Nombre:

Fecha:

Actividad 8: Sistemas de ecuaciones

**Lección 1**: **Introducción a los sistemas de ecuaciones**

**Parte I (con calculadora): uso de evaluaciones numéricas para verificar soluciones dadas con números de cierto tipo de ecuaciones**

(A) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. La tabla siguiente contiene una ecuación y algunos valores numéricos:

*Sin resolver* esta ecuación, determina si los valores de la columna de la izquierda son soluciones de la ecuación (usando la calculadora). Pero antes de usar la calculadora, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar esta herramienta para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

Una estrategia recomendada es sustituir el valor de *x* en la ecuación. Si al sustituir ese valor da el mismo resultado de cada lado de ésta, entonces ese valor es solución de tal ecuación. Si la calculadora muestra “true” cuando se reemplaza *x* por el valor dado, ello significa que los resultados producidos por esta sustitución son iguales.

1. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valores de *x* | Qué introduces en la calculadora | Resultado mostrado por la calculadora |
| *x* = -2 | *12x + 15 = 4(x - 2) + 7* **|** *x = -2* | true |
| *x* = 2 | *12x + 15 = 4(x - 2) + 7* **|** *x = 2* | false |
| *x* = -5 | *12x + 15 = 4(x - 2) + 7* **|** *x = -5* | false |

1. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

Esta ecuación no tiene otras soluciones, ya que una ecuación de primer grado con una incógnita no tiene más que una solución (¿por qué?)

(B) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene una nueva ecuación y algunos valores numéricos:

*Sin resolver* esta ecuación, pero de nuevo usando la calculadora, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución. Pero antes de usar la calculadora, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usarla para determinar esto, y di qué información te dará esta herramienta.

Se sustituye la pareja de valores en la ecuación para ver si los dos lados de la ecuación dan los mismos resultados. La calculadora mostrará en la pantalla “true” si la pareja de valores dada es solución.

1. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valores de la pareja *x* y *y* | Qué introduces en la calculadora | Resultado mostrado por la calculadora |
| *x* = 3 y *y* = 12 | ***|*** x = 3 and y = 12 | false |
| *x* = -3 y *y* = 4 | ***|*** x = -3 and y = 4 | true |
| *x* = -18 y *y* = -6 | **|** x = -18 and y = -6 | true |

1. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

Hay una infinidad de parejas de valores que son soluciones de esta ecuación de primer grado con dos incógnitas. Una de estas soluciones es *x = -9* y *y =* 0, y corresponde a la pareja (-9, 0). Cuando se sustituye estos valores en la ecuación, se obtiene un mismo valor para el miembro de la derecha y para el miembro de la izquierda de ésta.

# 

# (C) Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene un sistema de ecuaciones y algunas parejas ordenadas de números.

*Sin resolver* este sistema de ecuaciones, determina si cada pareja de valores de la columna de la izquierda es solución (usando la calculadora). Pero antes de usar la calculadora, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usarla para determinar esto, y di qué información te dará esta herramienta.

Una pareja de valores dada es solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas si y solamente si satisface las dos ecuaciones del sistema. Esta pareja de valores, una vez sustituida, hace que las *dos* ecuaciones sean *verdaderas*.

La calculadora mostrará “true” para las dos ecuaciones si la pareja de valores sustituida es efectivamente una solución del sistema.

1. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Por favor, escribe, en la tabla de abajo, qué introduces en la calculadora, así como aquello que ella muestra como resultado.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Valores de la pareja *x* y *y* | Qué introduces en la calculadora | Resultado mostrado por la calculadora |
| *x* = 0 y *y* = 2 | 2x = 8 - 4y **|** x = 0 and y = 2  17x - 31y = 3 **|** x = 0 and y = 2 | true  false |
| *x* = 4 y *y* = 3 | (2x = 8 - 4y **|** x = 4 and y = 3) and  (17x - 31y = 3 **|** x = 4 and y = 3) | false |
| *x* = 2 y *y* = 1 | (2x = 8 - 4y **|** x = 2 and y = 1)  (17x - 31y = 3 **|** x = 2 and y = 1) | true |

1. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones? Por favor, explica.

|  |
| --- |
| No hay otra solución para este sistema particular de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. [Nota: una representación gráfica de este sistema muestra dos rectas que se cortan en un solo punto.] |

1. ¿Hay algunas preguntas o ideas que se te hayan ocurrido, mientras trabajabas con esos tres tipos de ecuaciones?

¿Podemos predecir cuántas soluciones tendrá un sistema de ecuaciones, antes de resolverlo?

###### Discusión en el salón de clases de la Parte I

**Parte II (con calcuadora):**

**Interpretación con la calculadora de las soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas**

(A) Solución de una ecuación con una incógnita.

