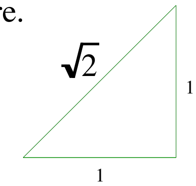
Qu'advient-il de la notion intuitive de mesure après le secondaire ?

André Boileau, Section didactique
Département de mathématiques, UQAM

Résumé. *Au primaire et au secondaire, on étudie la mesure de quelques courbes, surfaces et volumes. Par la suite, au collégial et à l'université, on passe à diverses intégrales (dont celles de Riemann et de Lebesgue) puis à la théorie générale de la mesure. Mais chemin faisant, on perd de vue certains problèmes de la théorie « intuitive » de la mesure. Dans cet atelier non technique, nous aborderons quelques-uns de ces problèmes, dont les solutions sont parfois surprenantes.*

L'œuf ou la poule ?

À tous les ordres d'enseignement, quand on mesure (que ce soit une grandeur quelconque - longueur, surface, solide, etc. - ou un objet abstrait dans un cadre axiomatique), on suppose toujours disposer à priori des nombres qui vont servir à effectuer cette mesure.



Ainsi, par exemple, au moment de mesurer la diagonale d'un carré unité, on suppose déjà connu l'irrationnel $\sqrt{2}$.

De même à l'université, dans les cours de « Théorie de la mesure », on présuppose disposer des nombres réels, puisqu'une mesure est alors définie comme une fonction $\mathcal{E} \xrightarrow{\mu} \overline{\mathbb{R}}$ (où $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des réels « complété » par l'ajout d'éléments « $+\infty$ » et « $-\infty$ ») vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathcal{E}$ est un anneau ou un σ-anneau de sous-ensembles d'un ensemble donné
- $\mu(A) \geq 0$ et $\mu(\emptyset)=0$
- μ est finiment additive (additive) ou dénombrablement additive (σ-additive)

(voir, par exemple, Halmos [1950] page 30).

Cependant, si on regarde les choses dans une perspective historique, on constate que l'on a commencé à vouloir mesurer bien avant de disposer de tous les nombres nécessaires. On peut même affirmer sans trop se tromper que l'homme a utilisé les naturels pour compter, et que tous les autres nombres positifs (décimaux, rationnels et réels) ont été « inventés » pour mesurer. On peut imaginer que le tout s'est passé à peu près comme ceci :

- Au départ, on a voulu utiliser les nombres naturels pour mesurer les longueurs (et diverses autres grandeurs) : la mesure se résumait alors au simple dénombrement des unités utilisées pour recouvrir la grandeur à mesurer.
- On s'est vite rendu compte que, de cette façon, on n'arrivait pas à mesurer toutes les grandeurs, même de façon très approximative : on a alors fait appel à des sous-unités de mesure (ce qui équivaut à utiliser des nombres rationnels positifs) pour effectuer les mesures.
- Ce n'est qu'avec le développement des mathématiques déductives qu'on s'est rendu compte que les nombres rationnels ne suffisaient pas à mesurer (de façon exacte) des longueurs simples comme celle de la diagonale d'un carré unité ou la circonférence d'un cercle : ce fut le « scandale des irrationnels ». La création et la clarification des nombres nécessaires pour mesurer toutes les longueurs, les nombres réels, s'est étalée par la suite sur plusieurs siècles.

D'un point de vue pédagogique, on peut regretter de présenter les nombres réels dans des contextes souvent artificiels et très éloignés de la problématique de la mesure, qui fut à la source même de leur création. Ainsi, quand on affirme qu'ils sont nécessaires pour pouvoir résoudre certaines équations (telle $x^2=2$), on ne pose jamais la question « mais pourquoi ces équations devraient-elles avoir des solutions ? » (et aussi : « pourquoi on rejette les solutions d'autres équations, comme $x^2=-1$ et $0x=1$? »), mais surtout on ne dit jamais qu'on n'obtient ainsi que les nombres algébriques. Ou encore, quand on identifie (correctement) les nombres réels aux nombres à virgules illimités (vers la droite), on passe sous silence des questions importantes, comme « pourquoi considérer de telles suites illimitées ? » ou « pourquoi ne pas considérer aussi des nombres à virgule illimités à gauche ? ». On donne ainsi une image des mathématiques comme une science très « superficielle ». Il est beaucoup plus intéressant de voir les réels comme associés aux points d'une droite (dite numérique), car la filiation avec la mesure des longueurs n'est pas loin : en valeur absolue, le réel associé au point P est la mesure du segment $\overline{OP}$, où O est l'origine.

