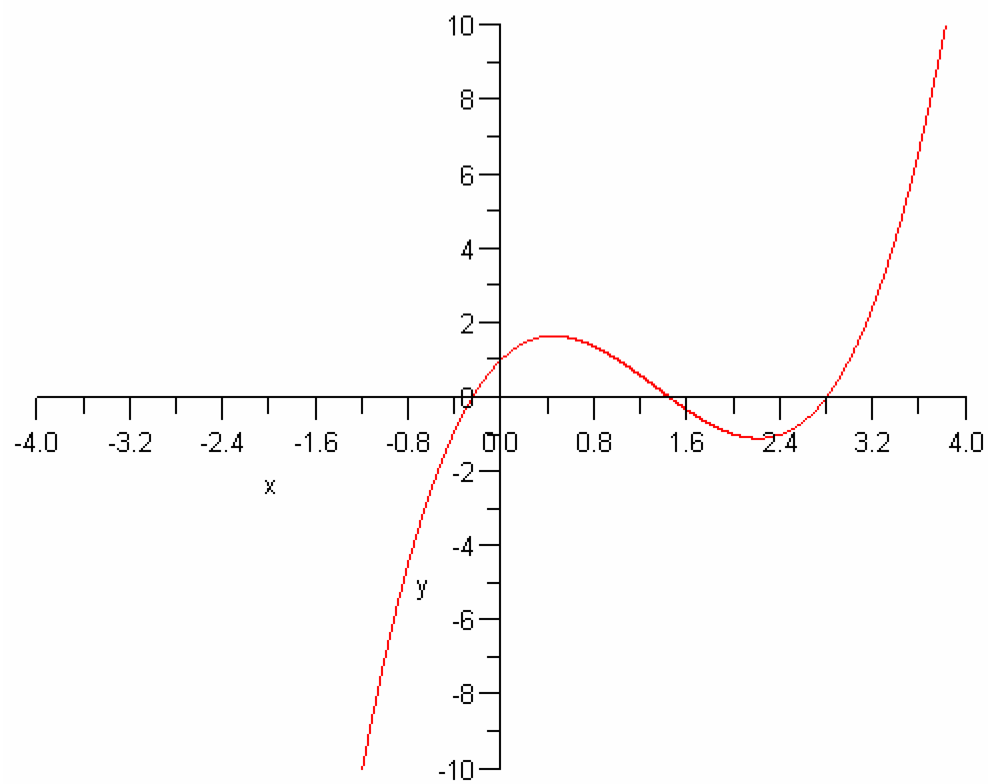
ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNOMIALES AVEC LES MAPLETS DANS MAPLE 10



Guide de l'utilisateur

Par Simon Laurent

TABLE DES MATIÈRES

CONFIGURATION MINIMALE DEMANDÉE p. 3

PRÉSENTATION DU PROGRAMME p. 3

LANCER LE PROGRAMME p. 4

CHOISIR L'ÉQUATION D'UNE FONCTION ET TRACER LE GRAPHIQUE p. 5

RÉCUPÉRER LES INFORMATIONS RELATIVES À L'ÉTUDE DE LA FONCTION p. 6

QUITTER p. 6

L'ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 0 À 3 p. 7

CONFIGURATION MINIMALE DEMANDÉE

L'usager qui désire utiliser le programme doit avoir une installation de Maple 10 dûment complétée et fonctionnelle. La configuration matérielle minimale est donc essentiellement la même que celle de Maple. Je recommande néanmoins une résolution d'au moins 1024x768. Pour rendre compatible le programme avec des résolutions moindres, l'usager devra se référer au guide du concepteur.

Le programme, tout comme Maple 10, fonctionne aussi bien sous Windows XP que sous Mac OS 10. Enfin, je recommande de mettre à jour Maple 10 lorsque cela est possible. L'utilisateur peut trouver la dernière version disponible à l'adresse suivante :

http://www.maplesoft.com/support/downloads/

PRÉSENTATION DU PROGRAMME

L'étude complète d'une fonction est réalisée pour la première fois en quatrième secondaire, avec l'étude de la fonction quadratique. C'est un exercice long mais passionnant, qui fait intervenir toute sorte de notions mathématiques. Au cégep, avec l'apprentissage du calcul différentiel et intégral, l'étude des fonctions, en particulier l'étude de fonctions polynomiales, est d'autant plus intéressante que l'on se dote d'outils extrêmement utiles à la rédaction de cette étude. La méthode de Newton par exemple, permet à l'étudiant de trouver une approximation des zéros de diverses fonctions complexes, sans trop de peine. Du coup, cela élargit le domaine de fonctions polynomiales à étudier aux degrés 3, 4 ou même plus.

