, mediante sustitución.)

**Parte IIIC (con CAS, 15 minutos): Uso del Método de Sustitución con la CAS**

**Nota para el profesor:** un obstáculo posible en esta sección es aquel que se refiere a la idea de sustituir una variable en una expresión algebraica. *Sugerencia*: si, basado en la regla *x* = *5 - 3y*, que satisface la primera ecuación, los estudiantes son capaces de conceptualizar “*5 - 3y*” como un objeto y no como un proceso, ellos estarán en la mejor posición para darle sentido a la sustitución de *5-3y* para *x* en la segunda ecuación.

1. Con CAS, usa el Método de Sustitución para resolver este sistema de ecuaciones (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, así como de todo aquello que la calculadora muestra como resultado, al usar sus comandos).



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| El Método de Sustitución consiste en: | Qué introduces en CAS | Qué muestra CAS como resultado |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables en una de las ecuaciones; |  |  |
| 2. Sustituir la expresión obtenida en el paso 1, para la variable apropiada, en la otra ecuación; de este modo es construida una ecuación con una variable; |  |  |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2; |  |  |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema para calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. |  |  |

2. ¿Cómo verificas con CAS que tu solución es correcta?

3. ¿Cuál de los dos métodos (IGUALACIÓN y SUSTITUCIÓN) prefieres y por qué?

4. ¿Qué tienen en común esos dos métodos? (No re-escribas sólo los pasos de ambos métodos).

# **Discusión en el salón de clases de la Parte IIIC**

Discusión de resultados (después de que los estudiantes hayan terminado la Parte IIIC)

Referente a la Pregunta 2: sugerimos investigar aún más las ideas de los estudiantes en torno a la verificación y al concepto de solución; es posible plantearles la siguiente pregunta: “¿qué significado tiene cuando decimos que cierta pareja es solución de un sistema de ecuaciones?”

Una pregunta relacionada con la Pregunta 4 precedente pudiera ser: “si hablamos acerca de la lógica subyacente de los dos métodos, ¿en qué formas esos dos métodos se parecen uno con el otro?”

### Tarea

Con CAS, usa el método más apropiado (Igualación o Sustitución) para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(1)  (2) 