D'un point de vue logique, on peut décider que la « mesure » (sous la forme d'une arithmétique des grandeurs) précède le nombre (c'est l'approche privilégiée en géométrie euclidienne synthétique), ou au contraire que le nombre précède la mesure (par exemple, en définissant le nombre de façon purement ensembliste, à l'aide des coupures de Dedekind ou des suites de Cauchy de nombres rationnels). Pour employer un langage métaphorique, on obtient ainsi deux cosmologies, une où la poule précède l'œuf, et une autre ou l'œuf précède la poule...

Il est très intéressant de constater que les nombres réels, qui ont été créés « sur mesure » pour mesurer des longueurs, s'avèrent tout aussi efficaces pour mesurer les autres grandeurs (surfaces, solides, angles, temps, masses, etc.). Si l'on voulait aller au fond des choses, on pourrait faire une théorie des grandeurs (additives, indéfiniment divisibles, etc.), décrire une façon uniforme de leur associer une mesure, et constater qu'en dépit de variantes liées au type de grandeur considéré, on a finalement recours au même type de nombres, les réels. Le lecteur intéressé pourra consulter à ce sujet Lebesgue [1975] et Rouche [1992].

Diverses approches de la mesure

Dans la section précédente, nous avons décrit une mesure comme une fonction vérifiant certaines propriétés. On peut donc imaginer vouloir définir explicitement de telles fonctions, puis vérifier ensuite qu'elles possèdent bien les propriétés requises. Dans Lebesgue [1975] par exemple, on suit une telle démarche dans le plan et dans l'espace. Bien qu'élémentaire par certains aspects, cette construction est trop délicate pour être abordée en détail à un niveau pré-universitaire[1]. Dans les ouvrages plus avancés de théorie de la mesure (voir, par exemple, Halmos [1950]), on retrouve même des mesures construites à partir d'autres mesures (complétion de mesures, produit de mesures, etc.).

À un niveau pré-universitaire, on utilise plutôt une approche axiomatique (implicite ou explicite), qui a le mérite d'être plus simple. Dans ce contexte, on admet au départ l'existence d'une fonction d'aire dotée de certaines propriétés (positivité, additivité, invariance sous les isométries, etc.) et l'on établit certaines propriétés supplémentaires (par exemple : des

[1] On peut se demander si on ne pourrait pas utiliser l'intégrale définie (décrite au niveau collégial) pour définir une fonction d'aire. Une telle démarche présenterait cependant des difficultés très importantes (à ce sujet, voir Boileau et Garançon [2001]).

formules d'aires ou de volumes de certaines figures). À un niveau élémentaire, on admet un axiome d'additivité finie, que l'on peut formuler de la manière suivante

$$\mu\,(A \cup B) \;=\; \mu\,(A) + \mu\,(B) \quad \text{si les ensembles } A \text{ et } B \text{ sont disjoints}$$

alors qu'à un niveau plus avancé, on postule plutôt l'additivité dénombrable :

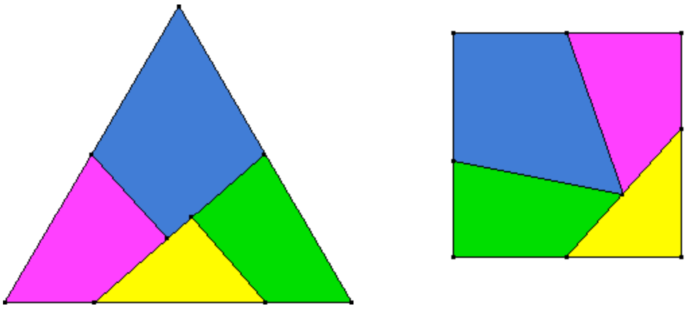
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{si les ensembles } A_i \text{ sont deux à deux disjoints}$$

Nous verrons dans la section suivante que ce choix a des conséquences importantes.