D'autre part, l'utilisation de logiciels surpuissants et dont l'interface nécessite parfois plusieurs heures d'apprentissage (comme Maple) peut amener l'étudiant à rejeter l'apport de ce genre de programme dans son apprentissage (ou son simple loisir).

Le programme que je propose utilise les Maplets. Il présente à l'utilisateur de Maple une <u>interface graphique conviviale</u>. Le programme permet à l'utilisateur de tracer la fonction étudiée puis, en quelques clics, d'en extirper les zéros, les extremums, les intervalles de croissance et les intervalles de signe.

LANCER LE PROGRAMME

1. Ouvrir Maple 10.

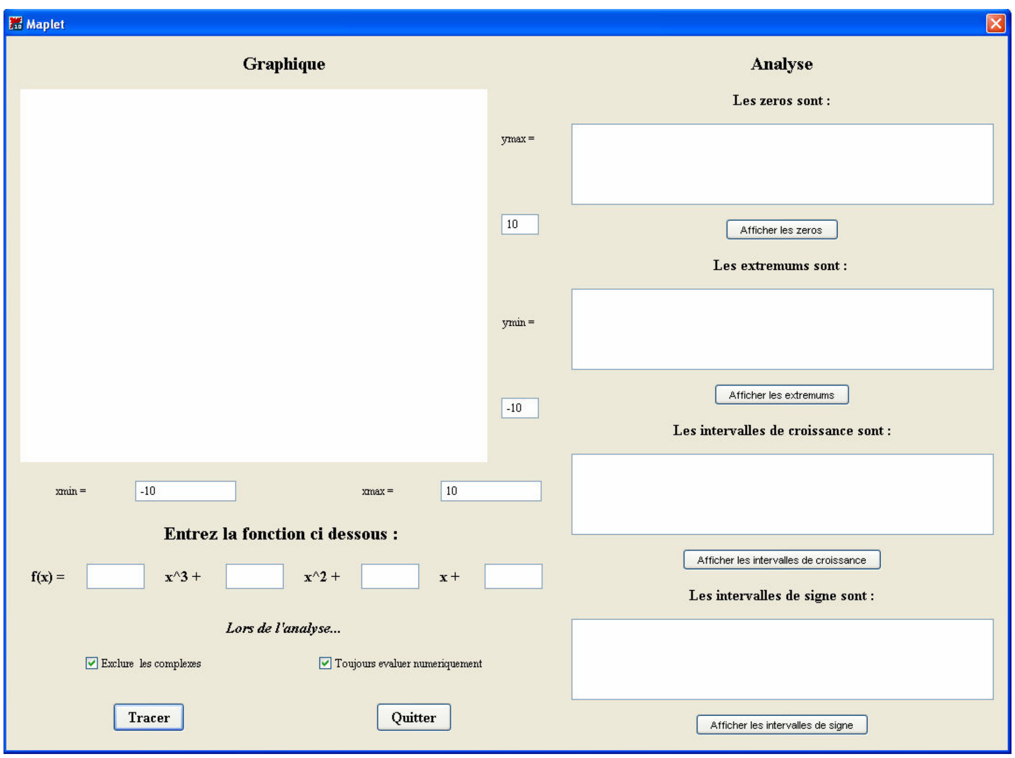
2. Du menu « File », sélectionner « Open… » (ouvrir une feuille de travail)

3. Sélectionner ensuite le fichier **Fonction.mw**

4. Du menu « Edit », sélectionner « Execute ►» puis « Worksheet ». Vous pouvez également appuyer sur le bouton dans la barre d'outils.

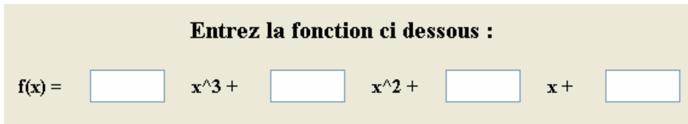
Tout le programme est contenu dans la feuille de travail Maple **Fonction.mw**. Un utilisateur plus aguerri observera que le début de la feuille est composé de différentes procédures suivies d'un gros bloc d'exécution incluant la bibliothèque « Maplets[Elements] ». C'est dans ce dernier bloc d'exécution que l'on retrouve le code de l'interface graphique.