Usa el comando “SOLVE” de la calculadora para resolver la siguiente ecuación:

*4(3x-7) = 2(3-x)+5*

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en la calculadora | Qué muestra la calculadora como resultado |
| Solve(*4(3x-7) = 2(3-x)+5*, *x*) | *x = 39/14* |

(B) Solución de una ecuación con dos incógnitas.

Las siguientes seis preguntas se refieren a la ecuación: *2x+7 = 8y+11*.

1. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la calculadora para resolver esta ecuación en términos de *x*?

|  |
| --- |
| La calculadora mostrará una expresión algebraica que relaciona *x* en función de *y*. |

1. Usa la calculadora para resolver esta ecuación en términos de *x*:

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en la calculadora | Qué muestra la calculadora como resultado |
| Solve(*2x+7 = 8y+11*, *x*) | *x = 2(2y + 1)* |

1. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la calculadora?

|  |
| --- |
| Una interpretación posible:  Dado que la ecuación contiene dos incógnitas, y como el comando “solve” especificaba resolverla para una de las ecuaciones, la calculadora mostró el “valor” de esta incógnita en función de la otra incógnita. |

1. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la calculadora para resolver esta ecuación en términos de *y*?

|  |
| --- |
| La calculadora mostrará el “valor” de *y* en función de *x*. |

1. Usa la calculadora para resolver la ecuación: *2x+7 = 8y+11* en términos de *y:*

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en la calculadora | Qué muestra la calculadora como resultado |
| Solve(*2x+7 = 8y+11*, *y)* | *y = (x - 2)/4* |

1. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la calculadora?

|  |
| --- |
| La calculadora mostró el “valor” de *y* en función de *x*. |

(C) Distinción entre soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), la calculadora mostró un valor numérico como solución para *x*. Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostró el resultado en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?

|  |
| --- |
| La ecuación en II A contiene una sola incógnita; la calculadora puede por tanto determinar y mostrar un valor numérico como solución. Sin embargo, la ecuación en II B contiene dos incógnitas; en este caso la calculadora no puede mostrar más que la relación entre las dos incógnitas; es decir, una en función de la otra (aquella que se le pide resolver). En este último caso, tal como se verá en la pregunta siguiente, es también posible obtener, como soluciones, parejas de valores numéricos.  [De hecho, esta ecuación tiene un número infinito de soluciones (¿por qué?)] |

1. ¿Cómo puedes usar esas expresiones, mostradas por la calculadora, para encontrar soluciones numéricas de las ecuaciones?

|  |
| --- |
| Se puede sustituir valores numéricos para *x* (o para *y*) en las expresiones de *y* en términos de *x* (o de *x* en función de *y*). Ello producirá un valor numérico para el otro miembro de la pareja solución.  Por ejemplo, si se reemplaza *x* por 6 en *y = (x - 2)/4*, *y* tomará el valor de 1. Si se sustituyen los valores de *x = 6* y  *y = 1* en la ecuación *2x+7 = 8y+11*, los dos lados tendrán el mismo resultado numérico, ya que *x = 6* y  *y = 1* es solución de la ecuación. Se puede obtener otras soluciones de la misma manera. |

##### **Discusión en el salón de clases de la Parte II A, B, C**

(D) Uso de la calculadora para generar y verificar soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Usa la calculadora para generar tres soluciones de cada una de estas ecuaciones (registra todo aquello que introduces en la calculadora mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado, en cada paso). Verifica al menos una solución de cada ecuación (con la calculadora).

(a) 

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en la calculadora | Qué resultado muestra la calculadora |
| Solve(, *x*)  x = 15y - 22 **|** y = {1, 2, 3}  **|** x = 8 and y = 2 | x = 15y - 22  x = {-7, 8, 23}  true |

(b) 

|  |  |
| --- | --- |
| Qué introduces en la calculadora | Qué resultado muestra la calculadora |
| Solve(, *y*)  *y* = -7(72x - 37)/24 **|** x = {1, 2, 3}  **|** *x =* 3 and *y* = -1253/24 | *y* = -7(72x - 37)/24  *y* = {-245/24, -749/24, -1253/24}  true |

1. Plantea al menos una pregunta o da alguna idea que se te haya ocurrido, mientras trabajabas en la Parte D precedente (por ejemplo, una pregunta referente a las dificultades que hayas tenido).