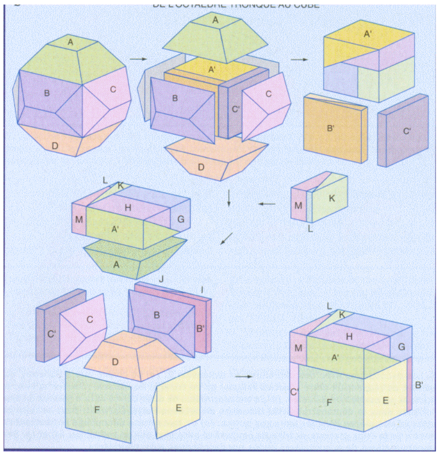
En dernier lieu, on peut se demander si, dans le cas de figures simples, on ne pourrait pas définir l'aire et le volume comme suit :

> Deux polygones (polyèdres) ont la même aire (le même volume) si et seulement si on peut découper le premier en un nombre fini de morceaux et rassembler ceux-ci de façon à obtenir le second.

On voit ici qu'on a pu découper un triangle équilatéral de façon à obtenir un carré. Ces figures ont donc même aire.



De même, ci-contre, le polyèdre initial et le cube final ont même volume.



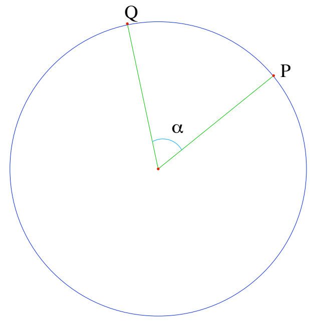
(Image tirée de Delahaye [1999])

On voit aisément que l'implication « si » découle des propriétés d'additivité et d'invariance sous les isométries. L'implication dans l'autre direction semble plus délicate : en fait, on verra plus tard qu'elle n'est pas toujours vérifiée.

Peut-on toujours mesurer ?

Aux ordres primaire et secondaire, on se limite à mesurer l'aire de certains polygones, la seule exception étant le cercle. Puis, au collégial, l'intégrale de Riemann nous permet de mesurer les aires comprises entre certaines courbes. À l'université, la mesure de Lebesgue nous permet d'étendre encore le domaine des ensembles mesurables dans le plan. Une démarche semblable est suivie pour la mesure des volumes.

La mesure de Lebesgue (que ce soit sur la droite, dans le plan ou dans l'espace) vérifie deux propriétés très utiles en analyse : l'additivité dénombrable et l'invariance sous les isométries. Or nous allons voir que toute mesure dotée de ces deux propriétés ne permet pas de mesurer tous les sous-ensembles bornés de la droite. En d'autres mots, nous allons voir qu'il existe un sous-ensemble borné X de la droite auquel on ne peut associer de mesure. Par la suite, il serait facile de voir que X×[0,1] est un sous-ensemble non mesurable du plan et que X×[0,1]×[0,1] est un sous-ensemble non mesurable de l'espace.



En fait nous allons plutôt construire X comme un sous-ensemble d'un cercle : pour obtenir le sous-ensemble de la droite voulu, il suffirait de le « déplier » sur la droite. On commence par définir une relation ~ sur les points de la circonférence d'un cercle fixé comme suit :

P ~ Q ssi Q est l'image de P par une rotation d'angle rationnel (en degrés) α.

On voit aisément que ~ est une relation d'équivalence. Soit X un ensemble obtenu en choisissant un point (et un seul) dans chacune des classes d'équivalence modulo ~. Soit X_r l'image de X par une rotation d'angle r (rationnel, en degrés). Tous les X_r étant isométriques, ils devraient avoir la même mesure m (si elle existe). De plus, ces ensembles sont deux à deux disjoints (si on se limite à des angles rationnels r dans l'intervalle [0,360[ ) et couvrent tout le cercle. Enfin, si la mesure m de ces ensembles X_r existait, on aurait (par additivité dénombrable)

$$\mu(circonférence) = \mu\left(\bigcup_r X_r\right) = \sum_r \mu(X_r) = \sum_r \mathrm{m} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathrm{m} = 0 \\ \infty \text{ si } \mathrm{m} \neq 0 \end{cases}$$

ce qui est contradictoire.