Comme il y a plusieurs procédures à exécuter, l'opération peut prendre plusieurs secondes. Une fois complétée, l'utilisateur se retrouve face à la fenêtre principale du programme :



CHOISIR L'ÉQUATION D'UNE FONCTION ET TRACER LE GRAPHIQUE

C'est très simple. L'utilisateur n'a qu'à écrire les paramètres de la fonction polynomiale qu'il veut étudier dans les champs réservés à cet effet :



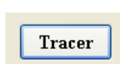
Si l'utilisateur veut étudier une fonction dont l'un des paramètres est nul, il doit entrer le nombre 0 dans le champ de saisi de ce paramètre, sans quoi il obtiendra un message d'erreur. C'est notamment le cas si l'utilisateur veut étudier une fonction de degré 2 ou moindre : il devra entrer, par exemple : $0x^3 - 4x^2 + 3x - 10$

Lorsque la fonction est entrée, l'utilisateur voudra probablement la faire afficher dans la zone graphique. C'est par ailleurs un des avantages de la programmation sous Maple : les graphes sont précis et beaux.

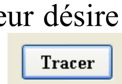
L'utilisateur peut entrer les paramètres d'affichage dans les champs de saisi réservés à cet effet :

Paramètres de la fenêtre pour l'axe des *x*

Paramètres de la fenêtre pour l'axe des y

En appuyant sur le bouton 

, l'utilisateur trace la fonction dans la zone graphique prévue à cet effet. Le graphe produit par Maple calcule 5000 points, ce qui assure une belle courbe précise.

Si l'utilisateur désire changer les paramètres de la fenêtre d'affichage, il doit par la suite appuyer sur 

à nouveau afin de mettre à jour le graphique.

RÉCUPÉRER LES INFORMATIONS RELATIVES À L'ÉTUDE DE LA FONCTION

Encore une fois, récupérer les informations permettant de faire l'étude de la fonction est une procédure aussi simple que quelques clics de bouton.

La partie de droite du programme est divisée en quatre parties comprenant chacune un bouton et un champ d'affichage.

Pour faire afficher les zéros de la fonction, il suffit d'appuyer sur Afficher les zeros. Les zéros apparaissent dans le champ d'affichage dédié.

Pour faire afficher les extremums de la fonction, il suffit d'appuyer sur Afficher les extremums. Les extremums apparaissent dans le champ d'affichage dédié. Le programme informe l'utilisateur si les extremums sont en réalité des minimums ou des maximums.

Pour faire afficher les intervalles de croissance, il suffit d'appuyer sur Afficher les intervalles de croissance. Les intervalles de croissance apparaissent dans le champ d'affichage dédié. Le programme affiche d'abord le ou les intervalles à l'intérieur desquels la fonction croit puis le ou les intervalles à l'intérieur desquels la fonction décroit.

Enfin, pour faire afficher les intervalles de signe, il suffit d'appuyer sur Afficher les intervalles de signe. Les intervalles de signe apparaissent dans le champ d'affichage dédié. Le programme affiche d'abord le ou les intervalles à l'intérieur desquels la fonction est positive puis le ou les intervalles à l'intérieur desquels la fonction est négative.

Lors de l'analyse...

Sous cette section, l'utilisateur a également le loisir de cocher ou non deux cases.

La première case inclus ou non les nombres complexes dans les solutions. Les nombres complexes peuvent apparaitre lorsqu'on étudie les zéros des fonctions polynomiales de degré 2 ou 3. On peut choisir de les écarter et de ne s'intéresser qu'aux solutions réelles.

La deuxième case permet à l'utilisateur de forcer une évaluation numérique du nombre. Dans tous les cas (sauf pour les zéros et les intervalles de signe d'une fonction du troisième degré), les solutions calculées sont exactes. Cocher cette case force Maple à évaluer numériquement la solution, par exemple $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ devient $1{,}366025404$. Cela donne parfois une meilleure estimation du nombre.

QUITTER

Pour quitter, l'utilisateur n'a qu'à appuyer sur le bouton Quitter.

L'ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 0 À 3

Solution générale d'une fonction polynomiale du troisième degré

* Bien que ce soient deux objets mathématiques différents, il est possible que polynôme et fonction polynomiale soient utilisés sans discrimination dans ce texte.

