# Comment découvrir : l'analyse des anciens

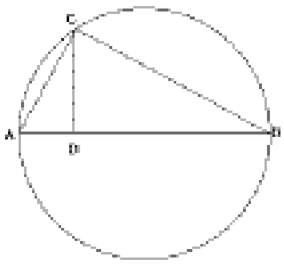
**Pappus d'Alexandrie (290-350)**,

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history//Mathematicians/Pappus.html

La Collection Mathématique, Trad. Paul ver Eecke, Paris 1933, p. 477.

Livre VII

> Le champ de l'analyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires, veulent puiser dans les lignes la puissance de trouver les problèmes qui leurs sont proposés. C'est en suivant la voie de l'analyse [αναλυσις, la résolution] et de la synthèse [συντεσις, la construction] que cette matière a été traitée par trois hommes : Euclide, auteur des *Éléments*, Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédée. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutissent à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes au autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse.



**Exemple 1**
**(Trouver une démonstration d'une propriété) Soit un cercle de diamètre AB. Soit DC, une perpendiculaire abaissée du point C du cercle sur AB. Alors, AD est à DC comme DC est à DB.**

| Analyse | Synthèse |
|---|---|
| ***Hypothèses***<br>1) Supposons le résultat vrai, c'est-à-dire qu'on ait effectivement que AD est à DC comme DC est à DB.<br>2) DC $\perp$ AB, c'est une donnée.<br>3) C'est un point du cercle, c'est une donnée | ***Résolution***<br>Les segments AB et DC sont donnés.<br>Considérons le $\Delta ACB$.<br>Je dis que AD est à DC comme DC est à DB. |
| ***Transformation***<br>(Cherchons à arriver par déduction à un énoncé vrai ou réalisé) | ***Démonstration***<br>(à lire de base en haut) |
| Traçons les segments AC et CB.<br>$\Delta ADC$ et $\Delta CDB$ sont rectangles.<br>[$\angle ADC$ et $\angle CDB$ sont droits par l'hypothèse 2] | D'où, AD est à DC comme DC est à DB. CQFD |
| Or, par l'Hypothèse 1, $\Delta ADC$ et $\Delta CDB$ sont semblables. | Donc, les angles dans $\Delta DCB$ et $\Delta ADC$ étant égaux deux à deux, $\Delta ADC$ et $\Delta CDB$ sont semblables. |
| Il s'ensuit que les angles sont égaux deux à deux :<br>$\angle DAC = \angle DCB$ et $\angle CBD = \angle ACD$. | De même, puisque $\Delta DCB$ est droit par construction, $\angle DCB = \angle DAC$.<br>Or, puisque $\Delta ADC$ est droit par construction, $\angle ACD = \angle CBD$. |
| Or $\angle DAC + \angle ACD$ est droit<br>[car $\Delta ADC$ est rectangle]<br>et donc $\angle DAC + \angle CBD$ est aussi droit. | Donc $\angle DAC + \angle CBD$ est droit |
| Dès lors $\angle ACD + \angle DCB = \angle ACB$ est droit.<br>Ce qui est vrai. | $\Delta ACB$ est rectangle<br>[Car C est sur le cercle] |
| Résolution<br>Tout est donné | |

**Exemple** **2**
**(Trouver une construction)**

Pappus, *Collection mathématique*, Livre VII, proposition 105
Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, trad. de Paul ver Eecke, Paris, Bruges, 1933, t. II, p. 640-642.

