André Boileau et
Maurice Garançon
Département de mathématiques et d'informatique, UQAM

GÉOMÉTRIE ET FORMATION DES MAÎTRES AU SECONDAIRE

Imaginez que vous êtes chargés de former les futurs maîtres de mathématiques au secondaire, et qu'on vous demande de dispenser le seul cours de géométrie de leur programme d'étude.

Pour vous guider dans vos choix, vous commencez par regarder le programme officiel d'études secondaires ([1]). Celui-ci s'échelonne sur cinq ans à raison d'un cours obligatoire de mathématiques à chaque année, plus deux cours optionnels pouvant être suivis pendant les deux dernières années d'étude.

Vous vous intéressez donc plus particulièrement à la géométrie. Vous commencez tout d'abord par consulter la liste des objectifs d'apprentissage et les contenus notionnels touchant spécifiquement la géométrie. Comme vous avez peine à vous imaginer ce qui devra se faire en classe, car c'est vraiment bizarre de vouloir tout décortiquer de la sorte en objectifs et sous-objectifs, vous décidez alors de prendre les grands moyens et de consulter les guides pédagogiques officiels ([2]), ainsi que deux des collections de manuels en usage courant ([3] et [4]).

Alors là c'est le choc. Tout d'abord, vous cherchez les preuves. (Après tout, la géométrie n'a-t-elle pas la réputation d'une grande formatrice de l'esprit en raison de sa démarche mariant à la fois l'intuition des figures et la rigueur du raisonnement déductif?) Vous cherchez longtemps, car on ne trouve des preuves en géométrie (non analytique) qu'à la deuxième (et dernière) option du cours secondaire. (Un manuel [4] de cette option va même jusqu'à dire à l'élève "Rassure-toi, on ne te demandera pas de démontrer un théorème.") Et même là, il s'agit la plupart du temps de preuves incomplètes, parfois laissées à compléter par l'élève.

Un peu abasourdis mais certainement très intrigués, vous cherchez alors à comprendre ce qu'est devenue la géométrie telle qu'enseignée dans nos écoles. En consultant guides pédagogiques et manuels, vous constatez que la géométrie (non analytique) est présentée comme une activité expérimentale (même pas une science, puisque aucun souci de contrôle sérieux des énoncés considérés n'est présent). En effet, on retrouve constamment des énoncés du type "En regardant cette figure, vous constaterez le fait général suivant" ou du type "Les quelques mesures que vous venez de faire nous conduisent à telle relation générale".

Côté contenu mathématique, vous retrouvez la plupart du temps des énoncés mathématiques très élémentaires, mais formulés avec des termes et des notations qui les font paraître complexes. De plus, le contexte général utilisé (les transformations) semble contribuer à cette lourdeur générale. En fait, en regardant globalement la démarche d'étude de la géométrie proposée aux élèves, on en vient à penser qu'elle est bien peu source de compréhension et de formation de la pensée.

Ce n'est pas tout. Tant le guide pédagogique que les manuels contiennent des erreurs mathématiques élémentaires ou des imprécisions pédagogiquement inacceptables. Ces publications ont pourtant subi diverses révisions visant à s'assurer que la langue utilisée est correcte et qu'ils ne contiennent pas de stéréotypes sexistes ou racistes. Pourquoi n'a-t-on pas pensé à une révision mathématique?

Avec tout ça, que peut-il bien se passer dans la pratique quotidienne de nos classes? Vous ne croyez pas au miracle: dans un tel contexte, il faudrait un professeur exceptionnel, pour ne pas dire révolutionnaire, pour que l'enseignement de la géométrie apporte une formation significative aux élèves.

Alors que devez-vous faire pour préparer les futurs maîtres à enseigner la géométrie? Devez-vous les préparer à enseigner la géométrie telle qu'elle se pratique présentement dans nos classes (et que vous reconnaissez à peine)? Ou au contraire devez-vous essayer de les initier à la géométrie que vous connaissez et que vous aimez, dans l'espoir qu'ils pourront en retirer une formation qui leur sera utile tant au plan personnel que professionnel?

Dans cet article, nous essaierons de donner notre réponse à ces questions. Après avoir évoqué brièvement la clientèle à qui nous nous adressons, nous décrirons d'abord le contexte actuel de la formation des maîtres en géométrie, à l'UQAM. Après avoir constaté ses limites, nous discuterons des modifications que nous entendons y apporter dans un proche avenir.

Nos étudiants à l'UQAM: de futurs maîtres au secondaire

Avant de décrire la démarche que nous proposons à nos étudiants dans notre cours de géométrie, il convient de parler un peu de ceux-ci, puisque nous essayons de nous adapter, dans une certaine mesure, à notre clientèle.

Disons tout d'abord que les futurs maîtres en mathématiques au secondaire ont tous[1] réussi tous les cours de mathématiques du secondaire (y compris les deux options), et suivi au CEGEP deux cours de calcul différentiel et intégral et un cours d'algèbre linéaire.

Comme on peut le deviner à partir de la description au début de cet article, leurs connaissances géométriques sont très faibles; d'autant plus que, si on se fie à leurs dires, on voit dans la seconde option considérablement moins de géométrie que ce qui est prévu au programme.