Forme générale :
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

En divisant par a :
$x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ où $b' = \dfrac{b}{a}$, $c' = \dfrac{c}{a}$, $d' = \dfrac{d}{a}$

Nous effectuons un changement de variable qui nous permettra, dans quelques étapes, d'éliminer le terme en x^2 : $x = y - \alpha$

Nous déterminerons la valeur de α qui nous convient un peu plus tard.

$$(y-\alpha)^3 + b'(y-\alpha)^2 + c'(y-\alpha) + d' = 0$$
$$\left(y^3 - 3y^2\alpha + 3y\alpha^2 - \alpha^3\right) + b'\left(y^2 - 2\alpha y + \alpha^2\right) + c'(y-\alpha) + d' = 0$$
$$y^3 - 3y^2\alpha + 3y\alpha^2 - \alpha^3 + b'y^2 - 2b'\alpha y + b'\alpha^2 + c'y - c'\alpha + d' = 0$$
$$y^3 - 3y^2\alpha + b'y^2 + 3y\alpha^2 - 2b'\alpha y + c'y + b'\alpha^2 - c'\alpha - \alpha^3 + d' = 0$$
$$y^3 + (b' - 3\alpha)y^2 + \left(3\alpha^2 - 2b'\alpha + c'\right)y + b'\alpha^2 - c'\alpha - \alpha^3 + d' = 0$$

Nous allons choisir α tel que $b' - 3\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \dfrac{b'}{3}$

En remplaçant α par la valeur choisie, on obtient :

$$y^3 + \left(b' - 3\left(\frac{b'}{3}\right)\right)y^2 + \left(3\left(\frac{b'}{3}\right)^2 - 2b'\left(\frac{b'}{3}\right) + c'\right)y + b'\left(\frac{b'}{3}\right)^2 - c'\left(\frac{b'}{3}\right) - \left(\frac{b'}{3}\right)^3 + d' = 0$$
$$y^3 + \left(\frac{b'^2}{3} - \frac{2b'^2}{3} + c'\right)y + \frac{b'^3}{9} - \frac{c'b'}{3} - \frac{b'^3}{27} + d' = 0$$

Après simplifications :
$$y^3 + \left(c' - \frac{b'^2}{3}\right)y + \frac{2b'^3}{27} - \frac{c'b'}{3} + d' = 0$$

En réécrivant, on a :
$y^3 + py + q = 0$ où $p = c' - \dfrac{b'^2}{3}$ et $q = \dfrac{2b'^3}{27} - \dfrac{c'b'}{3} + d'$

Nous allons maintenant effectuer un deuxième changement de variable, qui nous permettra, en quelque sorte, d'éliminer le terme en y

Soit $y = u + v$

$y^3 + py + q = 0$

$\left(u+v\right)^3 + p\left(u+v\right) + q = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 + p\left(u+v\right) + q = 0$

$u^3 + v^3 + 3uv\left(u+v\right) + p\left(u+v\right) + q = 0$

$u^3 + v^3 + \left(3uv + p\right)\left(u+v\right) + q = 0$

On choisit u et v tels que : $3uv + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad uv = \dfrac{-p}{3} \quad \Leftrightarrow \quad u^3v^3 = \dfrac{-p^3}{27}$

Avec de tels u et v on a également : $u^3 + v^3 + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^3 + v^3 = -q$

En connaissant la somme et le produit de deux nombres, je peux les trouver à l'aide d'une équation du deuxième degré, ce que je fais maintenant :

$u^3v^3 = \dfrac{-p^3}{27}$ (1)

$u^3 + v^3 = -q$ (2)

$u^3 = -q - v^3$

En remplaçant u^3 dans (1) :

$\left(-q - v^3\right)v^3 = \dfrac{-p^3}{27}$

$-qv^3 - \left(v^3\right)^2 = \dfrac{-p^3}{27}$

En réécrivant, on obtient bel et bien une équation du deuxième degré en v^3 :

$\left(v^3\right)^2 + qv^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0$

Par ailleurs, on a :

$v^3 = -q - u^3$

$\left(-q - u^3\right)u^3 = \dfrac{-p^3}{27}$

$\left(u^3\right)^2 + qu^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0$

Les racines seront donc :

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{-p^3}{27} \right)}}{2 \cdot 1} \text{ et } v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{-p^3}{27} \right)}}{2 \cdot 1}$$

En réécrivant on obtient :

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)}}{2} \text{ et } v^3 = \frac{-q}{2} - \frac{\sqrt{4 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)}}{2}.$$

et finalement :

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} \text{ et } v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3}$$

En prenant la racine cubique de chaque côté :

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3}} \text{ et } v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3}}$$

Mais comme $y = u + v$, on aura :

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3}}$$

Avant de continuer, observons ceci :

Par le théorème fondamental de l'algèbre, on sait que $y^3 + py + q$ a trois zéros, réels ou complexes, distincts ou non.

