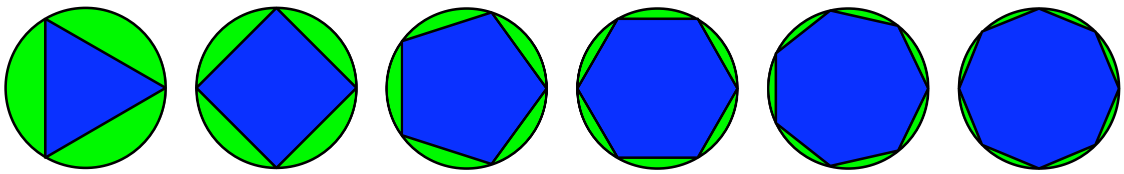
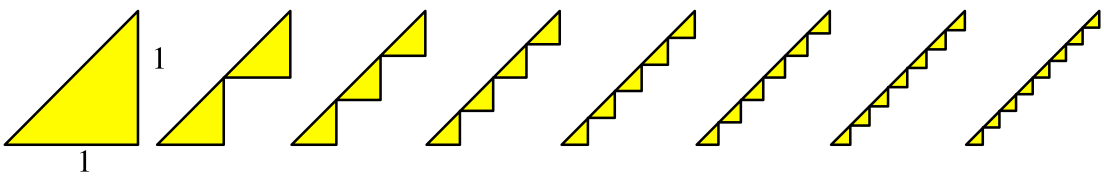
La mesure de grandeurs « gauches »

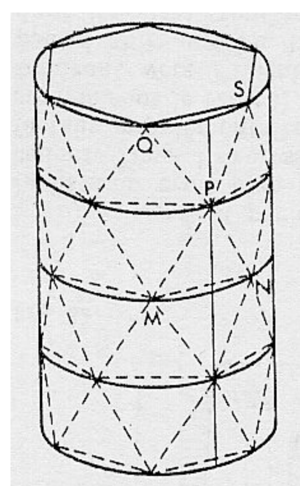
Pour déterminer la longueur d'une courbe (dans le plan ou dans l'espace), on approche la courbe par des chemins polygonaux de plus en plus « fins » et tels que chaque extrémité des segments constituants est sur la courbe ; puis on prend la limite des longueurs de ces chemins.
L'exemple le plus connu est le calcul de la circonférence du cercle utilisant comme chemins polygonaux des polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés croît sans limite.



Toutes les spécifications ci-dessus sont importantes. Par exemple, si on accepte que certaines extrémités de segments des chemins polygonaux tombent hors de la courbe, on obtient des contradictions, comme dans l'exemple ci-dessous, qui « montre » que $\sqrt{2} = 1 + 1 = 2$.



Pour déterminer l'aire d'une surface plongée dans l'espace, l'idée la plus naturelle est de faire une adaptation immédiate de la définition ci-dessus : on approche la surface par des surfaces « triangulées » de plus en plus « fines » et telles que chaque sommet des triangles constituants est sur la surface ; puis on prend la limite des aires de ces surfaces triangulées.
Contre toute attente, la définition ci-dessus est prise en défaut pour des surfaces aussi simples que les cylindres : c'est le paradoxe de Schwarz. Selon les divers choix de surfaces triangulées, on obtient des résultats variant de l'aire véritable du cylindre à des valeurs infinies, en passant par toutes les valeurs intermédiaires



La figure ci-contre, tirée de Doubnov [1974], illustre une façon d'approximer une surface cylindrique en découpant celle-ci en n tranches de même épaisseur et en inscrivant des m-gones réguliers décalés successifs pour servir de base à diverses triangulations.