Si on se contente de l'additivité finie, on peut montrer (en utilisant l'axiome du choix - voir Wagon [1985]) qu'on peut étendre la mesure de Lebesgue à tous les sous-ensembles bornés de la droite ou du plan. Dans l'espace, la situation est tout à fait différente : il n'existe pas de mesure finiment additive et invariante sous les isométries qui soit définie pour tous les sous-ensembles bornés de l'espace. En d'autres mots : dans l'espace, il existera toujours des ensembles non mesurables. Ce résultat découle aisément du paradoxe de Banach-Tarski, que l'on peut énoncer intuitivement comme suit :

> Il est possible de « diviser » une sphère quelconque en un nombre fini de morceaux, et de rassembler ensuite ces morceaux de façon à obtenir tout solide borné contenant une (autre) sphère (si petite soit-elle).
> En particulier, on peut transformer de la sorte une sphère en deux sphères identiques ; on peut aussi transformer une sphère de la dimension d'une balle de golf en une sphère de la dimension du soleil.

Pour un traitement exhaustif de ce surprenant paradoxe, le lecteur intéressé pourra consulter Wagon [1985].

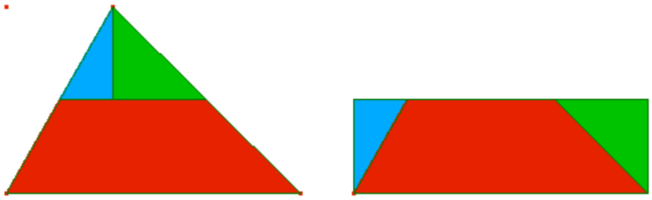
Mesure et découpage, dans le plan et dans l'espace

Les découpages du paradoxe de Banach-Tarski font nécessairement appel à des pièces très exotiques (elles sont non mesurables en général), qu'on ne peut pas décrire explicitement, et dont l'existence n'est confirmée que par des recours à l'axiome du choix. Mais que se passe-t-il si on se limite à des découpages plus raisonnables, obtenus soit via des « coups de ciseaux » (selon des droites), dans le plan, soit via des « coups de sabre » (selon des plans), dans l'espace ?

Dans le plan, tout se passe bien pour les polygones : si deux polygones ont la même aire, on peut découper l'un et rassembler les morceaux de façon à reconstituer l'autre. En fait, nous allons voir comment décomposer un polygone quelconque en un carré de même aire. Et comme cette décomposition est réversible, ceci nous permettra de décomposer un polygone en tout autre polygone de même aire.

Voici donc une façon de découper un polygone quelconque pour former un carré de même aire :

- On décompose le polygone en triangles.
- On décompose les triangles en rectangles.

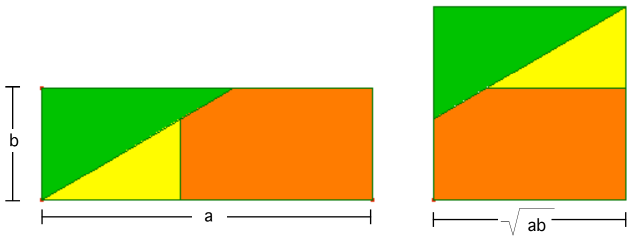


Notez que la base choisie est le côté le plus long.

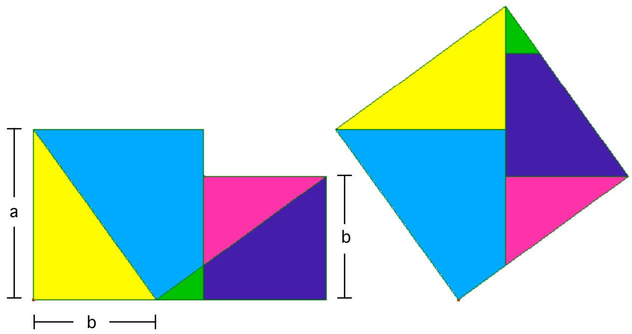
- Chaque rectangle se décompose (en un certain nombre d'étapes) en un rectangle tel que le rapport de son plus grand à son plus petit côté est inférieur à 4.

$$\text{longueur} < 4^{n}\ \text{largeur} \rightarrow \text{longueur} < 4^{n-1}\ \text{largeur}$$

- Chacun de ces rectangles (voir ci-dessus) se décompose en un carré.
Question :pourquoi la construction ne fonctionne-t-elle pas si le rapport du plus grand côté au plus petit côté est supérieur à 4 ?