**Lección 2** (Partes IIIA, IIIB, IIIC)

**Parte IIIA (con papel y lápiz): Repaso de los métodos de Igualación y de Sustitución**

1. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

|  |  |
| --- | --- |
| MÉTODO DE IGUALACIÓN  El Método de Igualación consiste en: | *x* + 3*y* = 5  7*x* + 6*y* = 20 |
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen una variable común; | *y* = (5-*x*)/3  *y* = (20-7*x*)/6 |
| 2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una variable; | (5-*x*)/3 = (20-7*x*)/6 |
| 3. Resolver la ecuación que resulta; | (5-*x*)/3 = (20-7*x*)/6  2(5-*x*) = (20-7*x*)  10-2*x* = 20-7*x*  7*x*-2*x* = 20-10  5*x* = 10  *x* = 2 |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | *y* = (5 – *x*)/3 = (5 – 2)/3 = 1  La pareja solución es (*x*, *y*) = (2, 1)  ¡Verifique esto! |

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

Se despeja la incógnita *y* en las dos ecuaciones de arriba (etapa 1) para producir dos ecuaciones distintas en términos de *x*. Después se comparan estas dos expresiones en *x* por medio de una ecuación. Establecer una ecuación significa entonces hacer una comparación entre las dos expresiones. Se busca en seguida un valor de *x* que satisfaga las dos expresiones. Se encuentra, de esta forma, una pareja (*x*, *y*) que satisface las dos ecuaciones.

1. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

|  |  |
| --- | --- |
| MÉTODO DE SUSTITUCIÓN  El Método de Sustitución consiste en: | 2*x* + 3*y* = 25  5*x* + *y* = 30 |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables en una de las ecuaciones; | *y* = 30 – 5*x* |
| 2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, construir una ecuación con una variable; | 2*x* + 3(30 – 5*x*) = 25 |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2; | 2*x* + 90 – 15*x* = 25  -13*x* = 25-90  -13*x*=-65  *x* = 65/13 |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | *y* = 30 – 5(65/13)  = 65/13  La pareja solución es (*x*, *y*) = (65/13, 65/13)  ¡Verifique esto! |

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

|  |
| --- |
| En la etapa de arriba, se despeja la incógnita *y* en una de las dos ecuaciones para obtener una expresión de *y* en función de *x*. Se sustituye en seguida esta expresión de *y* en la otra ecuación; de hecho, se reemplaza la incógnita *y* en esta ecuación por la expresión obtenida al despejar la variable en cuestión. Se elimina de esta forma toda referencia explícita de *y* en la segunda ecuación. |

1. ¿En qué forma estos dos métodos (los métodos de Igualación y de Sustitución) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

|  |
| --- |
| Los dos métodos permiten, esencialmente, eliminar las referencias a una de las dos incógnitas. De esta forma, se convierte el sistema de ecuaciones en una ecuación con sólo una incógnita, que ya se sabe cómo resolverlo. |

# **Discusión en el salón de clases de la Parte IIIA**

### Parte IIIB (con calculadora): Uso del Método de Igualación con la calculadora

He aquí un sistema de ecuaciones lineales: 

1. Con la calculadora, usa el Método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que ella muestra como resultado al usar sus comandos).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| El método de Igualación consiste en: | Qué introduces en la calculadora | Qué muestra la calculadora como resultado |
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable; | Solve(*x - 8=2y+2, x*)  Solve(*3x+5y+3=0*, *x*) | *x=2y+10*  *x=-(5y+3)/3* |
| 2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta; | Solve(*2y+10=-(5y+3)/3*, *y*) | *y=-3* |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | *x=2y+10* **|** y=-3 | *x=4* |

1. ¿Cómo verificas con la calculadora que tu solución es correcta?

|  |
| --- |
| Se utiliza el operador de evaluación: “(*x-8=2y+2* and *3x+5y+3=0*) **|** *x=4* and *y=-3”*. La calculadora mostrará “true” si la pareja es solución del sistema. |

1. En el paso 4 de la Pregunta 1 precedente, reemplazaste el valor obtenido en el Paso 3 (de la primera variable) en una de las ecuaciones. Ahora sustituye este mismo valor obtenido en el Paso 3 en la otra ecuación. ¿Qué sucede? ¿Por qué crees que pasa esto?

|  |
| --- |
| Si se utiliza el operador de evaluación “*x=-(5y+3)/3* **|** *y=-3*”, la calculadora muestra “*x=4*”. Se verifica que es el mismo valor que el obtenido al reemplazar *y=-3* en la otra ecuación (*x* en función de *y*). Esto no es sorprendente, ya que si *y=-3,* la segunda componente de la pareja solución del sistema dado produce el valor numérico de la primera componente de la pareja solución del sistema. Esto es así porque, por definición, una pareja solución debe satisfacer *las dos* ecuaciones. |

# **Discusión en el salón de clases de la Parte IIIB**

### Parte IIIC (con calculadora): Uso del Método de Sustitución con la calculadora

1. Con la calculadora, usa el método de Sustitución para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que ella muestra como resultado al usar sus comandos).



