Point de vue sur la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire

André Boileau, Section didactique, UQAM

Les organisateurs de cette rencontre m'ont demandé de discuter des cours de mathématiques adaptés aux futurs enseignants de mathématiques, en expliquant les fondements et les justifications derrière les choix faits et les orientations prises dans ces cours, et en illustrant tout cela par le cours de *Structures numériques* que j'ai redéfini dans les années quatre-vingt. Je vais donc commencer par tenter de répondre aux questions qui m'ont été posées dans le cadre restreint de ce cours, ce qui aura l'avantage de rendre le tout plus concret, puis j'étendrai par la suite la discussion à la formation mathématique des enseignants dans un contexte plus général.

La genèse du cours de *Structures numériques*

Quand je suis arrivé à l'UQAM, la formation des maîtres en mathématiques au secondaire était sous la responsabilité de la Famille des sciences, et le cours de *Structures numériques* faisait partie des cours obligatoires du *Baccalauréat d'enseignement en mathématiques*. La description de ce cours se lisait comme suit :

> *Construction des nombres naturels, des nombres entiers relatifs, des nombres rationnels, réels et complexes. Chaque construction est accompagnée de cheminements mathématiques parallèles ainsi que des aspects mathématiques complémentaires. Problèmes mathématiques et pédagogiques relatifs à ces nombres.*
> *Préalables : Algèbre I et Algèbre linéaire I. (Annuaire UQAM[1977-1978])*

On retrouve dans cette description des traces de la période des « mathématiques modernes », où l'on voulait réformer l'enseignement des mathématiques en le rendant plus actuel, utilisant les ensembles comme concept unificateur et les transformations pour ouvrir sur d'autres géométries, le tout accompagné d'une augmentation significative du degré d'abstraction.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0,1\} \\
3 &= \{0,1,2\} \\
4 &= \{0,1,2,3\} \\
&\dots \\
n' &= n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

Une façon d'interpréter le syllabus ci-dessus est de définir les nombres naturels comme des ensembles particuliers (les ordinaux finis – voir ci-contre), les entiers relatifs comme des classes d'équivalence de couples de naturels, les rationnels comme des classes d'équivalence de couples d'entiers relatifs, les réels comme des coupures de Dedekind, et les complexes comme des couples de réels. Tout ça peut être très satisfaisant pour un apprenti mathématicien à qui on veut montrer que tous les objets mathématiques peuvent être définis à partir du concept d'ensemble. Mais cela semble d'une utilité douteuse pour un futur professeur de mathématique qui, très souvent, ne sait pas expliquer pourquoi un nombre comme $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel, ni pourquoi les fractions et les nombres décimaux périodiques décrivent les mêmes objets mathématiques, et se demande peut-être encore si $0,\overline{9}$ ne serait pas, ultimement, *un tout petit peu plus petit* que 1.

Pourtant, la personne qui avait écrit cette courte description pensait que c'était là un cours approprié pour les futurs enseignants, comme la référence aux « Problèmes … pédagogiques » semble l'indiquer. De mon point de vue, ce cours n'était pas (et n'est toujours pas) acceptable pour nos futurs enseignants québécois. Cette divergence de points de vue illustre bien qu'on ne doit pas s'attendre à ce que les questions relatives à la formation mathématique des enseignants reçoivent toujours des réponses acceptées par tous[1].

Mais alors, sur quelles bases décider des changements à apporter à ce cours ? Il fallait tout d'abord que les activités proposées soient mathématiquement pertinentes et enrichissantes pour la clientèle visée. Mais j'ai vite décidé de ne pas me baser de façon trop serrée sur les programmes ministériels (qui connaîtront plusieurs versions différentes pendant la carrière d'un enseignant donné), ni sur les manuels scolaires (qui comportent souvent des faiblesses mathématiques importantes[2]). Je connaissais la démarche de Klein[1932], et l'idée d'approfondir des concepts déjà familiers me semblait prometteuse, même si l'approche utilisée par Klein me semblait trop formelle pour nos étudiants.

En lisant des travaux comme celui de Glaeser[1981], j'ai été tenté d'utiliser l'histoire comme fil conducteur pour réexaminer d'un oeil neuf certains concepts mathématiques essentiels pour un professeur du secondaire : une adaptation de « l'ontogenèse récapitule la phylogenèse », en quelque sorte. Mais j'ai abandonné cette voie quand je me suis rendu compte que l'utilisation systématique de l'histoire introduisait des complexités auxquelles je ne voulais pas soumettre mes étudiants. J'ai cependant continué de faire appel à l'histoire, mais de façon plus marginale[3].

Quand j'ai découvert les travaux de Lebesgue[1975], publiés originellement dans la revue *L'enseignement mathématique* de 1931 à 1935, j'ai été séduit par son approche épistémologique de la construction des nombres réels. Plus tard, en lisant Lemay[1978], j'ai retrouvé une approche semblable[4], mais visant plus spécifiquement de futurs enseignants du primaire.

Ce type d'approche, qu'on peut qualifier de « genèse virtuelle », désigne une démarche simplifiée qu'aurait pu emprunter l'histoire si certaines hésitations ou complications n'avaient pas eu lieu, ou si certaines circonstances avaient été différentes. Par exemple, comment la géométrie aurait pu se développer si les Grecs n'avaient pas eu ces réticences face aux incommensurables? Il y a évidemment plusieurs scénarios possibles, et nous ne recherchons pas celui qui aurait la plus grande vraisemblance historique : le scénario retenu sera celui qui présente le plus grand intérêt pédagogique.

Avant de passer à une description du cours de *Structures* numériques, mentionnons que ce ne sont pas tous les concepts qui se prêtent aussi bien à une approche par genèse virtuelle : les nombres sont des concepts dont le niveau d'abstraction est relativement faible (par rapport aux autres concepts mathématiques). Nous y reviendrons.

---

[1] Soulignons en passant qu'il y a des cas où plusieurs approches viables et intéressantes sont disponibles (voir par exemple NCTM[1973]) : il faut alors faire des choix, et les critères utilisés semblent alors souvent subjectifs.
[2] Voir par exemple Boileau et Garançon [1998].
[3] Une anecdote à ce sujet : après avoir présenté à la classe le documentaire de la BBC "Fermat's Last Theorem" par Simon Singh, j'ai eu la surprise d'entendre un étudiant s'étonner en constatant qu'on créait encore de nouvelles mathématiques de nos jours.
[4] Mentionnons au passage que Rouche[1992] utilise, lui aussi, une approche du même type.

Description du cours de Structures numériques

Le fil conducteur du cours est la création des nombres par l'humanité. Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous ne visons pas à suivre une démarche historiquement correcte, bien que nous fassions occasionnellement référence à des faits historiques. Nous voulons retracer les besoins qui auraient pu être (et ont effectivement été, dans plusieurs cas) à l'origine de l'invention des nombres : le dénombrement, la mesure et le repérage.

Dénombrements et nombres naturels

Le dénombrement d'une collection d'objets donne lieu à plusieurs représentations des nombres naturels : des tas de cailloux, des entailles sur un morceau de bois, diverses écritures (Babylonienne, Égyptienne, Romaine, Indo-Arabe, etc.), et blocs multibases (celle que nous avons choisi de privilégier). Ces représentations reposent sur diverses stratégies de dénombrement : correspondances biunivoques, regroupements simples, regroupements d'ordre supérieur, écriture positionnelle.