Pour que $y^3 + py + q$ ait trois zéros réels, le discriminant $\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3$ doit être négatif.

Incidemment, pour obtenir trois zéros réels, on doit introduire les nombres complexes puisque le discriminant est sous la racine.

Par ailleurs u^3 et v^3 ont également eux aussi trois racines réelles ou complexes chacun. Il y a donc en tout neuf combinaisons mais seulement trois sont valides. Pour les trouver, il suffit de trouver une première racine de u^3, de façon arbitraire, et appelons la u_0.

Comme $uv = \frac{-p}{3}$, il suffit de diviser $\frac{-p}{3}$ par u_0 pour trouver la racine de v^3 correspondante. En refaisant le même manège avec u_1 et u_2, on réussit à jumeler avec une certaine facilité les six bonnes racines.

On peut également trouver les racines de $y^3 + py + q$ à partir de u_0 et v_0 (donc une première bonne paire, possiblement trouvée avec la méthode décrite ci-haut) de telle sorte que :

$$y_0 = u_0 + v_0$$
$$y_1 = \tau u_0 + \tau^2 v_0$$
$$y_2 = \tau^2 u_0 + \tau v_0$$

où τ et τ^2 sont les racines cubiques complexes de $x^3 = 1$

On a : $\tau = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $\tau^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Enfin, pour trouver les racines de la fonction polynomiale de départ, n'oubliez pas d'effectuer en dernier lieu le changement de variable suivant :

$$x = y - \frac{b'}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = x + \frac{b'}{3}$$

Solution générale d'une fonction polynomiale du deuxième degré

*La même considération s'applique (p. 5)

Forme générale :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Selon le théorème fondamental de l'algèbre, $f(x)$ a exactement deux solutions, distinctes ou non.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant effectuer un changement de variable : $y = x - \beta$

On va choisir β de telle sorte que le terme en x disparaisse dans la première équation.

Trouvons β :

$$
\begin{aligned}
0 &= (y-\beta)^2 + \frac{b}{a}(y-\beta) + \frac{c}{a} \\
&= y^2 - 2\beta y + \beta^2 + \frac{b}{a}y - \frac{b\beta}{a} + \frac{c}{a} \\
&= y^2 + \underbrace{\left(\frac{b}{a} - 2\beta\right)y}_{\text{terme en } y} - \frac{b\beta}{a} + \frac{c}{a} + \beta^2
\end{aligned}
$$

On annule donc $\frac{b}{a} - 2\beta$.

$$\frac{b}{a} - 2\beta = 0$$

$$2\beta = \frac{b}{a}$$

$$\beta = \frac{b}{2a}$$

On choisit $\beta = \frac{b}{2a}$. Ainsi, on éliminera le terme en y.

$$
\begin{aligned}
0 &= y^2 + \left(\frac{b}{a} - 2\beta\right)y - \frac{b\beta}{a} + \frac{c}{a} + \beta^2 \\
&= y^2 + \left[\frac{b}{a} - 2\left(\frac{b}{2a}\right)\right]y - \frac{b\left(\frac{b}{2a}\right)}{a} + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= y^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{2b}{2a}\right)y - \frac{2b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \\
&= y^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}
\end{aligned}
$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = y^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = y$$

$$\pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} =$$

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

Sauf que $x=y-\beta$. Cela implique également que : $y=x+\beta$:

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x+\beta$$

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x+\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$-\left(\frac{b}{2a}\right)\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x$$

On retrouve effectivement la formule bien connue !

Solution générale d'une fonction polynomiale du premier degré

Forme générale :
$f(x)=ax+b=0$

Essentiellement, $f(x)$ a un zéro réel et ce zéro est donné par :
$x=\frac{-b}{a}$

Solution générale d'une fonction constante

Forme générale :
$f(x)=d$

Si $d=0$, il y a une infinité de zéros (en réalité, tous les réels $\mathbb{R}$)

Par ailleurs, si $d\neq 0$ il n'y a évidemment aucun zéro.

Les extremums d'une fonction polynomiale du troisième degré

Équation générale de la forme :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

La dérivée première :
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

En annulant la dérivée première, on retrouve les extremums de la primitive.
$3ax^2 + 2bx + c = 0$

Il y a deux solutions :
$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c}}{2 \cdot 3a}$$

Naturellement, nous rejetterons toute solution complexe et retiendrons seulement les solutions réelles. En étudiant le comportement d'une fonction polynomiale de degré trois, on tire ces conclusions : deux solutions réelles signifient qu'on est en présence d'un maximum et d'un minimum (donc un discriminant positif pour la dérivée première) ; une solution réelle signifie un point d'inflexion (discriminant nul) ; enfin, aucune solution réelle signifie aucun extremum ou point d'inflexion (discriminant négatif).