- On peut décomposer deux carrés (ou plus, en itérant) pour n'en former qu'un seul.

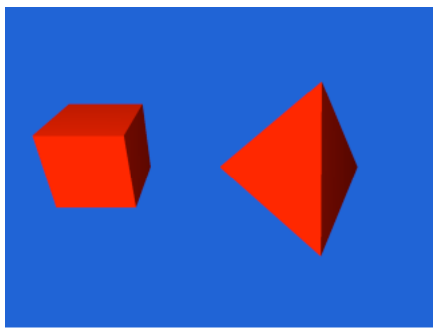


Dans l'espace, la situation n'est pas aussi simple : on peut montrer qu'on ne peut même pas découper un tétraèdre régulier pour former un cube. L'idée de la preuve est la suivante : on peut associer à tout polyèdre P un nombre f(P) (défini en fonction des longueurs de ses arêtes et des mesures de ses angles dièdres) de telle sorte que, si P se décompose en morceaux $P_1, \ldots, P_n$, alors on a

$$f(P) = f(P_1)+\ldots+f(P_n).$$

On montre ensuite que :

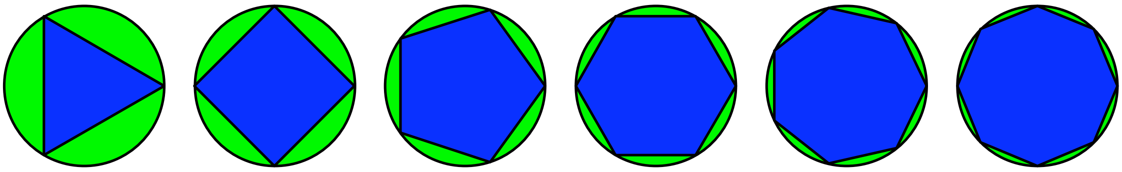
$$f(\text{cube}) \neq f(\text{tétraèdre régulier de même volume}).$$



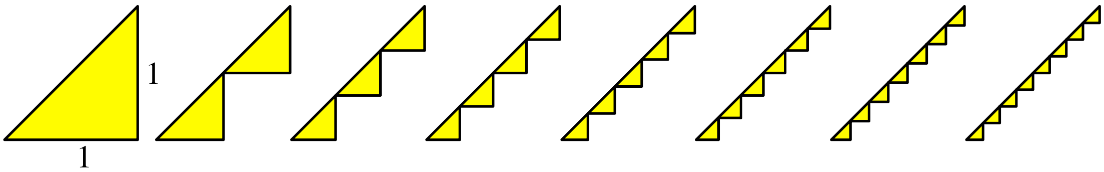
Donc, pour déterminer le volume de solides aussi simples que des tétraèdres, on devra faire appel à des processus, comme le principe de Cavalieri ou des approximations successives de plus en plus fines, suivi d'un passage obligé à la limite.

La mesure de grandeurs « gauches »

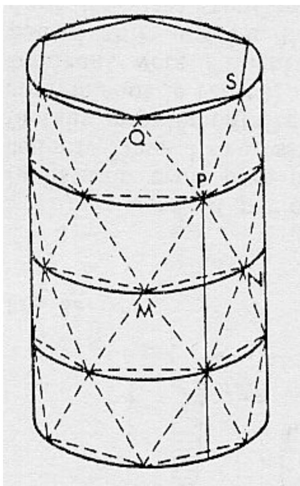
Pour déterminer la longueur d'une courbe (dans le plan ou dans l'espace), on approche la courbe par des chemins polygonaux de plus en plus « fins » et tels que chaque extrémité des segments constituants est sur la courbe ; puis on prend la limite des longueurs de ces chemins. L'exemple le plus connu est le calcul de la circonférence du cercle utilisant comme chemins polygonaux des polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés croît sans limite.



Toutes les spécifications ci-dessus sont importantes. Par exemple, si on accepte que certaines extrémités de segments des chemins polygonaux tombent hors de la courbe, on obtient des contradictions, comme dans l'exemple ci-dessous, qui « montre » que $\sqrt{2} = 1 + 1 = 2$.