Mais le plus dramatique, c'est qu'ils ont pris l'habitude de croire ce qu'ils voient. Par exemple, si deux figures semblent (visuellement) congrues, c'est qu'elles sont congrues. Une petite anecdote à ce sujet est particulièrement éclairante.

> Madame Colette Laborde donnait une conférence sur le logiciel Cabri Géomètre ([5] qui, incidemment, est l'un des logiciels pédagogiques les plus réussis à ce jour). À la fin de son exposé, nous lui avons posé une question sur de l'utilisation de ce logiciel auprès des élèves. "Grâce à ses possibilités de variation dynamique des figures, Cabri Géomètre peut donner l'impression de pouvoir nous faire visualiser essentiellement tous les cas de figures. Comment, dans ces conditions, motiver les élèves à se donner la peine de prouver ce qui leur paraît alors évident?"
>
> Après la réponse de Madame Laborde, qui soulignait à la fois la nécessité et la difficulté de l'entreprise et donnait quelques pistes, trois étudiants sont intervenus pour donner leur opinion à ce sujet: *Cabri nous dispense de faire des preuves*[2].

On voit donc qu'il est utopique de vouloir parler de la didactique de la géométrie, ou même de poursuivre l'étude de la géométrie en se basant sur ce qu'ils connaissent déjà: leurs bases ne sont pas assez solides, tant pour ce qui est des connaissances que de la méthode.

La formation en géométrie: situation actuelle

La place de la géométrie dans notre programme

Dans le programme de baccalauréat d'enseignement des mathématiques de l'UQAM nous avons un cours de géométrie de 45 heures que les étudiants suivent normalement pendant leur première session à l'université.

Il faut noter qu'ils ont l'occasion de faire de la géométrie dans d'autres cours, par exemple en structures numériques, en résolution de problèmes, dans leurs cours de didactique. Cependant, pour le moment, il n'y a qu'un seul cours qui soit entièrement consacré à la géométrie.

Nous considérons ce cours tellement important dans leur formation que nous n'admettons pas les étudiants dans les stages d'enseignement avant qu'ils ne l'aient réussi.

- *Sauf possiblement les étudiants dmis sur la base de "connaissances ppropriées".*

- *Il est vrai que ce logiciel, dans es mains expérimentées, est un ıstrument de savoir particulièreıent puissant, et que les risques 'être induit en erreur sont faibles. fais le noeud de la question est lutôt ceci: les preuves en géométrie lémentaire sont faites, non pas tant our nous apprendre de nouvelles ropositions, mais plutôt pour nous ıire comprendre pourquoi ces ropositions sont vraies. Et ceci ne ıit pas partie de l'expérience cquise par ces étudiants.*

Les objectifs de notre cours de géométrie

Comme nous l'avons expliqué précédemment, force nous est de constater que les étudiants arrivant à l'université ont des connaissances très limitées en géométrie. Plus grave encore leur idée de ce qu'est la géométrie pourrait être caricaturée en disant que pour eux la géométrie c'est "ce qu'on voit sur des figures". Non seulement ils n'ont aucune expérience de ce qu'est faire une démonstration, mais ils n'en voient pas la nécessité, c'est pour eux une activité inutile.

En ce sens, les mathématiques en général et la géométrie en particulier deviennent à leurs yeux des activités empiriques dans lesquelles tout énoncé doit être considéré comme vrai jusqu'à ce qu'il ait reçu un contre exemple.

Cette conception a pour effet de rendre inutile le raisonnement logique, les connaissances restant de type purement factuel.

Nous constatons donc que nos étudiants:

— ont peu de connaissances géométriques et une conception très empirique de ce qu'est la géométrie,

— n'ont pas une vision de la dépendance logique des connaissances mathématiques et géométriques entre elles, par exemple le fait qu'un théorème dépend d'un autre ou lui est équivalent,

— n'ont pas développé la capacité de raisonner logiquement, de faire apparaître des liens entre les concepts et de les justifier. Ne ressentent pas de besoin de savoir le pourquoi des choses.

Les objectifs de notre cours de géométrie sont de palier à ces déficiences. D'une part augmenter leurs connaissances en géométrie, mais d'autre part leur donner une vision de la géométrie où les connaissances sont construites en utilisant non seulement des méthodes expérimentales, mais aussi des raisonnements logiques. Nous essayons de les amener, face à un résultat, à se poser constamment la question "pourquoi?" et de leur montrer que la démonstration est non seulement source de certitude mais apporte aussi la compréhension. Nous espérons, qu'ayant acquis de telles habiletés, ils sauront en faire bénéficier leurs futurs élèves.

Le contenu du cours

Avant de concevoir un cours de géométrie pour les futurs maîtres du secondaire, il convient de se poser la question: "quelle géométrie? Géométrie analytique? Géométrie synthétique? Géométrie vectorielle? Point de vue transformationnel?".

Nous choisissons de faire principalement de la géométrie synthétique . Il y a pour ce choix plusieurs raisons:

— d'abord historique: la géométrie synthétique a, après tout, précédé les autres points de vue;

— ensuite pédagogique: cette géométrie nous semble moins abstraite et d'une finalité plus accessible, donc plus motivante, que la géométrie vectorielle ou la géométrie des transformations, par exemple;

— finalement logique: comment par exemple fonder la géométrie transformationnelle si on ne dispose pas d'une base en géométrie synthétique? Sur une axiomatique de groupe?