Pour savoir s'il s'agit effectivement d'un maximum ou d'un minimum, nous devons tester avec la dérivée seconde, qui est donnée par :
$f''(x) = 6ax + 2b$

Si la solution de la dérivée première nous donne une valeur négative dans la dérivée seconde, à cette position correspond un maximum. De la même façon, si la solution de la dérivée première nous donne une valeur positive dans la dérivée seconde, à cette position correspond un minimum.

Les extremums d'une fonction polynomiale du deuxième degré

La démarche est sensiblement la même que décrite pour les fonctions polynomiales de degré 3, mais plus simplement.

Équation générale de la forme :
$f(x) = ax^2 + bx + c$

La dérivée première :
$f'(x) = 2ax + b$

En annulant la dérivée première, on retrouve l'extremum de la primitive.
$2ax + b = 0$

Il n’y a qu’une seule solution, toujours réelle et cette solution est :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

En étudiant le comportement d’une fonction polynomiale du deuxième degré, nous nous apercevons que la solution de la dérivée première est à coup sûr un maximum ou un minimum. Afin de déterminer, effectivement, duquel extremum il s’agit, nous étudions la dérivée seconde, qui est donnée par :

$$f''(x) = 2a$$

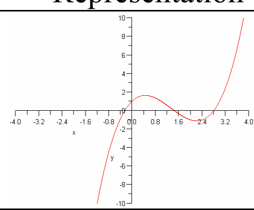
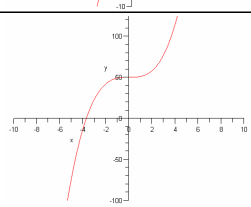
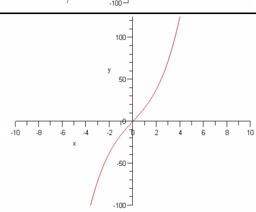
Effectivement, et c’est sans surprise, si le paramètre *a* est positif, nous obtenons un minimum et si le paramètre *a* est négatif, nous obtenons un maximum.

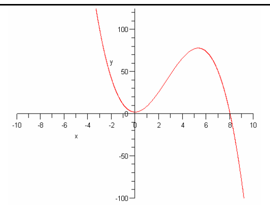
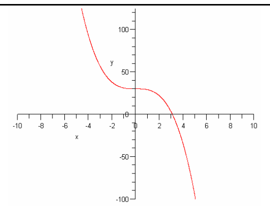
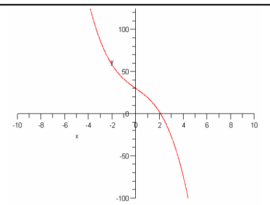
Les extremums d’une fonction polynomiale du premier degré ou constante

Comme la caractéristique de variation est soit constante ou même nulle, on n’observe aucun extremum dans ces fonctions.

Les intervalles de croissances d’une fonction polynomiale du troisième degré

En étudiant le comportement des fonctions polynomiales de degré 3, nous pouvons tirer les conjectures suivantes :

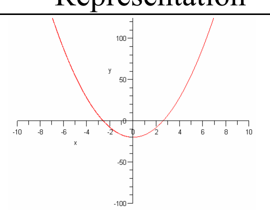
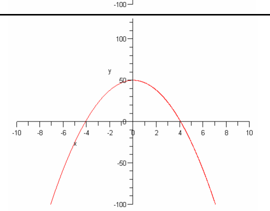
Caractéristique	Représentation	Croissance	Décroissance
$a > 0$ et $\delta < 0$		$]-\infty, ext_1]$ et $[ext_2, \infty[$	$[ext_1, ext_2]$
$a > 0$ et $\delta = 0$		$]-\infty, \infty[$	[ ]
$a > 0$ et $\delta > 0$		$]-\infty, \infty[$	[ ]

$a<0$ et $\delta<0$		$[ext_1, ext_2]$	$]-\infty, ext_1]$ et $[ext_2, \infty[$
$a<0$ et $\delta=0$		$[\ ]$	$]-\infty, \infty[$
$a<0$ et $\delta>0$		$[\ ]$	$]-\infty, \infty[$