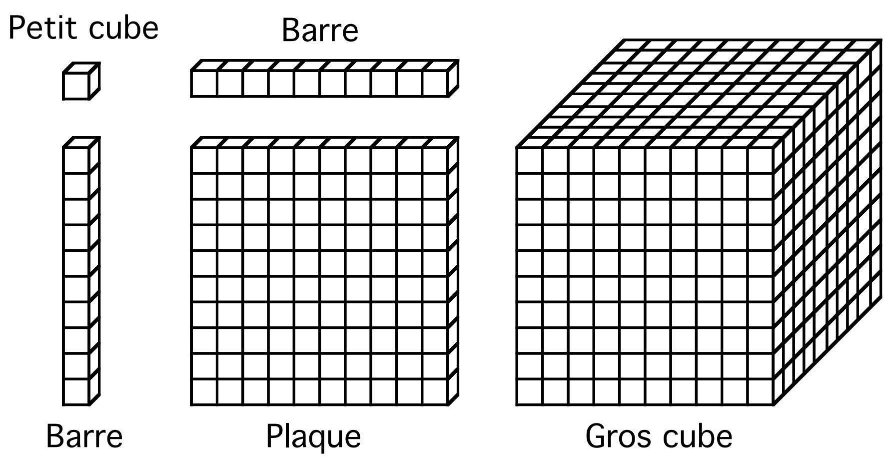


Figure 1. Des blocs multibases, base dix.

Les opérations sur ces nombres naturels (addition, soustraction quand c'est possible, multiplication, division *euclidienne*) sont décrites en termes de dénombrement. Par exemple, la multiplication correspond au dénombrement de « configurations rectangulaires », ou encore au changement d'unité de dénombrement.

Les propriétés habituelles de ces opérations (commutativité, associativité, distributivité, etc.) sont déduites[5] d'un principe général inspiré des travaux de Jean Piaget, la **conservation du nombre**, que nous formulons ainsi : le résultat d'un dénombrement ne dépend pas de la nature des objets dénombrés, de la disposition de ces objets, ni de l'ordre dans lequel a été effectué ce dénombrement.

[5] Je ne prétends pas ici avoir inventé cette démarche. Elle fait partie du « folklore mathématique », et on en trouve des traces dans plusieurs ouvrages dont celui de Courant et Robbins [1969].

Une fois les propriétés habituelles établies, nous pouvons procéder de façon plus traditionnelle et étudier diverses propriétés des entiers naturels, comme les critères de divisibilité, l'algorithme d'Euclide, les notions de PGCD et PPCM, la factorisation première, mentionnant au passage la cryptographie à clé publique (sans aller dans les détails).

Nous insistons fermement sur le rôle que nous attribuons à la démonstration dans notre démarche : son but est autant de faire comprendre que de nous rendre certains de la véracité d'un énoncé. Nous essayons aussi de chasser l'impression de certains étudiants selon laquelle les démonstrations mathématiquement correctes doivent être formelles et symboliques.

Illustrons ce dernier point par un exemple : le critère de divisibilité par trois, à la base dix. La plupart des étudiants savent déjà qu'un nombre est divisible par trois si (et seulement si) la somme de ses chiffres est divisible par trois, mais très rares sont ceux qui peuvent justifier cette affirmation. Traditionnellement, cette étude se fait à un niveau purement symbolique, en utilisant des arguments semblables à celui esquissé ci-dessous :

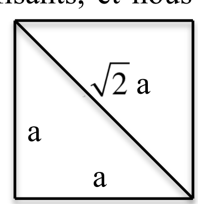
$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{modulo } 3 .$$

Il peut être pertinent de comparer cette démarche de démonstration à une autre, plus intuitive mais moins compacte, qui repose sur un partage de blocs multibases (comme ceux illustrés à la figure 1) en trois parts égales : on constate que le nombre total de blocs correspond à la somme des chiffres du nombre représenté et que, lorsque le partage se fait bloc par bloc, chaque bloc laisse un reste d'un petit cube. C'est donc une façon alternative d'exprimer ce qui est décrit par la formule ci-dessus. Mais le plus intéressant est sans contredit les discussions subséquentes, où l'on s'interroge sur ce qui constitue une démonstration acceptable en mathématiques…

Mesures et nombres décimaux, rationnels et réels positifs

Après avoir compté, l'homme a voulu mesurer. Mais, contrairement à ce qui se passe pour le dénombrement, la mesure dépend de la grandeur mesurée : on ne procède pas de la même façon pour mesurer une longueur, une aire, un volume, un angle, une masse, une durée, etc. Dans le cours de *Structures numériques*, nous nous limitons à la mesure des longueurs, tout en soulignant que les nombres ainsi dégagés (les réels positifs) pourront tout aussi bien servir à la mesure des autres grandeurs.

Une autre différence entre mesure et dénombrement est que nous voulons mesurer des objets mathématiques idéalisés[6], les segments, et non des objets concrets. Si nous nous limitions à mesurer des objets concrets, alors les nombres décimaux seraient tout à fait suffisants, et nous n'aurions même pas besoin de créer les nombres rationnels et réels. Mais en même temps, nous serions condamnés à une démarche continuellement expérimentale, ou encore à des théories boiteuses et affreusement compliquées : en effet, comment décrire la mesure de la diagonale d'un carré si nous ne disposons pas des nombres irrationnels? Discussion intéressante où nous finissons par dire que, parfois, il n'y a rien de plus pratique qu'une bonne théorie!



[6] Nous supposons notamment que nous pouvons subdiviser un segment en un nombre quelconque (arbitrairement grand) de parties congrues, ce qui exclut automatiquement tout objet constitué d'un nombre fini d'atomes.

Avant de décrire différentes stratégies de mesure, nous décrivons une arithmétique des segments : nous pouvons additionner des segments (en les mettant bout à bout) et les soustraire, ainsi que multiplier (addition répétée) et diviser (en parties congrues) un segment par un nombre naturel. Ici encore, nous basons nos discussions sur un grand principe, celui de la **conservation des longueurs**, selon lequel la longueur d'un segment obtenu en mettant bout à bout d'autres segments ne dépend que des longueurs des segments constituants, et est donc indépendante du lieu où l'assemblage a été fait, et de la disposition spatiale relative des divers segments constituants. Il est alors possible d'établir les propriétés « usuelles », puis de procéder de façon plus traditionnelle à partir de celles-ci.