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| El método de Sustitución consiste en: | Qué introduces en la calculadora | Qué muestra la calculadora como resultado |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables de alguna de las ecuaciones; | Solve(*x+3y = 5*, *x*) | *x=5 - 3y* |
| 2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, crear una ecuación con una sola variable; | *7x+6y=20* **|** *x=5 - 3y* | *35 - 15y=20* |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2; | Solve(*35 - 15y=20*, *y*) | *y=1* |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | *x=5 - 3y* **|** *y=1* | *x=2* |

1. ¿Cómo verificas con la calculadora que tu solución es correcta?

|  |
| --- |
| Se puede utilizar una estrategia semejante a la descrita en la pregunta 2 de la parte IIIB. |

1. ¿Cuál de los dos métodos (IGUALACIÓN y SUSTITUCIÓN) prefieres y por qué?

|  |
| --- |
|  |

1. ¿Qué tienen en común esos dos métodos? (No re-escribas sólo los pasos de los dos métodos).

|  |
| --- |
| El funcionamiento de los dos métodos obedece a una misma lógica; estos métodos tienen un objetivo común: reducir un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una sola incógnita, que ya se puede resolver fácilmente. Se determina así el valor de una de las incógnitas. El valor de la otra incógnita puede en seguida ser determinado haciendo una sustitución en alguna de las dos ecuaciones (que son equivalentes). |

# **Discusión en el salón de clases de la Parte IIIC**

### Tarea

Con la calculadora, usa el método más apropiado (Igualación o Sustitución) para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(1) 

(2) 

(1) Se puede considerar que el Método de Igualación es el más apropiado para resolver el primer sistema (¿por qué?):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| El método de igualación consiste en: | Comando introducido en la calculadora | Resultado mostrado por la calculadora |
| 1. Despejar la misma incógnita en cada una de las ecuaciones; se forma así dos expresiones con una sola incógnita común. | Solve(*y + 1 = x + 6, y*)  Solve(*y – 4 = -x + 3, y*) | *y=x+5*  *y=-x+7* |
| 2 & 3. Igualar las dos expresiones obtenidas en la etapa 1; de este modo se obtiene una ecuación con una incógnita; se resuelve esta ecuación. | Solve(x+5=-x+7, x) | *x=1* |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema para calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución. | *y=x+5* **|** *x*=1 | *y=6* |

Para verificar que la pareja (1, 6) es solución del primer sistema, se puede sustituir estos valores en cada una de las ecuaciones; de esa forma se verifica que la pareja satisface las dos ecuaciones del sistema.

Si se sustituye en la primera ecuación *y + 1 = x + 6*, se obtiene 6+1=7 para el miembro de la izquierda y 1+6=7 para el miembro de la derecha. La pareja satisface por tanto la primera ecuación.

Si se sustituye en la segunda ecuación *y – 4 = -x + 3*, se obtiene 6-4=2 para el miembro de la izquierda y –1+3=2 para el miembro de la derecha. La misma pareja de valores satisface por tanto la segunda ecuación.

Se ha por tanto verificado que (1, 6) es solución de este sistema de ecuaciones.

(2) Se puede considerar que el Método de Sustitución es el más apropiado para resolver el segundo sistema de ecuaciones (¿por qué?):



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| El Método de Sustitución consiste en: | Comando introducido en la calculadora | Resultado mostrado por la calculadora |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las incógnitas en alguna de las dos ecuaciones. | Solve(*3x + y = 23, y*) | *y=23 - 3x* |
| 2. Sustituir la expresión obtenida en la etapa 1 para la incógnita apropiada en la otra ecuación; de esa forma se crea una ecuación con una sola incógnita. | *2x + 3y = 48* **|** *y=23 - 3x* | *69 - 7x=48* |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en la etapa 2. | Solve(*69 - 7x=48, x*) | *x=3* |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema para calcular el valor de la otra incógnita, y hallar la pareja solución. | *y=23 - 3x* **|** *x=3* | *y=14* |

Se verifica que la pareja (3, 14) es solución de este segundo sistema, utilizando la misma estrategia que la descrita en la pregunta precedente:

Haciendo las sustituciones apropiadas en el miembro de la izquierda de la primara ecuación

*3x + y = 23,* se obtiene 3(3)+14=23, que es igual al miembro de la derecha de le ecuación.

De igual modo, haciendo las sustituciones apropiadas en el miembro izquierdo de la segunda ecuación *2x + 3y = 48*, se obtiene 2(3)+3(14)=6+42=48, que es igual al miembro de la derecha de la ecuación.

Por tanto, la pareja (3, 14) es solución de este segundo sistema de ecuaciones.