Pour déterminer l'aire d'une surface plongée dans l'espace, l'idée la plus naturelle est de faire une adaptation naturelle de la définition ci-dessus : on approche la surface par des surfaces « triangulées » de plus en plus « fines » et telles que chaque sommet des triangles constituants est sur la surface ; puis on prend la limite des aires de ces surfaces triangulées.



Contre toute attente, la définition ci-dessus est prise en défaut pour des surfaces aussi simples que les cylindres : c'est le paradoxe de Schwarz. Selon les divers choix de surfaces triangulées, on obtient des résultats variant de l'aire véritable du cylindre à des valeurs infinies, en passant par toutes les valeurs intermédiaires

La figure ci-contre, tirée de Doubnov [1974], illustre une façon d'approximer une surface cylindrique en découpant celle-ci en n tranches de même épaisseur et en inscrivant des m-gones réguliers décalés successifs pour servir de base à diverses triangulations. On montre dans ce cas que l'aire d'une telle surface triangulée est de

$$S_{m,n} = 2\pi R\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\frac{\pi}{m}}\right)\sqrt{H^2 + \left(\frac{1}{4}\pi^4 R^2\right)\left(\frac{n^2}{m^4}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{\left(\frac{\pi}{2m}\right)}\right)^4}$$

En utilisant que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, le lecteur est invité à démontrer que, selon la relation existant entre m et n, les approximations tendront vers la valeur correcte de l'aire (quand n = m), toute autre valeur supérieure à $2\pi RH$ (quand $n = \gamma m^2$), ou même vers l'infini (quand $n = m^3$).

Comment expliquer un résultat si paradoxal ? Remarquons tout d'abord que, si le nombre de tranches reste fixe et que le nombre de côtés des polygones réguliers augmente, les triangles résultants auront tendance à se rapprocher de la surface du cylindre et tendre vers des surfaces tangentes, ce qui donnera une bonne approximation de l'aire. Mais si au contraire on laisse fixe le nombre de côtés des polygones et que le nombre de tranches augmente, les triangles résultant tendront à devenir perpendiculaires à la surface du cylindre) un peu comme un accordéon que l'on compresse), ce qui ne donnera pas une bonne approximation de l'aire. Quand ces deux paramètres varient tous les deux simultanément, il faut voir (un peu comme dans l'exercice précédent) lequel sera le plus déterminant.

Intuitivement, pour calculer les aires de surfaces gauches, on voudrait que les surfaces polygonales servant à approximer ces surfaces le fassent de façon à rester presque tangentes à celle-ci. Mais ceci ne se fait pas automatiquement, contrairement à ce qui se passait pour les longueurs de courbes ou pour les aires de surfaces planes. C'est la raison pour laquelle la définition de l'aire des surfaces gauches donnée dans les cours de calcul différentiel à plusieurs variables fait appel directement à des approximations tangentes :

Si $(x,y,z) = S(u,v)$ est une surface paramétrique (où (u,v) varie dans une région R), alors on définit l'aire de la surface comme l'intégrale suivante

$$\int_R \left| \frac{\partial S(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial S(u,v)}{\partial v} \right| d(u,v).$$

En guise de conclusion

Je suis conscient que je n'ai fait qu'effleurer le sujet. On pourrait encore parler de découpages selon des (lignes ou surfaces) courbes, chercher à minimiser le nombre de pièces nécessaires, se demander s'il est possible de déterminer l'aire de surfaces gauches ne possédant pas de plans tangents en tout point, etc. Le lecteur intéressé à poursuivre cette démarche pourra consulter avec profit la bibliographie ci-dessous.

Bibliographie

- Boileau, A. et Garançon, M., *L'enseignement de la notion d'aire au Québec : un cheminement ponctué de troublantes discontinuités*, Actes du Congrès de l'AMQ, Longueuil, octobre 2001.
- Boltyanskii, V.G., *Equivalent and Equidecomposable Figures*, D.C.Heath, 1963.
- Delahaye, Jean-Paul, *Les découpages artistiques*, Pour la Science, mars 1999.
- Doubnov, I., *Erreurs dans les démonstrations géométriques*, Ed. de Moscou, 1974.
- Halmos, Paul R., *Measure Theory*, Van Nostrand Reinhold, 1950.
- Lebesgue, Henri, *La mesure des grandeurs*, Blanchard, 1975.
- Rouche, Nicolas, *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, 1992.
- Wagon, Stanley, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.