Nous définissons ensuite plusieurs façons de mesurer, qui s'avéreront toutes incomplètes à l'exception de la dernière : mesures entière, rationnelle, décimale et réelle. Dans chaque cas, les nombres associés peuvent être vus comme des comptes rendus d'opérations de mesure. L'étude des propriétés des diverses mesures, et des nombres qui leur sont associés, est une entreprise trop longue pour être poursuivie de façon détaillée dans un seul cours, étant donnée l'expérience mathématique antérieure des étudiants. Mais, chemin faisant, nous explorons plusieurs phénomènes déjà connus mais souvent mal expliqués :

- Des égalités comme $0,\overline{9}=1$ reflètent simplement le fait que, dans les cas où la mesure décimale (finie) existe, la mesure réelle d'un segment peut se faire de deux façons différentes.
- L'axiome d'Archimède est précisément la condition permettant de dire qu'on peut associer une mesure à tout segment. L'axiome de complétude est précisément la condition permettant de dire que tout nombre à virgule illimité peut être obtenu comme mesure d'un segment.
- On peut représenter les divers nombres obtenus via des opérations de mesure comme des points sur une demi-droite (« l'axe des x positifs »), et les diverses opérations sur ces nombres peuvent se représenter par des constructions géométriques simples, qui peuvent se visualiser interactivement à l'aide de logiciels de géométrie dynamique.

Position et nombres négatifs et complexes

Quand nous voulons situer précisément un point par rapport à un autre, la simple distance est insuffisante : il nous faut faire appel à la notion de vecteur. Si on se limite à une dimension (tous les vecteurs sont parallèles), alors la situation ressemble beaucoup aux segments et à la mesure, et le tout revient à ajouter les nombres négatifs. Mais dès qu'on passe à deux dimensions (ou plus!), la situation se complexifie : nos « nombres » cessent d'être ordonnés, et on ne peut définir une multiplication avec les propriétés usuelles qu'en dimension deux (dans le plan) : on obtient alors les nombres complexes.

On arrive ici à la frontière entre l'arithmétique et l'algèbre. L'étude des vecteurs se poursuivra dans le cours *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*, tandis qu'on poursuivra l'étude des nombres dans le cours *Théorie des équations*. Une dernière remarque : cette suite de cours veut contribuer à compléter la formation mathématique des futurs professeurs de mathématiques au secondaire, mais elle se limite à approfondir des concepts qui sont au programme au secondaire et au collégial. Il me paraît dommage de ne pas pouvoir leur offrir (faute de temps) un aperçu significatif de mathématiques plus avancées. Il en est de même dans les autres domaines où on les forme : géométrie, analyse, probabilités et statistiques, histoire des mathématiques.

Discussion autour du cours de Structures numériques

Motivation des étudiants

Quand je me suis attelé à la refonte du cours de *Structures numériques*, je me suis demandé comment convaincre des personnes qui pensent bien connaître les divers systèmes de nombres de se remettre à les étudier. J'ai eu l'idée de les soumettre à une mise en scène où je les amènerais à douter d'une de leurs connaissances fondamentales : la commutativité de la multiplication des nombres naturels.

J'ai donc inventé de toutes pièces une nouvelle selon laquelle un nouvel ordinateur, travaillant sur des nombres « tellement grands qu'ils dépassent l'imagination », avait trouvé deux nombres naturels a et b et vérifié que $a \times b$ et $b \times a$ ne donnaient pas le même résultat. Je continuais en rapportant qu'il y avait des personnes qui doutaient de ce résultat, tandis que d'autres l'acceptaient volontiers. Puis je demandais à mes étudiants de se prononcer.

Comme je m'en doutais, très peu de personnes ont pu donner un argument vraiment convaincant pour écarter la possibilité d'une telle découverte. Mais, à ma grande surprise, certains futurs professeurs ont eu des réactions pour le moins surprenantes : « ce n'est qu'une exception qui confirme la règle », « on peut cacher cette découverte aux élèves et continuer à enseigner que c'est commutatif, car les nombres en présence sont très grands et on ne les rencontrera jamais dans la vie courante », « peut-être que les lois changent quand les nombres deviennent très grands », etc. (Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter Boileau [2001].)

Les discussions qui en ont découlé ont été fort intéressantes et source d'une grande motivation. Mais je ne pouvais répéter cette expérience chaque année, car l'information se transmettait entre les cohortes d'étudiants et l'effet de surprise était perdu. J'ai donc remplacé cette activité par un *atelier de départ*, où je rappelais plusieurs faits apparemment anodins sur les nombres en demandant d'expliquer *pourquoi* ils étaient vérifiés : par exemple

- Est-ce que $+\infty$ et $-\infty$ sont des nombres? Pourquoi, ou pourquoi pas ?
- Pourquoi la multiplication de deux nombres *négatifs* donne-t-elle un nombre *positif* ?
- Pourquoi étudie-t-on des nombres qui ressemblent à « 3,1415926535… » mais pas d'autres « nombres » qui pourraient ressembler à « …5356295141,3 » ?

Avec le temps, je me suis rendu compte qu'il valait mieux intégrer de telles questions tout au long du cours.

Bien entendu, de telles « questions-chocs » ne sont pas les seuls moyens utilisés pour motiver les étudiants. Certains moyens ne sont pas spécifiques au cours de structures numériques : par exemple, indiquer qu'un sujet est au programme d'étude au secondaire, ou encore montrer qu'il est présent dans un ou plusieurs manuels scolaires, avant d'entreprendre son étude.

Cependant, dans le cas du cours de *Structures numériques*, on peut souvent prendre avantage du fait que les connaissances des étudiants sont essentiellement rattachées à la base dix, et proposer d'utiliser d'autres bases pour les aider à prendre du recul : par exemple

- pour expliquer le fonctionnement de l'algorithme d'addition ou de multiplication d'entiers naturels (les automatismes sont omniprésents en base dix seulement)
- pour entrevoir l'existence de nombres à virgules à d'autres bases (on peut subdiviser l'unité de mesure en un nombre de parties congrues différent de dix), mais aussi l'équivalence avec les nombres réels base dix tels que nous les connaissons.

Nombres et technologies

Le recours à des moyens auxiliaires n'est pas nouveau : on se rappelle le temps pas si lointain où l'on apprenait à se servir des tables mathématiques et des règles à calcul; et, déjà dans Klein[1932], on évoque certaines machines à calculer mécaniques. Mais le phénomène a pris beaucoup d'ampleur depuis : ne dit-on pas maintenant que nous vivons dans un monde numérique ?

Il y a quelques années, on analysait encore, dans le cours de *Structures numériques*, l'impact des diverses représentations informatiques des nombres dans les calculatrices et les ordinateurs : base de représentation (généralement dix pour les calculatrices et deux pour les ordinateurs) et représentation en virgule flottante, imprécisions dans les calculs et leur accumulation, etc. Par exemple, on constatait des phénomènes numériques étranges sur nos calculatrices (voir figure 2) et on devait tenter de les expliquer.

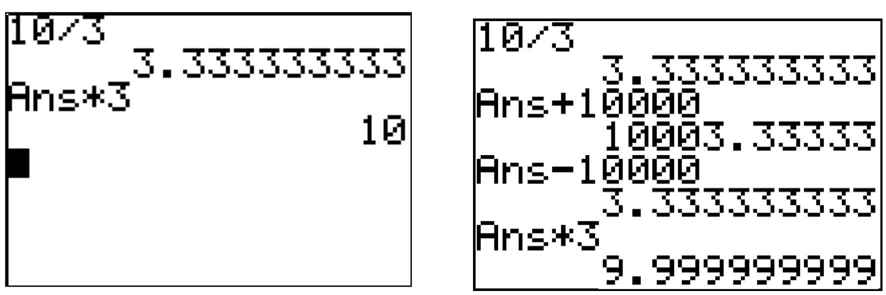


Figure 2. À gauche, on divise 10 par 3, puis on multiplie immédiatement le résultat par 3.
À droite, on additionne puis on soustrait 10 000 avant de multiplier par 3.
Pourquoi cette différence dans les résultats obtenus ?