**Le cercle ABG étant donné de position, et deux points D, E étant donnés extérieurs au cercle. Trouver un point B sur le cercle tel que EB prolongé coupe le cercle en A et DB prolongé coupe le cercle en G, de telle sorte que le segment AG soit parallèle à DE.**

<table>
<tr><th>Analyse</th><th>Synthèse</th></tr>
<tr><td>

***Hypothèses***

**1) Supposons la construction effectuée. Donc,**

**- A, B, G sont des points du cercle de position connue ;**

**- AG | |DE ;**

**- B est le point d'intersection de AE et GD.**

**2) Les points D et E sont donnés, de par l'énoncé du problème.**

**3) Le cercle est donné.**

***Transformation***

**(Cherchons à arriver par déduction à un énoncé vrai ou réalisé)**

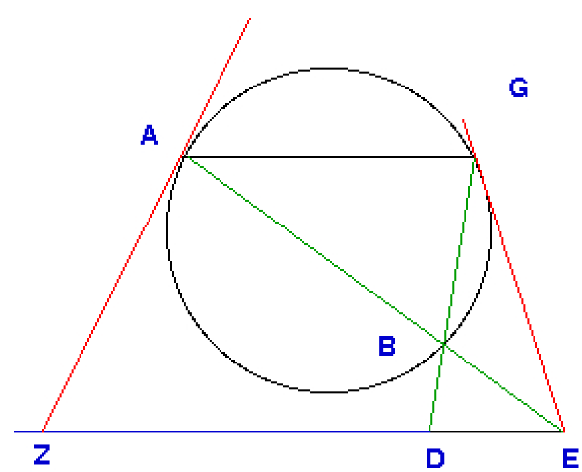
**Menons par A le segment AZ tangent au cercle qui coupe le prolongement de DE en Z.**

**Alors l'angle** ZAE **= l'angle AGD**
**[Ils interceptent le même arc de cercle]**

**D'autre part l'angle AGD = l'angle GDE.**
**[Angles alternes internes]**

</td><td>

**(Lire de bas en haut)**




**Donc AG || DE, les angles AGD et GDE**

</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **Donc l'angle ZAE = l'angle AGD = l'angle GDE.**<br><br>**Alors l'angle ZAE + l'angle GDZ = 180° et donc le quadrilatère ABDZ est inscriptible. [Propriété connue des quadrilatères. *Éléments* III-22]**<br><br>**D'où AE•EB = ZE•ED [*Éléments* III-36]**<br><br>**La question est alors de savoir si cela est vrai ou réalisé, c'est-à-dire est donné. C'est le rôle de la Résolution.**<br><br>***Résolution***<br><br>**Puisque le point E est donné, la tangente au cercle passant par E est donné. Le point de tangence est H.**<br><br>**Donc AE•EB est donné [car AE•EB = HE$^2$ par** *Éléments* III-37**]**<br><br>**et donc ZE•ED est donné.**<br><br>**Or ED est donné [car E et D sont donnés]**<br><br>**et donc ZE est aussi donné et, E étant donné, Z l'est aussi.**<br><br>**Z étant ainsi donné, le point A, de tangence de la tangente avec le cercle, est aussi donné.**<br><br>**A et E étant donnés, AE est aussi donné.**<br><br>**AE et le cercle étant donné, B est donné.**<br><br>D, E, B étant donnés, DB et DE son donnés | **étant alternes internes.**<br><br>**Or l'angle ZAE = l'angle AGD, et donc l'angle AGD = l'angle GDE.**<br><br>**D'où l'angle ZAE = l'angle GDE**<br><br>**Donc les points A, B, D, Z sont**<br><br>**sur un cercle et donc l'angle ZAE + l'angle GDZ = 180°**<br><br>**Il s'ensuit que AE•EB = ZE•ED**<br><br>**On a que AE•EB = HE$^2$ = ZE•ED [Él. III-36, 37]**<br><br>***Démonstration***<br><br>**Je dis que GA est parallèle à DE.**<br><br>**Prolonger DB. G est le point d'intersection de ce prolongement et du cercle.**<br><br>**Tracer AE, ce qui détermine le point B, l'intersection de AE et du cercle.**<br><br>**Du point Z tracer la tangente au cercle. Cette tangente touche le cercle en A.**<br><br>**Placer Z tel que ZE•ED = HE$^2$**<br><br>**Du point E tracer la tangente au cercle. Cette tangente touche le cercle en H.**<br><br>***Construction*** |