Ceci étant posé, pour atteindre les objectifs visés, le détail du contenu n'a qu'une importance limitée. Nous choisissons donc de faire travailler nos étudiants sur les concepts qu'ils auront à enseigner au niveau secondaire: parallélisme, perpendicularité, angles, congruence, similitude, volumes, etc. Ce sont donc des concepts "connus". Cependant nous insistons sur des aspects totalement étrangers à nos élèves: la construction logique de la connaissance, comment un énoncé nouveau peut être justifié ou infirmé par un raisonnement logique basé sur les connaissances déjà acquises. Par exemple que les cas de similitude des triangles sont les conséquences des cas de congruence et du théorème de Thalès.

Nous montrons aussi que cette construction logique n'est pas absolue et peut être faite de différentes façons. Par exemple: si on admet les cas de similitude des triangles, alors le théorème de Thalès devient conséquence de ces cas de similitude et des cas de congruence des triangles.

3- *On qualifie de synthétique une approche de la géométrie qui n'est pas basée sur l'utilisation des nombres réels (contrairement à la géométrie dite analytique). Selon cette approche, les nombres réels ne précèdent pas la géométrie: celle-ci peut servir à les définir en faisant appel à des activités (idéalisées) de mesure de grandeurs géométriques (segments, surfaces, volumes).*

Finalement nous essayons de leur transmettre l'idée que les mathématiques ne sont pas que des faits, des théorèmes, mais que ce sont aussi et surtout des méthodes de raisonnement.

La méthode pédagogique utilisée

Comme nous l'avons déjà dit, les étudiants ne voient pas la nécessité de justifier, de démontrer ce qui est visible sur des figures.
Si on insiste et qu'on leur demande de justifier un résultat, ils vont tracer une figure avec la plus grande précision dont ils sont capables et constater que le résultat en question est vrai sur la figure. Ce comportement ne serait pas mauvais s'il constituait une première étape dans la recherche d'une certitude; mais pour la plupart des étudiants il constitue la preuve que le résultat est vrai en général. Cette constatation peut découler d'une évidence graphique : trois droites sont concourantes, ça se voit! ou de mesures : les côtés sont proportionnels puisque leurs mesures sur la figure sont telles que 2/3 = 4/6. Notons que nous avons encore constaté ce comportement chez beaucoup d'étudiants à la maîtrise.

Il nous faut leur faire comprendre ce que de telles méthodes prouvent, et surtout ce qu'elles ne prouvent pas, leur faire développer un esprit critique face à l'évidence graphique, à la mesure directe à l'aide d'instruments ou encore face à un raisonnement. Il nous faut leur faire développer la notion de généralité d'un argument.

En travaillant avec des concepts connus tout ceci devient une difficulté majeure. Pourquoi mettre en doute et essayer de démontrer ce qui est connu depuis longtemps?

De plus nous travaillons avec une approche de type "résolution collective de problèmes" et dans un cours de 45 heures, avec cette approche, il est hors de question de reprendre tous les concepts abordés au secondaire et de les insérer dans une construction logique.

Nous contournons cette difficulté en adoptant une méthode apparentée à la méthode des "îlots déductifs" (voir [11]).
A propos d'un thème, un certain ensemble de connaissances est admis, considéré connu, sans plus de justification (en s'assurant malgré tout que ces connaissances sont acceptées et bien comprises par les étudiants).

A partir de là un certain nombre d'énoncés sont soit proposés, soit découverts par la classe (par des méthodes expérimentales: en traçant des figures, en mesurant, etc.) et on se pose la question de savoir s'ils sont vrais en toute généralité, sous certaines conditions à déterminer ou bien totalement faux. Les réponses à ces questions sont construites collectivement, le professeur guidant le raisonnement en fournissant des pistes ou des contre exemples, en critiquant les arguments apportés par les étudiants et surtout en posant constamment les questions pourquoi ? et comment ?

Lorsque l'ensemble des arguments apportés semble suffisant et convainquant, une preuve est construite et rédigée, en insistant sur l'enchaînement logique de l'argumentation.

Par la suite les étudiants ont à faire des exercices et des problèmes sur le même modèle.

Lorsqu'on a assez travaillé le thème choisi, on passe à un autre thème. Un nouvel ensemble de connaissances est admis sans justification, ajouté aux connaissances précédemment admises et à celles démontrées lors de l'étude des thèmes précédents et on utilise la même méthode.

Cette méthode permet de choisir les concepts, résultats et démonstrations auxquels on veut consacrer du temps, en reléguant toutes les connaissances nécessaires dans l'ensemble des résultats admis. Elle permet de ne pas avoir à démontrer trop de résultats "évidents" ou très bien connus, pour se consacrer à des résultats soit moins connus, et/ou que nous considérons comme très importants et méritant beaucoup d'attention.

Un premier exemple: le théorème de Pythagore

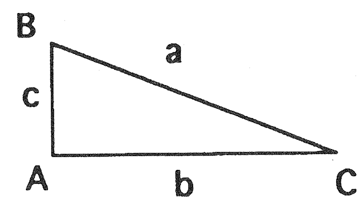
Supposons par exemple que l'on veuille donner une démonstration du théorème de Pythagore bien connu des élèves:

dans un triangle rectangle le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés.