Mais, depuis l'apparition du cours *Progiciels dans l'enseignement des mathématiques I*, cette étude se fait plutôt dans ce cours technologique. (Voir Boileau et Garançon [2009].)

Soulignons cependant que le cours de *Structures numériques* est source d'une grande variété d'algorithmes, dont certains seront éventuellement repris dans le cours *Progiciels dans l'enseignement des mathématiques II* : qu'on pense simplement à

- des algorithmes de conversion entre deux bases
- l'algorithme d'Euclide, pour calculer de PGCD (et le PPCM) de deux entiers naturels
- des algorithmes pour déterminer si un nombre est premier ou pas
- des algorithmes pour déterminer la factorisation première d'un nombre.

Je souligne ici le pluriel employé pour désigner certains types d'algorithmes. Il est intéressant pour les étudiants, qui se demandent souvent « à quoi servent les mathématiques », de noter que les mathématiques peuvent contribuer fortement à l'amélioration d'algorithmes. Ainsi, pour déterminer si un nombre n est premier, il peut sembler nécessaire d'examiner chacun des naturels entre 2 et $n-1$ pour vérifier si oui ou non ce nombre a des diviseurs non triviaux. Mais on peut améliorer considérablement les performances de l'algorithme si on se convainc (à l'aide d'un raisonnement mathématique très simple) qu'il suffit de tester les naturels entre 2 et $\sqrt{n}$. Et si on fait entrer en jeu des mathématiques plus sophistiquées, les améliorations obtenues sont encore plus considérables (voir Delahaye[2000]). Cette question de vitesse a son importance car les nombres premiers jouent un rôle crucial dans la cryptographie à clé publique, qui permet notamment un échange sécuritaire d'informations sur le Web.

Versions alternatives du cours Structures numériques

Au fil des ans, plusieurs collègues et chargés de cours ont donné le cours de *Structures numériques*. Certains ont conservé la forme que je lui avais donnée, tandis que d'autres l'ont modifié en profondeur. Je me rappelle notamment l'un d'eux me racontant qu'il avait utilisé les suites de Cauchy plutôt que la mesure pour l'étude des nombres réels.

Il est indéniable que l'approche via les suites de Cauchy est *techniquement* plus simple, mais est-ce *épistémologiquement* plus simple ? En d'autres mots, laquelle des deux approches précédentes jette le plus de lumière sur les origines (historiques ou reconstruites) et la nécessité des nombres réels positifs ? Alors qu'il semble naturel de vouloir mesurer tous les segments[7], on peut se demander pourquoi toutes les suites de Cauchy devraient converger. Et la définition d'un nombre réel comme une classe d'équivalence de suites de Cauchy en fait un objet conceptuellement beaucoup plus complexe qu'un nombre à virgule illimité.

Quoi qu'il en soit, cela illustre une fois de plus qu'il semble utopique d'atteindre l'unanimité à propos des contenus et des méthodes pour former mathématiquement les futurs enseignants. Peut-être vaut-il mieux se dire que la diversité des points de vue est une richesse dans la formation des étudiants…

Discussion générale autour des cours de mathématiques pour futurs enseignants

Le cours de *Structures numériques* me semble constituer un élément singulier dans l'ensemble des cours de mathématiques destinés aux futurs enseignants en mathématiques au secondaire inscrit à l'UQAM. En effet, l'approche de genèse virtuelle, qui lui convient si bien, semble moins bien adaptée aux autres cours, peut-être parce que les nombres (et aussi la géométrie synthétique) sont apparus très tôt dans l'histoire de l'humanité. Par comparaison, l'algèbre et à fortiori l'analyse sont apparus beaucoup plus tard, et en réponse à des problèmes plus sophistiqués.

---

[7] Pour s'en convaincre, on peut rappeler l'émoi causé par la découverte de sous-ensembles non mesurables de la droite, du plan et de l'espace. On sait maintenant que, si on abandonne la propriété d'additivité dénombrable des mesures, il existe des mesures définies pour **tous** les sous-ensemble de la droite et du plan, mais ce n'est pas le cas pour l'espace, ainsi que le démontre le paradoxe de Banach-Tarski (voir Wagon[1994]).

Il faut aussi souligner que, même dans le cours de *Structures numériques*, nous faisons grand usage de l'argumentation et de la déduction, sans pour autant chercher à proposer une genèse virtuelle de ce type de démarche intellectuelle.

Le choix des contenus et des méthodes à enseigner

Prenons donc un peu de recul et demandons-nous d'abord, dans un contexte plus général, comment choisir les contenus mathématiques devant être enseignés aux futurs professeurs dans cette discipline, à l'ordre secondaire. À priori, on doit tenir compte de la formation mathématique antérieure de nos étudiants et des programmes ministériels ainsi que des diverses collections de manuels qui les mettent en œuvre. Mais ce dernier critère s'avère peu stable dans le temps, alors que nous devons préparer des personnes qui devront enseigner les mathématiques sur une période de quelques décennies. Pour ne citer qu'un exemple, les contenus de la portion géométrique des mathématiques enseignées au secondaire ont fluctué considérablement au fil des années (voir Boileau et Garançon[1993]). On doit donc s'inspirer de ces données, sans que ce soit normatif…

On vient d'évoquer le point de départ, mais qu'en est-il du point d'arrivée? Voulons-nous des professeurs maîtrisant parfaitement les contenus de niveau secondaire mais pas beaucoup plus, ou au contraire désirons-nous former des professeurs ayant une vision et une maîtrise beaucoup plus vaste des mathématiques? Mon expérience avec les étudiants arrivant à l'UQAM me montre clairement qu'il ne faut pas placer la barre trop haut si l'on désire qu'une portion non négligeable des arrivants puisse compléter avec succès leur scolarité, pour contribuer ainsi à fournir à la société québécoise les professeurs dont elle a besoin.

Étayons cette dernière affirmation par quelques remarques sur l'acquisition d'habiletés à prouver et à résoudre des problèmes. À leur arrivée au BES (Baccalauréat en Enseignement Secondaire), plusieurs étudiants éprouvent des difficultés considérables à faire des preuves, mais, de plus, ne voient pas l'intérêt d'une telle démarche en mathématiques : pour eux, les mathématiques ne sont qu'une suite de connaissances qu'ils ont apprises et qu'ils enseigneront à leurs élèves, mais ils ont vécu peu d'expériences de compréhension profonde de ces connaissances, et il leur apparaît difficile de concevoir comment de nouvelles mathématiques peuvent être créées. À la fin du BES, je ne suis pas sûr que tous nos étudiants aient une juste appréciation du rôle de la preuve en mathématiques, mais du moins la plupart d'entre eux ont développé des habiletés à faire des démonstrations élémentaires, et à résoudre des problèmes relatifs aux mathématiques de niveau secondaire. Je suis persuadé que si on leur demandait systématiquement d'aller plus loin, par exemple de faire des démonstrations formelles en algèbre abstraite, ou des raisonnements subtils en analyse réelle, on constaterait alors une proportion non négligeable d'abandons et d'échecs, et cela, non pas parce qu'ils sont intellectuellement inférieurs, mais essentiellement pour des raisons de motivation (la pratique de l'enseignement semble les interpeler plus fortement que l'expertise disciplinaire qu'elle présuppose pourtant) et de temps (la formation mathématique n'occupe que 24 crédits sur les 120 que compte le BES).