Dans le tableau ci-dessus : a est le paramètre a de la forme générale et
δ est le discriminant de la dérivée première, soit $4(b^2-3ac)$

Les intervalles de croissances d'une fonction polynomiale du deuxième degré

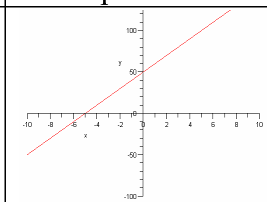
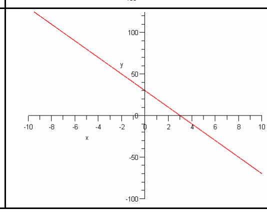
En étudiant le comportement des fonctions polynomiales de degré 2, nous pouvons tirer les conjectures suivantes :

Caractéristique	Représentation	Croissance	Décroissance
$a>0$		$[ext_1, \infty[$	$]-\infty, ext_1]$
$a<0$		$]-\infty, ext_1]$	$[ext_1, \infty[$

Dans le tableau ci-dessus : a est le paramètre a de la forme générale

Les intervalles de croissances d'une fonction polynomiale du premier degré

En étudiant le comportement des fonctions polynomiales de degré 1, nous pouvons tirer les conjectures suivantes :

Caractéristique	Représentation	Croissance	Décroissance
$a > 0$		$]-\infty, \infty[$	$[\ ]$
$a < 0$		$[\ ]$	$]-\infty, \infty[$

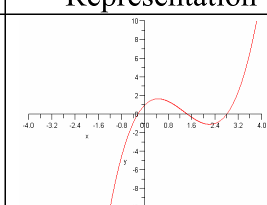
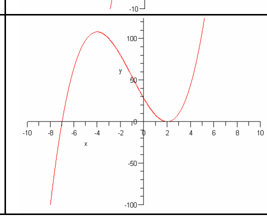
Dans le tableau ci-dessus : a est le paramètre a de la forme générale

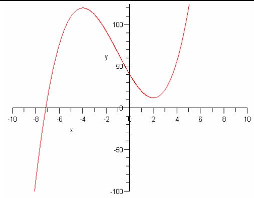
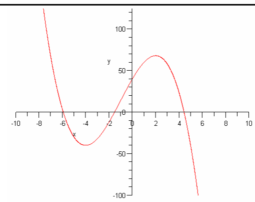
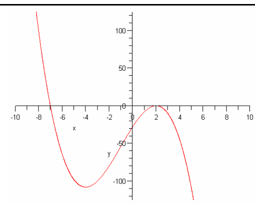
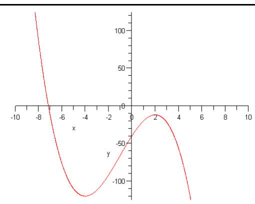
Les intervalles de croissances d'une fonction constante

Dans une fonction constante, la caractéristique de variation est nulle. En d'autres mots, il n'y a ni croissance ni décroissance.

Les intervalles de signes d'une fonction polynomiale du troisième degré

En étudiant le comportement des fonctions polynomiales de degré 3, nous pouvons tirer les conjectures suivantes :

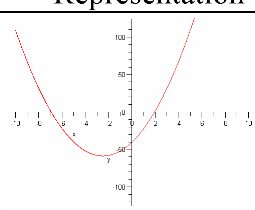
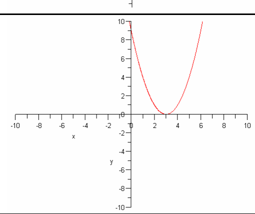
Caractéristique	Représentation	Positif	Négatif
$a > 0$ et $\Delta < 0$		$[zero_1, zero_2]$ et $[zero_3, \infty[$	$]-\infty, zero_1]$ et $[zero_2, zero_3]$
$a > 0$ et $\Delta = 0$		$[zero_1, \infty[$	$]-\infty, zero_1]$