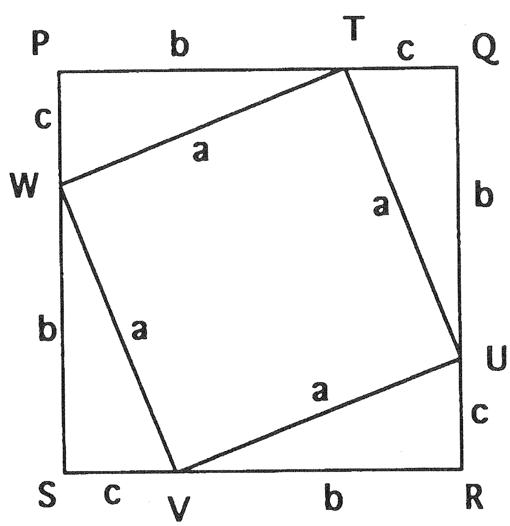
Supposons d'autre part qu'on retrouve dans les connaissances des élèves:

- le fait que la somme des mesures des angles d'un triangle est 180°,
- les cas de congruences des triangles,
- les propriétés usuelles des parallélogrammes et des parallélogrammes particuliers comme le carré, le losange, etc.,
- la notion d'aire et les formules de calcul des aires des carrés et des triangles.

Ces connaissances ayant étés, en tout ou en partie, travaillées précédemment ou admises pour les besoins du travail actuel.
On peut alors faire construire une démonstration du théorème de Pythagore.
Quelles sont les hypothèses?



Le triangle est rectangle en A et AB mesure c, AC mesure b et l'hypoténuse BC mesure a.
Que veut-on prouver? Que $b^2+c^2=a^2$.
Le professeur peut donner un point de départ en traçant la figure suivante:



Les étudiants: le quadrilatère **TUVW** est un carré!
Le prof: pourquoi?
Les étudiants: les quatre côtés sont égaux!
Le prof dessinant un losange: est-ce un carré?
Les étudiants: les angles sont droits!
Le prof: pourquoi?
Les étudiants: ???
Le prof:si l'angle **<TUV** est droit quelle est la somme des mesures des angles **<TUQ** et **<VUR?**
Les étudiants: 90°!
Le prof: peut-on le démontrer?
Les étudiants: ???
Un étudiant: les triangles sont congrus.
Le prof: quels triangles?
L'étudiantb: Δ**TQU** et Δ**URV!**
Le prof: pourquoi?
L'étudiant: CAC[4], **TQ=UR, QU=RV** et **<TQU=<URV=** 90°.
Le prof: d'accord! Est-ce que quelqu'un d'autre voit ce que ça donne?
Les étudiants: <VUR + <TUQ = <VUR + <RVU = 180° - 90° = 90°, donc **<TUV** = 90°.
Le prof: et alors?
Les étudiants: on avait raison, **TUVW** est un carré!
Le prof: vous êtes sûrs? Pourquoi?
Les étudiants: quatre côtés égaux, c'est un losange, plus un angle droit, c'est un carré!
Le prof: bien! Mais peut-on le voir autrement?
Un étudiant: on pourrait démontrer de la même façon que chaque angle est droit.
Le prof: d'accord, c'est un carré! et après?
Les étudiants: ???
Le prof: quelle est son aire?
Les étudiants: a^2.
Le prof: et l'aire du grand carré?
Les étudiants: $(b+c)^2$.
Le prof: peut-on la calculer autrement?
Les étudiants: ???....... La somme des aires des 4 triangles et du carré intérieur.
Le prof: et ça donne quoi?
Les étudiants: $4(bc/2) + a^2$.
Le prof: pourquoi?
Les étudiants: l'aire de chacun des triangles est bc/2 puisqu'ils sont rectangles et que la hauteur coïncide avec un côté.
Le prof: d'accord! Qu'est-ce que ça donne?
Les étudiants: $4(bc/2) + a^2=(b+c)^2$ donc $2bc+a^2=b^2+2bc+c^2$ ou encore $a^2=b^2+c^2$.

4- *Côté-Angle-Côté. Allusion à l'axiome (ou au théorème, selon le contexte) voulant que deux triangles sont congrus s'ils ont un angle congru compris entre deux côtés respectivement congrus.*

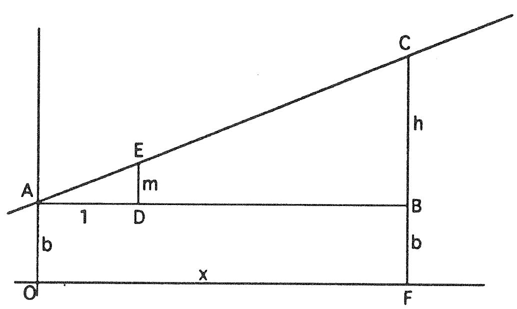
Après avoir mis à jour les raisons de la relation de Pythagore en fonction des connaissances préalables admises, la classe passe à la rédaction d'une preuve, dans le style habituel utilisé pour communiquer une preuve par écrit dans la communauté mathématique.