En fait, ma réponse à cette question des contenus tient en une phrase, qui était la devise de mon école secondaire : *non multa, sed multum* (pas beaucoup, mais bien fait). Je ne cherche même pas à couvrir exhaustivement tout le contenu des programmes du secondaire, ni à envisager systématiquement les prolongements présents aux niveaux subséquents. Avec nos étudiants, je veux étudier *en profondeur* les principaux concepts rencontrés au secondaire et quelques-uns de leurs prolongements, en cherchant à les **rendre autonomes** pour le cas (fort probable) où ils devraient parfaire leurs connaissances plus tard dans leur carrière. C'est donc ce qui m'a guidé dans tous les cours de mathématiques que j'ai été appelé à donner à des professeurs (en formation initiale ou en exercice), que ce soit en arithmétique, algèbre, géométrie ou analyse.

Cela nous amène à parler des méthodes mathématiques, que nous devrons utiliser pour réaliser cette étude *en profondeur*. En mathématiques, toute étude qui se veut non superficielle doit faire jaillir un certain niveau de *compréhension* des phénomènes étudiés. Ce ne sont pas tous nos étudiants qui ont eu la chance de vivre des expériences de compréhension en profondeur en mathématiques. En fait, certains utilisent ce terme à la légère, pour désigner parfois une simple connaissance d'un résultat. Il faut donc leur faire vivre plusieurs expériences où la compréhension d'un phénomène à priori mystérieux s'accroît progressivement, jusqu'à leur procurer une impression de clarté, d'évidence (voir, par exemple, Boileau[2009]).

Mais comment susciter cette compréhension, surtout à propos de sujets que nos étudiants pensent (à tort) bien connaître? Commençons par citer une réflexion, attribuée à Georges Pólya :

> *Les mathématiques ressemblent à une automobile, l'intuition jouant le rôle de l'accélérateur, et la rigueur celui du frein. Une automobile sans accélérateur est inutile, mais une automobile sans frein est inutilisable.*

En ce qui a trait à la rigueur, nous n'avons pas trouvé de « voie royale ». Elle est fort peu développée chez la plupart des étudiants qui arrivent à l'UQAM, et sa construction est souvent douloureuse pour ceux-ci. Comme nous l'avons déjà mentionné (à propos du critère de divisibilité par trois), nous essayons de montrer qu'elle peut revêtir plusieurs visages, et qu'une bonne discussion en « mots de tous les jours » peut valoir autant sinon plus qu'une « preuve formelle ». Nous proposons souvent plusieurs justifications d'un même phénomène, en soulignant que, s'il est normal qu'on veuille se satisfaire de son explication préférée, un professeur doit aussi prendre conscience que l'argumentation favorite d'un élève donné ne coïncidera pas nécessairement avec celle de son professeur, et que c'est à ce dernier et non au premier de s'adapter.

Quant à l'intuition, on propose parfois de la bâtir via l'exploration d'un ensemble significatif de cas particuliers. Par exemple, au secondaire, lors de l'étude du théorème de Pythagore, on proposera aux élèves de mesurer les longueurs des côtés d'un certain nombre de triangles rectangles et de vérifier numériquement que la relation attendue est bien présente. Encore là, il faut préciser que, tout comme pour la rigueur, il y a de la diversité et des niveaux dans l'intuition. Par exemple, une façon plus riche de développer autrement son intuition à propos du théorème de Pythagore serait de se créer une imagerie mentale qui pourrait prendre la forme d'un casse-tête semblable à celui de la figure 3.

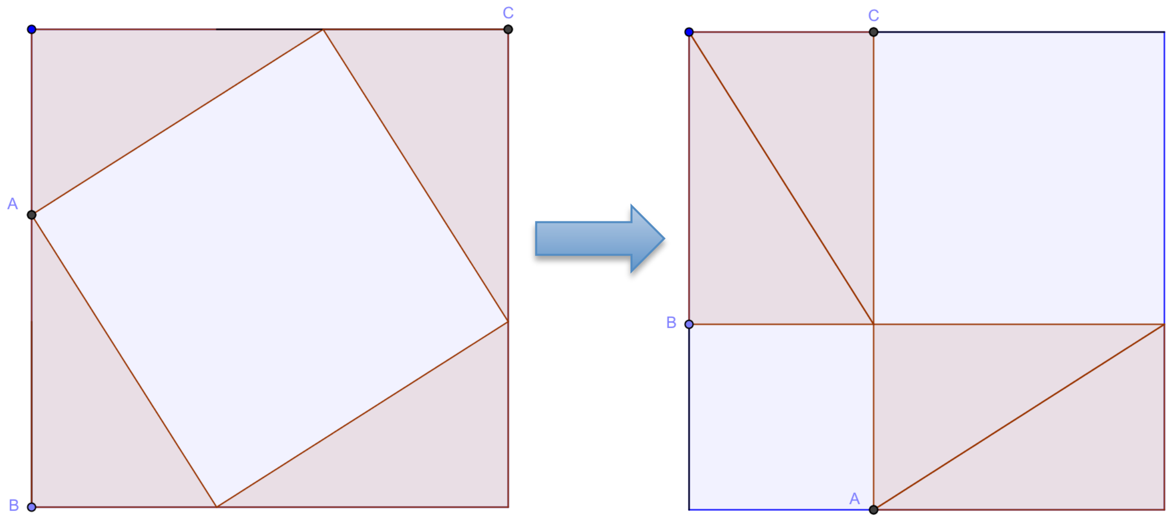


Figure 3. En déplaçant trois des quatre triangles dans le grand carré de gauche, on obtient la figure de droite : l'aire du petit carré à gauche est donc égale à la somme des aires des deux petits carrés à droite.

Dans un cas comme dans l'autre, on doit faire appel à une mathématique expérimentale dont le rôle, tout comme la mathématique déductive, doit être précisé. Soulignons qu'un des impacts de l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques est de faciliter ce recours à des mathématiques expérimentales, et de proposer des représentations visuelles[8] plus dynamiques et plus variées. Nous y reviendrons.

Les tâches dévolues au professeur, et celles dévolues aux étudiants

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, ma conversion de mathématicien à didacticien des mathématiques n'a pas beaucoup influencé ma façon de concevoir l'enseignement des mathématiques. Celle-ci repose toujours sur la prémisse que les mathématiques sont une voie d'accès privilégiée à un certain type de connaissances, et qu'il est très riche pour un être humain de se familiariser avec ses méthodes ainsi que ses limitations : la compréhension (intuition **et** rigueur) doivent donc être au coeur de son apprentissage. Je crois aussi qu'il n'y a toujours pas de « voie royale pour les mathématiques » et que, pour avancer dans ce domaine, un individu doit être guidé par quelqu'un de plus aguerri, idéalement dans une dynamique de maître-apprenti.