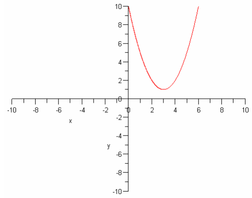
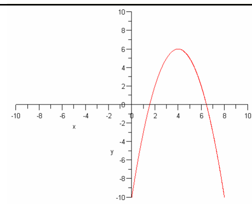
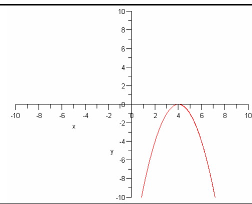
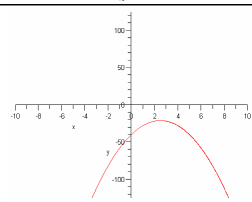
$a>0$ et $\Delta>0$		$\left[zero_1,\infty\right[$	$\left]-\infty,zero_1\right]$
$a<0$ et $\Delta<0$		$\left]-\infty,zero_1\right]$ et $\left[zero_2,zero_3\right]$	$\left[zero_1,zero_2\right]$ et $\left[zero_3,\infty\right[$
$a<0$ et $\Delta=0$		$\left]-\infty,zero_1\right]$	$\left[zero_1,\infty\right[$
$a<0$ et $\Delta>0$		$\left]-\infty,zero_1\right]$	$\left[zero_1,\infty\right[$

Dans le tableau ci-dessus : a est le paramètre a de la forme générale et Δ est le discriminant $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ (voir résolution d'une fonction polynômiale du troisième degré, en page 6).

Les intervalles de signes d'une fonction polynomiale du deuxième degré

En étudiant le comportement des fonctions polynomiales de degré 2, nous pouvons tirer les conjectures suivantes :

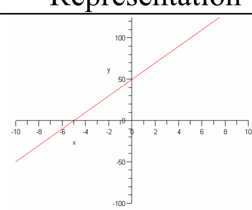
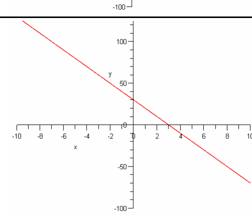
Caractéristique	Représentation	Positif	Négatif
$a>0$ et $\Delta>0$		$\left]-\infty,zero_1\right]$ et $\left[zero_2,\infty\right[$	$\left[zero_1,zero_2\right]$
$a>0$ et $\Delta=0$		$\left]-\infty,\infty\right[$	$[\ ]$

$a>0$ et $\Delta<0$		$\left]-\infty,\infty\right[$	$[\ ]$
$a<0$ et $\Delta>0$		$\left[zero_1, zero_2\right]$	$\left]-\infty, zero_1\right]$ et $\left[zero_2,\infty\right[$
$a<0$ et $\Delta=0$		$[\ ]$	$\left]-\infty,\infty\right[$
$a<0$ et $\Delta<0$		$[\ ]$	$\left]-\infty,\infty\right[$

Dans le tableau ci-dessus : a est le paramètre a de la forme générale et Δ est le discriminant b^2-4ac (voir résolution d'une fonction polynômiale du deuxième degré, en page 10)

Les intervalles de signes d'une fonction polynomiale du premier degré

En étudiant le comportement des fonctions polynomiales de degré 1, nous pouvons tirer les conjectures suivantes :

Caractéristique	Représentation	Positif	Négatif
$a>0$		$\left[zero_1,\infty\right[$	$\left]-\infty, zero_1\right]$
$a<0$		$\left]-\infty, zero_1\right]$	$\left[zero_1,\infty\right[$

Dans le tableau ci-dessus : a est le paramètre a de la forme générale

Les intervalles de signes d'une fonction constante

Avec $f(x)=d$, si $d \geq 0$ la fonction est positive sur son domaine, alors que si $d<0$, la fonction est négative sur son domaine.

Rappel sur les complexes

Voici quelques notions et identités qui pourraient être utiles dans la recherche de solution d'une fonction polynômiale de troisième degré et concernant les complexes :

$Z=a+bi$ est un nombre complexe, dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b.

On peut placer ce nombre dans le plan complexe dans lequel l'axe des abscisses est l'axe réel $\Re$ et l'axe des ordonnées est l'axe imaginaire $\Im$.

Sa norme sera donnée par : $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et son argument (l'angle) sera donné par : $\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Or attention, le domaine de la fonction arctan est $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Il est donc nécessaire de placer le nombre complexe dans le plan et de vérifier l'angle obtenu par la fonction arctan, en ajoutant ou retranchant π lorsque cela s'avère nécessaire.

Avec l'argument φ et la norme *r,* on peut retrouver la forme $a+bi$ en faisant : $r\cos(\varphi)+r\sin(\varphi)i$

On a aussi $Z=re^{(i\cdot\varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\left(i\cdot\frac{\varphi}{n}\right)}$

En d'autres mots, lorsqu'on prend la racine d'un complexe, on prend la racine de sa norme et on divise son argument.

On peut donc déduire que si : $Z^n=re^{(i\cdot\varphi)}$ les racines de Z sont ;

$Z=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\left(i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot k}{n}\right)}$ où $k=[0\ldots n-1]$