L'étude du théorème de Pythagore est aussi une occasion de faire un lien avec la géométrie analytique. On profite en effet de ce moment pour faire remarquer aux étudiants qu'en géométrie analytique la formule donnant la distance entre deux points n'est rien d'autre qu'une application de ce théorème.

Un autre exemple: la droite

Durant ce premier cours de géométrie, nous nous efforçons aussi de voir la géométrie non comme une branche des mathématiques indépendante de tout le reste, mais comme un domaine interrelié aux autres domaines des mathématiques.

Prenons par exemple l'équation de la droite. Elle découle très simplement du théorème de Thalès, une proposition centrale de la géométrie synthétique. En effet si, dans la figure ci-dessous, on applique le théorème de Thalès aux triangles **ABC** et **ADE,** on obtient que h/m = **BC/DE** = **AB/AD** = x/1 et donc que h = mx; on en tire que y = **CF** = **CB** + **BF** = h + b = mx +b.

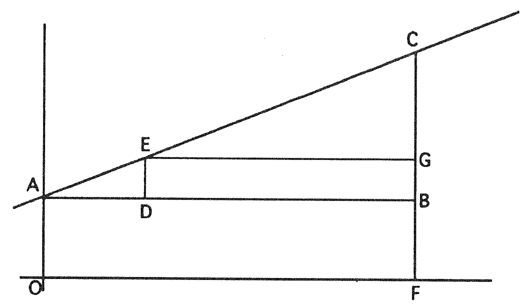


Par contre ce même théorème de Thalès suppose qu'on puisse mesurer les segments à l'aide de nombres réels, et qu'on puisse opérer (diviser notamment) sur ceux-ci. Mais, comme on le voit lorsqu'on étudie les structures numériques, la définition des nombres réels et des opérations associées repose sur la mesure des grandeurs, qui est elle-même basée sur la géométrie. Comme on le voit à cette occasion, le va-et-vient entre algèbre et géométrie est fréquent.

Disons plus précisément, sans pour autant entrer dans les détails, que le théorème de Thalès découle de ce que les projections parallèles préservent les mesures[5]. En appliquant deux fois en succession ce résultat à la figure ci-dessous, on obtient que[6]:

$$\mathbf{BC/DE}=\mathbf{BC/BG}=\mathrm{mes}_{\mathbf{[BG]}}(\mathbf{[BC]})=$$

$$\mathrm{mes}_{\mathbf{[AE]}}(\mathbf{[AC]})=\mathrm{mes}_{\mathbf{[AD]}}(\mathbf{[AB]})=\mathbf{AB/AD}.$$



Cet exemple souligne qu'il est souvent intéressant et utile de voir les situations mathématiques de plusieurs points de vue différents: selon les concepts en présence et le type de compréhension souhaitée, on peut se servir des nombres (réels) pour mieux étudier la géométrie, ou au contraire se servir de la géométrie (sans les nombres) pour mieux comprendre les réels.

La formation en géométrie: changements à venir

Nous nous proposons d'introduire un second cours de géométrie à la faveur d'un prochain changement du programme de Baccalauréat en Enseignement des Mathématiques. Il est important de souligner que, bien qu'à peu près tous les didacticiens des mathématiques de l'UQAM soient convaincus de la nécessité d'un tel cours, les objectifs, les contenus et les méthodes pédagogiques de celui-ci n'ont pas fait l'objet de décisions officielles: il faut donc interpréter les

· En effet, on peut voir les projec-ons parallèles comme des transfor-ations homogènes (dilatations ou ontractions) portant sur des seg-ents (entre autres objets): si on ansforme de la même manière à la is le segment à mesurer et le seg-ent servant d'unité de mesure, le sultat de la mesure sera inchangé.

Dans le présent contexte, [XY] note le segment ayant les points X Y pour extrémités, tandis que XY note la longueur du segment [XY] n nombre réel). De même es[XY]([UV]) dénote le réel qui esure le segment [UV] à l'aide du gment [XY] pris comme unité remarques qui vont suivre comme l'opinion personnelle des auteurs.

Tout comme pour le premier cours, l'objectif principal de notre deuxième cours sera de développer une approche déductive signifiante envers la géométrie. Cependant, alors qu'il nous a semblé naturel (tant pour des raisons conceptuelles, historiques que pédagogiques) de centrer le contenu du premier cours sur la géométrie euclidienne synthétique, il en est autrement pour ce deuxième cours.

Il ne nous semble pas opportun de poursuivre, sans modification de la démarche, le développement de certains chapitres de la géométrie euclidienne synthétique. Étant donné que ce cours sera le dernier à traiter de la géométrie et que les programmes actuels au secondaire privilégient les points de vue transformationnel et analytique, nous nous devrons de donner à ces approches la place qui leur est due. C'est dans cette optique, et en tenant compte des recommandations du N.C.T.M. ([6] et [7]) à ce sujet, que nous nous proposons d'*étudier certains thèmes unificateurs selon des perspectives multiples* (y compris l'approche synthétique utilisée au premier cours).