Mais l'enseignement se fait rarement dans un contexte individualisé. À l'UQAM, les cours, souvent donnés à des groupes de plus de trente étudiants, s'étendent en général sur quinze semaines comportant trois heures de « théorie » et deux heures de « travaux pratiques ». Pendant les périodes « théoriques », j'essaie d'instaurer avec mes étudiants un dialogue visant une découverte guidée de concepts et de méthodes mathématiques. Bien que j'accepte à l'occasion de diverger un peu au gré de suggestions d'étudiants que je juge intéressantes, j'essaie de garder le cap sur les objectifs que je me suis fixés. Les interventions des étudiants me servent donc principalement à identifier certaines de leurs difficultés et à adapter ma démarche en conséquence. Le lecteur désirant se faire une idée plus concrète de ma façon de faire pourra

[8] Notons en passant que la figure 3 a été obtenue en utilisant GeoGebra, un logiciel de géométrie dynamique.

visionner la démarche (incomplète) d'un maître en la matière (Polya[1965]) qui, encore aujourd'hui, est une source d'inspiration pour moi.

Pendant les séances de travaux pratiques, je suggère aux étudiants une série d'exercices et de problèmes avec divers objectifs : mettre en pratique les connaissances et les habiletés développées pendant les cours « théoriques », pousser plus loin l'étude de certains concepts, ou même procéder à une exploration de certains thèmes qui seront étudiés en détail plus tard. L'initiative est alors totalement dans le camp des étudiants : je me contente de leur faire certaines suggestions en réponse à leurs questions et, quand une discussion pour tout le groupe surgit, j'essaie de baser mes interventions sur des productions d'étudiants.

Une dernière remarque à propos des travaux pratiques. L'université nous permet d'engager des étudiants plus expérimentés, ayant déjà suivi avec succès le cours en question, pour animer les séances de travaux pratiques. Je n'y ai recours que quand le cours est déjà bien rodé et que j'ai eu l'occasion de tâter le pouls des étudiants en animant moi-même à plusieurs reprises les travaux pratiques en question. Je considère en effet que cette portion du cours, où c'est le professeur qui est à l'écoute des démarches des étudiants, est une partie essentielle de notre travail de pédagogue. C'est pour cette raison que, que j'anime moi-même ou non les séances de travaux pratiques, je transforme parfois des portions des cours « théoriques » en mini séances de travaux pratiques…

Quelques mots en terminant sur le travail en équipe, qu'on a beaucoup mis de l'avant ces dernières années, au point où certains professeurs obligent carrément *tous* leurs élèves à travailler en équipe. En ce qui me concerne, je ne force jamais personne à travailler en équipe : j'essaie même de limiter la taille des équipes lors de travail sur des projets évalués, et ce, pour éviter que certains se greffent à des équipes pour profiter indument du travail des autres. En fait, quand les étudiants travaillent sur des projets d'envergure, j'ai constaté que les meilleurs projets, ainsi que les pires, sont la plupart du temps créés par des individus, tandis que les équipes produisent les projets intermédiaires… Je ne doute pas que, pour certains individus, le travail d'équipe (librement consenti) peut être une source importante de motivation et de stimulation intellectuelle. Mais je suis aussi fermement convaincu que, dans certaines circonstances, certains individus seront plus productifs et plus heureux s'ils travaillent seuls. En éducation, les solutions « uniformes » ne sont, selon moi, pas de mise.

L'utilisation de la technologie

Au fil des ans, je me suis mis à utiliser la technologie de plus en plus, tant pour mes projets personnels et professionnels que dans le cadre de mes enseignements. Ce n'est pas surprenant, étant donnés les liens étroits reliant mathématiques et technologies.

- La pensée algorithmique

La pensée algorithmique est omniprésente en mathématiques, que l'on pense à la théorie des nombres (l'algorithme d'Euclide, par exemple), l'analyse numérique (la résolution de systèmes d'équations, linéaires ou non, par exemple), ou la géométrie (on n'a qu'à penser aux constructions avec règle et compas). Le pendant technologique de cela est la programmation, qu'elle s'effectue dans un contexte traditionnel (voir, par exemple, la section 3.2 de

Boileau[1996]) ou moins standard, comme la programmation d'une feuille de calcul dans un tableur, ou la gestion des cas de figure dans un logiciel de géométrie dynamique.

Bien que le recours à la programmation dans l'enseignement des mathématiques soit moins répandu qu'il y a quelques années, comme en témoigne le déclin de l'utilisation des environnements Logo, il serait dommage d'oublier complètement les apports d'une telle activité. Pour n'évoquer qu'un exemple, la démarche consistant à écrire un petit programme visant à déterminer si un nombre naturel est premier ou non apporte un éclairage différent ainsi qu'un enrichissement par rapport aux activités traditionnelles que sont l'énoncé d'une définition et la démonstration de quelques propriétés en découlant. Regardons cet exemple de plus près.

Supposons qu'on veuille écrire un programme pour déterminer si un entier naturel n est premier ou non. Dans un premier temps, on peut chercher à utiliser directement la définition de nombre premier et compter, parmi les entiers de 1 à n, le nombre de diviseurs de n : n sera premier si et seulement si ce nombre de diviseurs est de 2. Mais on est vite déçu par la lenteur du programme en question : par exemple, sur la calculatrice graphique *TI-84 Plus*, un tel programme met presque vingt secondes pour déterminer que 1021 est un nombre premier.

En y réfléchissant un peu, on peut facilement rendre notre programme plus efficace. Dans un premier temps, on note qu'on peut se limiter à chercher un diviseur parmi les nombres suivants : 2 et les nombres impairs entre 3 et $n - 1$: n sera premier si et seulement si il n'y a pas de diviseur parmi ces nombres. Grosso modo, on vient de diviser le nombre de cas à considérer par 2. Mais un moment de réflexion nous montre qu'on peut remplacer la borne $n - 1$ par $\sqrt{n}$: en effet, si l'on suppose que l'on puisse exprimer n comme un produit $a \times b$, alors il est clair que a et b ne peuvent être tous les deux strictement plus grands que $\sqrt{n}$ (puisque, dans ce cas, leur produit serait strictement plus grand que n), et il est donc établi que l'un des facteurs devra être plus petit ou égal à $\sqrt{n}$. Ici, le nombre de cas à considérer est réduit de façon drastique : grosso modo à la moitié de $\sqrt{n}$. Un nouveau programme, écrit en tenant compte de ces nouvelles spécifications, mettra moins d'une seconde pour déterminer que 1021 est un nombre premier. On voit donc qu'un peu de réflexion mathématique peut améliorer considérablement la performance de certains programmes, ce qui peut, dans certains cas, faire la différence entre un programme utile et un programme inutilisable en pratique.

- Les représentations informatiques d'objets mathématiques

Nous connaissons tous de nombreux exemples illustrant la richesse de telles représentations, que ce soit les nombres en virgule flottante dans les calculatrices et les tableurs, les graphes de fonctions dans les calculatrices graphiques, les objets géométriques simples (droites, cercles, coniques, lieux) dans les logiciels de géométrie dynamique, les courbes et les surfaces de Bézier dans les logiciels graphiques vectoriels, ou même les représentations spatiales des logiciels de lancer de rayons (« Ray Tracing »).

Nous sommes maintenant habitués au dynamisme présent lors de nos interactions avec ces représentations, mais nous découvrons à peine la liberté de créer des représentations moins usuelles, pouvant servir nos objectifs pédagogiques[9]. Par exemple, dans le cours *Théorie des équations*, je me suis vite rendu compte qu'une preuve du théorème fondamental de l'algèbre était hors de portée de nos étudiants, du moins dans le temps que je désirais consacrer à ce sujet. J'ai alors voulu leur faire vivre une expérience « immersive » leur permettant de bâtir une forte intuition non seulement de la véracité du théorème en question, mais aussi d'une démonstration possible. La figure 4 illustre, hélas, de façon statique, le genre de représentation utilisée. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter la page Web associée au présent texte (Boileau[2011]).

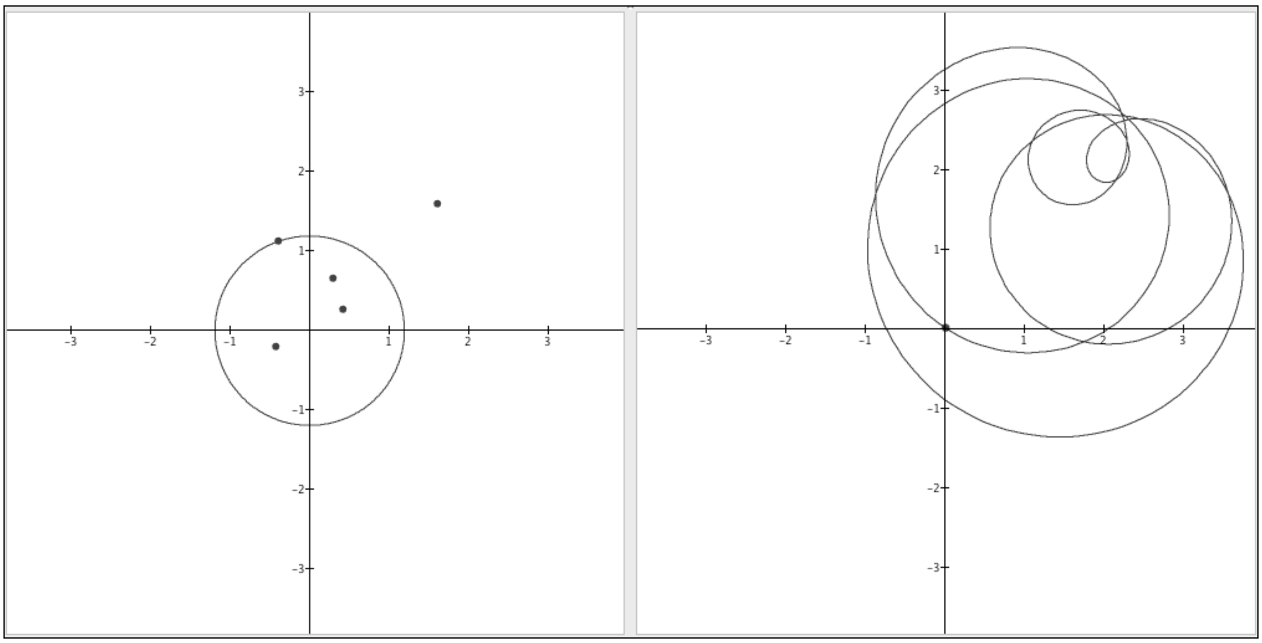


Figure 4. Représentation informatique de l'image d'un cercle centré à l'origine par un polynôme à coefficients complexes. Le dynamisme de cette représentation peut aider à construire une intuition pouvant être réinvestie dans une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

- Mathématiques expérimentales

Par ses diverses représentations d'objets mathématiques, la technologie est susceptible de mettre à la disposition des étudiants un laboratoire virtuel où l'on peut expérimenter en mathématiques. Mais il ne faut pas oublier de rappeler à ceux-ci que la technologie n'est pas toujours transparente (reportez-vous à la figure 2), et qu'on doit apprendre à bien interpréter et à bien utiliser toutes ces représentations (voir Boileau et Garançon[2009]). De plus, ce genre de démarche ne peut généralement qu'engendrer une compréhension partielle, en développant des intuitions qu'il reste encore à vérifier rigoureusement (pour un exposé « élémentaire » de cette problématique, voir Boileau[2009]).

[9] Le lecteur intéressé à d'autres exemples pourra jeter un coup d'œil aux pages Web suivantes :

- sur les transformations de Moebius (http://www.ima.umn.edu/~arnold/moebius/)
- sur la quatrième dimension (http://www.dimensions-math.org/)
- sur les dallages non périodiques (http://penrose.dmf.unicatt.it/)

Compte tenu de ces caveats, il peut être très enrichissant de conduire diverses explorations mathématiques à l'aide de la technologie. On peut ainsi arriver à résoudre avec une précision suffisante certains problèmes (comme le calcul des remboursements hypothécaires) en réduisant le niveau mathématique requis (voir Boileau et Garançon[2007]). Mais on peut aussi illustrer de façon spectaculaire que de telles approximations ne sont pas toujours suffisantes, et qu'une solution mathématique exacte est parfois irremplaçable (voir la figure 5 et le site Boileau[2011] pour une démonstration interactive).

- Applications des mathématiques

Compte tenu de la variété et de l'omniprésence des applications des mathématiques dans notre monde moderne (cryptage des informations lors de leur échange sur internet, calculs effectués par les GPS, algorithmes de compression-décompression de contenus audiovisuels, etc.), il est toujours surprenant d'entendre nos étudiants (et leurs élèves) s'enquérir de l'utilité des mathématiques. Il faut aussi savoir interpréter cette question au second degré, comme une indication de leur manque de motivation à étudier le type de mathématiques qu'on leur présente. Mais cela reflète aussi le niveau de complexité élevé de plusieurs applications mathématiques réalistes, qui nous empêche de leur faire une place plus grande dans l'enseignement.