Les coniques, vues sous plusieurs angles

Pour bien illustrer ce que nous entendons par là, considérons par exemple le thème des coniques. Nous savons que les coniques peuvent être définies de plusieurs façons, différentes mais équivalentes: comme des figures résultant de l'intersection d'un cône par divers plans (par exemple: on obtient une parabole en coupant un cône par un plan parallèle au plan tangent à l'une des génératrices de ce cône), comme certains lieux géométriques (par exemple: une parabole est le lieu géométrique des points équidistants d'un point appelé foyer et d'une droite appelée directrice), par l'ensemble-solution de certaines équations (par exemple: une parabole est le graphe de l'équation $y = ax^2$, à condition de choisir un système d'axes approprié), etc.

La première chose à faire dans un tel contexte est de se convaincre que toutes les définitions précédentes définissent bien un même objet: la parabole, par exemple.

Ceci donne lieu à plusieurs activités riches et intéressantes. Pour étudier l'intersection d'un cône et d'un plan, nous pouvons utiliser les approches synthétique[7] (avec les sphères de Dandelin par exemple, voir [8]) ou analytique. Nous pouvons aussi décider d'utiliser les deux approches et de discuter par la suite leurs mérites respectifs: laquelle est la plus simple du point de vue des efforts techniques à mettre en oeuvre, laquelle nous apporte la compréhension la plus profonde?[8]

De même, qu'il s'agisse de choisir un système d'axes pour simplifier au maximum l'équation d'un lieu géométrique donné, ou au contraire de trouver l'équation générale d'un tel lieu, le recours aux transformations géométriques acquiert dans ce contexte une pertinence et une signification réelle.

Par la suite, on étudiera quelques propriétés intéressantes des coniques. Par exemple, on pourra établir la propriété géométrique des paraboles qui justifie la forme de "soucoupe" des antennes d'émission et de réception des ondes de radio et de télévision. On pourra là encore comparer les mérites respectifs des diverses approches utilisées.

La démarche expérimentale en géométrie

L'étude d'un certain nombre de thèmes selon plusieurs perspectives occupera donc la majeure partie de ce second cours. Comme pour le premier cours, on utilisera le plus souvent la démonstration comme méthode d'acquisition de connaissances géométriques, mais surtout comme instrument de compréhension de ces connaissances.

Cependant il faut avouer que la démarche déductive est surtout un instrument de vérification des connaissances. Pour reprendre une image de G. Polya, la mathématique est comme une automobile, où la preuve joue le rôle des freins et où l'intuition joue le rôle du moteur: or une auto sans freins est dangereuse, mais une auto sans moteur est inutile!

7- *Notons dans ce contexte que la pratique de la géométrie synthétique tri-dimensionnelle semble être une puissante motivation pour le recours à la démarche prudente et systématique empruntée lors des démonstrations. En effet, la plupart des étudiants ne pouvant ni "voir" très clairement la situation, ni "expérimenter" à l'aide de dessins, la conclusion recherchée est loin de paraître évidente.*

8- *Nous avons jugé bon, étant donné les lacunes des étudiants en géométrie, de centrer les cours sur la géométrie elle-même et non sur la problématique de son enseignement. Mais, au cours du cheminement que nous leur proposons, nous nous attardons parfois sur des considérations (de nature épistémologique, cognitive ou didactique) susceptibles d'éclairer une éventuelle démarche pédagogique.*

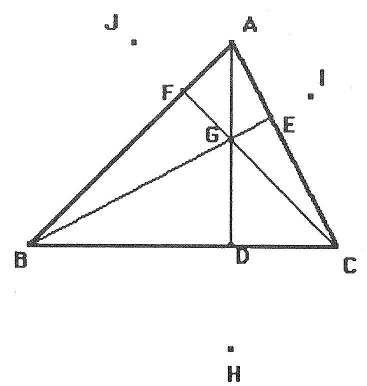
Il serait dommage d'insister exclusivement sur le seul aspect déductif, si important et nécessaire soit-il, en laissant tout le mystère sur le processus inductif de découverte de ces propositions géométriques qu'on apprend à prouver.

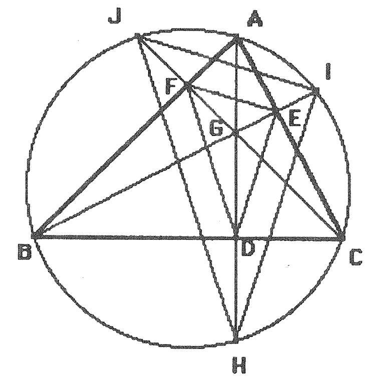
C'est pourquoi on va laisser place dans ce cours à des activités de découverte de faits géométriques nouveaux (pour les étudiants, et parfois aussi pour leurs professeurs). Auparavant, de telles activités étaient lentes, laborieuses, ponctuées de nombreuses erreurs; et rien ne venait garantir une réussite quelconque en fin de parcours. Mais la venue de logiciels de constructions et d'explorations géométriques, comme Cabri que nous avons évoqué précédemment, vient alléger et faciliter considérablement tout le processus.

Plutôt que de chercher à décrire ces activités inductives de recherche dans toute leur généralité et leur complexité, nous nous contenterons d'un exemple qui en illustre la richesse et les embûches. Notre activité débute avec l'énoncé suivant (voir [10]):

Soit **ABC** un triangle. Construisons les hauteurs **AD, BE** et **CF.** Elles se rencontrent en un point **G** appelé orthocentre. Réfléchissons ce point **G** par rapport à chacun des côtés du triangle, obtenant ainsi les points **H** (réflexion par rapport à **BC**), **I** (p.r.à. **AC**) et **J** (p.r.à. **AB**). Quelles propriétés générales peut-on énoncer à propos de la figure résultante?