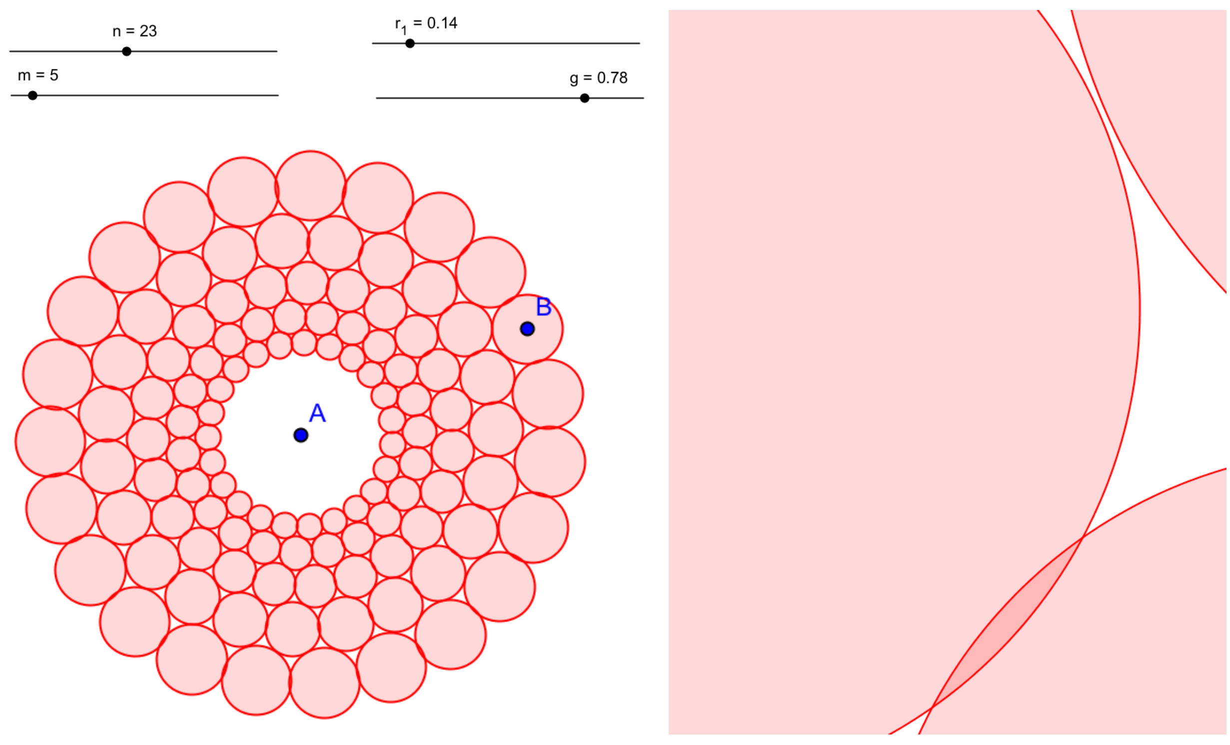


Figure 5. À gauche, l'utilisateur a donné des valeurs aux divers paramètres en espérant créer une figure où les cercles seraient tangents. En y regardant de plus près (à droite), il constate qu'il n'a pas réussi.

La source traditionnelle d'applications des mathématiques était la physique élémentaire (par exemple, le mouvement uniforme ou uniformément accéléré). Pour des raisons qui ne sont pas totalement claires à mes yeux, certains de nos étudiants sont peu ouverts à tout ce qui touche de près ou de loin la physique. Cependant, quelques essais très limités me laissent croire que l'utilisation de la technologie, avec ses sondes et ses logiciels de mesure à partir de vidéos, pourrait aider à réduire certaines réticences.

Soulignons que la technologie semble aussi, en elle-même, une source inépuisable d'exercices et de problèmes mathématiques, et que le graphisme informatique se prête particulièrement bien à un traitement assez simple pour être accessible. On peut penser tant à des situations isolées (comme celle illustrée à la figure 5) qu'à des démarches plus globales : je cherche encore à trouver le temps de mettre au point et de donner un cours *d'Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* basé essentiellement sur la problématique de la représentation plane d'objets tridimensionnels (voir Boileau[2006] et Boileau[2006a] pour quelques pas dans cette direction).

En guise de conclusion

Dans ce qui précède, j'ai voulu indiquer quelques pistes pour décrire ma vision de la formation mathématique des futurs enseignants dans cette discipline au secondaire. Mais enseigner est une activité complexe, qui implique l'individu dans sa totalité. Toutes ses expériences (qu'elles soient mathématiques, didactiques, affectives, ou autres) peuvent être mises à contribution, et il serait bien présomptueux de prétendre cerner toutes les influences qui sont à l'œuvre.

Bibliographie

- Boileau, André et Garançon, Maurice [1993]. *Géométrie et formation des maîtres au secondaire*, Bulletin de l'AMQ.
  Disponible sur le Web : http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives/1993/1/1993-1-part15.pdf
- Boileau, André [1996]. *Notes pour le cours de Structures numériques*, Polycopié, UQAM.
- Boileau, André et Garançon, Maurice [1998]. *L'aire : une notion plus riche qu'il n'y paraît*, Revue Envol du NCTM.
  Disponible sur le Web : http://www.math.uqam.ca/~boileau/Textes/Aires.pdf
- Boileau, André [2001]. *De la compréhension et de la certitude en mathématiques : le cas de la commutativité de la multiplication des naturels*, Bulletin de l'AMQ.
  Disponible sur le Web : http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives/2001/1/2001-1-part8.pdf
- Boileau, André [2006]. *Quand les segments ressemblent à des escaliers…* In *Montrez ces mathématiques que je ne saurais voir*, Éditions Nouvelles.
  Complément sur le Web : http://www.math.uqam.ca/~boileau/Segments.html
- Boileau, André [2006a]. *La double nature du produit vectoriel*, Actes du Congrès de l'AMQ.
  Complément sur le Web : http://www.math.uqam.ca/~boileau/AMQ2006.html
- Boileau, André et Garançon, Maurice [2007]. *Mathématiques contextualisées et technologie : le cas des hypothèques*, Atelier au GRMS.
  Complément sur le Web : http://www.math.uqam.ca/~boileau/GRMS2007.html
- Boileau, André [2009]. *Découverte mathématique à la polyvalente*, Revue Accromath.
  Disponible sur le Web : http://accromath.uqam.ca/contents/pdf/decouverte.pdf
- Boileau, André et Garançon, Maurice [2009]. *Outils informatiques pour les enseignants de mathématiques*, Loze-Dion.
  Complément sur le Web : http://www.math.uqam.ca/~expresso/LivreLogicielsOutils/

- Boileau, André [2011]. Complément sur le Web du présent texte :
  http://www.math.uqam.ca/~boileau/Formation_Mathematique.html
- Courant, Richard et Robbins, Herbert [1969]. *What is Mathematics ?*, Oxford University Press.
- Delahaye, Jean-Paul [2000]. *Merveilleux nombres premiers : Voyage au coeur de l'arithmétique*, Belin•Pour la science.
- Glaeser, Georges [1981]. *Épistémologie des nombres relatifs*, Recherches en didactique des mathématiques vol 2 no 3.
- Groupe aha[1999]. *Vers l'infini pas à pas : approche heuristique de l'analyse*, De Boeck Wesmael.
- Klein, Felix [1932]. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Macmillan.
  Vol 1 : *Arithmetic, Algebra, Analysis*
  Vol 2 : *Geometry*
- Lebesgue, Henri [1975]. *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard.
  Version PDF via http://retro.seals.ch, revue l'Enseignement Mathématique vol 31 à 34.
- Lemay, Fernand [1978]. *Genèse des systèmes de nombres à partir de l'idée de mesure*, Laboratoire de didactique de la Faculté des Sciences de l'Éducation de l'Université Laval.
- NCTM [1973]. *Geometry in the Mathematics Curriculum*, Thirty-sixth Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.
- Polya, George[1965]. *Let Us Teach Guessing: A Demonstration with George Polya,* Film distribué par la Mathematical Association of America.
- Rouche, Nicolas [1992]. *Le sens de la mesure*, Didier Hatier.
- UQAM[1977-1978]. Annuaire des programmes et des cours.
  Disponible sur le Web : http://www.registrariat.uqam.ca/Pdf/annuaire/annuaire_7778.pdf
- Wagon, Stan[1994]. *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press.