Voici deux figures obtenues à l'aide du logiciel Cabri: celle ci-dessous ne fait qu'illustrer l'énoncé, tandis que celle de droite ajoute une structuration supplémentaire.





Suite à une expérimentation systématique (rendue facile par Cabri), on est en mesure de conjecturer que, à tout le moins dans les cas non dégénérés (où aucun des angles du triangle **ABC** n'est droit), les énoncés suivants semblent vérifiés:

— les triangles **DEF** et **HIJ** sont semblables et leurs côtés sont parallèles (en fait le premier est obtenu du second par une homothétie de centre **G** et de rapport 2);
— les hauteurs du triangle **ABC** sont aussi les bissectrices des triangles **DEF** et **HIJ**;
— de plus, le cercle circonscrit au triangle **ABC** est aussi circonscrit au triangle **HIJ.**

Il faut souligner, et ceci est fréquent dans de telles activités d'exploration, que certains de ces énoncés sont beaucoup plus facile à découvrir (avec Cabri) qu'à prouver. Dans certains cas, on ne pourra trouver aucune preuve suffisamment accessible[9]: dans ces cas-là, les étudiants seront donc confrontés à des énoncés dont ils sont convaincus qu'ils sont vrais, mais dont ils ne comprennent pas pourquoi ils sont vrais. La situation n'est pas préoccupante: il faut cependant veiller à ce que la distinction entre affirmations gratuites, conjectures rationnelles et énoncés démontrés reste très claire dans leur esprit. Bien sûr on préférerait que ces énoncés soient démontrés, et donc possiblement mieux compris: mais en géométrie, comme dans toute activité humaine, on n'arrive pas toujours à réaliser ce que l'on veut.

La démarche hypothético-déductive en géométrie synthétique

Nous espérons qu'au bout de ces deux cours, les étudiants pourront non seulement apprécier

Sans compter les cas où même le ofesseur n'est pas en mesure de ɔuver une preuve, accessible ou n.

le rôle et l'apport de la méthode déductive en géométrie, mais aussi qu'ils pourront eux-mêmes faire des démonstrations, ainsi que vérifier et comprendre des preuves faites par d'autres.

Mais tout ceci se fera dans un cadre axiomatique semblable à celui d'Euclide, en ce sens que certains axiomes seront sous-entendus. L'important nous semble de donner l'habitude de comprendre et de produire une argumentation rationnelle, dont chaque composante peut être justifiée par le recours à des énoncés pouvant *à juste titre* prétendre à l'évidence[10]. C'est ainsi que nous acceptons comme évident et ne nécessitant aucune argumentation supplémentaire d'employer dans une démonstration le fait qu'un point sur une droite divise celle-ci en deux demi-droites, ou qu'une droite dans un plan divise celui-ci en deux demi-plans. De même, nous permettons aussi l'emploi d'énoncés non évidents dans le cours d'une argumentation, pourvu que c ux-ci soient clairement identifiés: ils devront par la suite être eux-mêmes démontrés ou ajoutés aux hypothèses.

Nous n'excluons pas cependant de sensibiliser les étudiants les plus intéressés à une plus grande rigueur dans les méthodes de démonstration (en utilisant, par exemple, des *preuves paradoxales*), et à les aiguiller vers des axiomatisations allant dans ce sens (celle de Hilbert [9] par exemple).

Un peu de recul

Posons-nous la question fondamentale suivante: pourquoi demande-t-on à nos enfants de faire des mathématiques pendant si longtemps?

En premier lieu, tous les membres de notre société doivent acquérir un certain savoir pratique, qui leur sera utile dans leur vie quotidienne. Si nous voulons cerner les connaissances mathématiques effectivement utilisées par le citoyen moyen, celles par exemple qui sont nécessaire pour lire les journaux, force nous est de conclure qu'elles ne dépassent guère l'arithmétique, et sont donc acquises au niveau primaire[11]. On pourrait souhaiter qu'il en soit autrement, et qu'un citoyen éclairé puisse analyser les sondages, interpréter correctement diverses représentations graphiques et comprendre les limites inhérentes aux modèles mathématiques (omniprésents en météorologie, économie, démographie, etc.): malheureusement, ce n'est en général pas le cas.

En second lieu, certains individus (par exemple les ingénieurs, les médecins, les sondeurs d'opinion, etc.) doivent acquérir des connaissances et des habiletés mathématiques dispensées aux niveaux secondaire ou post-secondaire[12]: algèbre, géométrie, calcul différentiel et intégral, probabilités et statistiques, etc. Bien qu'il soit impossible de prévoir dès leur cours secondaire quels sont ceux qui auront besoin d'un tel savoir spécialisé, il nous faut prendre conscience qu'il s'agit là en fin de compte d'une infime proportion de la population.

En dernier lieu, on cite souvent la valeur formatrice des mathématiques pour justifier son importance dans la scolarité obligatoire. On évoque le plus fréquemment le rôle crucial des mathématiques dans l'apprentissage de la pensée déductive; mais on peut aussi en parler comme d'une activité où un individu peut expérimenter à la fois un besoin et un sentiment de compréhension. À notre avis, c'est le facteur le plus important: non seulement cela développe certaines facultés importantes chez l'individu, mais encore cela le rend plus apte à appliquer ses connaissances dans des situations nouvelles.

Malheureusement, si on se fie à la population étudiante qui nous arrive à l'université, les individus semblent profiter bien peu de cette valeur formatrice. Nous avons déjà évoqué (à propos de la géométrie, mais il semble bien que le problème de manque de sens ne soit pas limité à ce domaine) certaines raisons touchant le curriculum qui peuvent expliquer en partie cet état de choses. Mais le passé récent nous a amplement démontré que les curriculums peuvent changer: dans le cas de la géométrie, nous le souhaitons ardemment.

Même si les programmes actuels de géométrie au secondaire s'avèrent décevants, il ne faut pas oublier que ce sont les éducateurs qui con-

10- *Notons que, dans le passé, les mathématiciens se sont heurtés à de nombreuses reprises à des énoncés soit-disant évidents mais qui se sont avérés problématiques: citons à titre d'exemple le principe de la construction de l'ensemble de tous les ensembles ayant une propriété donnée, qui s'est avéré source de contradictions. Pour se protéger de telles éventualités, les mathématiciens ont développé (notamment en géométrie) des méthodes très rigoureuses, qui ont été source de développements nouveaux. Nous croyons cependant que de telles exigences de rigueur dès le départ sont plus de nature à paralyser qu'à stimuler les étudiants.*

11- *De nos jours, il faut aussi remarquer que la calculatrice peut, dans une certaine mesure, suppléer à un manque de connaissance ou d'habiletés arithmétiques.*

12- *De la même façon qu'à la note précédente, les systèmes de calcul symbolique (Maple par exemple) ou divers progiciels mathématiques (comme le Statistical Package for the Social Sciences) peuvent effectuer en grande partie la portion "mécanique" du travail, laissant à l'utilisateur le travail d'analyse et d'interprétation* stituent la ressource la plus essentielle dans l'acte éducatif. C'est pourquoi il est essentiel de les outiller pour qu'ils puissent transmettre non seulement des connaissances mais surtout une formation enrichissante pour leurs élèves.

Conclusion

Pour former les futurs enseignants du secondaire, nous avons choisi de leur donner une formation plus large, axée sur le raisonnement, l'autonomie, l'esprit critique, et leur permettant de placer les concepts qu'ils enseigneront dans une perspective plus générale.

Pour nous, cette démarche est essentielle. Leur formation doit être suffisamment large pour leur permettre de comprendre, évaluer, interpréter et critiquer sur le fond et la logique les programmes qui leurs sont proposés. C'est à cette condition seulement qu'ils pourront contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

Nous essayons de donner une telle formation à nos étudiants, en particulier en géométrie. Mais nos étudiants ont été formés à l'intérieur des programmes que nous décrions tant. Ce travail de formation au raisonnement, à une certaine autonomie vis à vis leur propre formation et à l'esprit critique nous semble de plus en plus difficile.

Nous constatons qu'un cours de géométrie n'est plus suffisant, nous allons en créer un second. Cela sera-t-il suffisant? Il est permis d'en douter même si ça ne peut qu'améliorer les choses.

La société québécoise prend aujourd'hui conscience de l'épouvantable gâchis réalisé dans l'enseignement du français au cours des 10 à 15 dernières années et réagit en en faisant porter tout le poids par les étudiants. Espérons que lorsqu'elle prendra conscience que le gâchis est tout aussi grave en mathématiques qu'en français, nous saurons trouver des solutions autres que de fermer toutes les portes aux étudiants que nous avons contribué à déformer.

Bibliographie

[1] **Programme d'études secondaire: mathématique** (Premier cycle, Second cycle, Option I et Option II), Ministère de l'Éducation du Québec, 1981-1984.

[2] **Guide pédagogique secondaire: mathématique** (Premier cycle, Second cycle B [géométrie], Option I et Option II), Ministère de l'Éducation du Québec, 1981-1987.

[3] G. Breton, P. Mathieu, J.-G. Smith et al., **Mathématique au secondaire BMS,** Éditions HRW, 1981-1987.

[4] M. Drolet, H. Rochette et al., **Mathématique Soleil,** Guérin, 1984-1987.

[5] J-M Laborde et al., **Cabri-géomètre,** Laboratoire des Structures Discrètes et Didactique de l'Université Joseph Fourier de Grenoble, cedic/nathan, 1988.

[6] **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,** National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

[7] **Geometry from Multiple Perspectives,** Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series Grades 9-12, National Council of Teachers of Mathematics, 1991

[8] D. Hilbert et S. Cohn-Vossen, **Geometry and the Imagination,** Chelsea, 1952.

[9] David Hilbert, **Les fondements de la géométrie,** Dunod, 1971.

[10] R. Houde, **The Supposer in the Classroom,** Education Development Center & Sunburst.

[11] N. Rouche et al., **L'archipel des isométries,** GEM, Louvain-la-Neuve, 1982.