As-Sama'al (v.1130-v.1180)

As-Samaw'al, un disciple d'al-Karagi, dans son traité *Traité d'arithmétique* (1172), consacré à l'extraction des racines et la résolution par approximation des équations algébriques.

Dans le cadre de l'étude de ces techniques d'approximation, naîtront les fractions décimales.

Voyons d'abord comment les polynômes étaient représentés.

Considérons le tableau suivant :

5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	$1/x^1$	$1/x^2$	$1/x^3$	$1/x^4$	$1/x^5$

En écrivant le coefficient des puissances de l'inconnue dans les colonnes correspondantes, on peut écrire une expression comme $3x^2 + 5 + 1/x$, ainsi :

2	1	0	1	2
3		5	1	

Dans ce contexte, la règle des exposants, correspondant à $\mathbf{x^n x^m = x^{n+m}}$, s'énonce ainsi :

« *Si les deux puissances sont de part et d'autre de l'unité, à partir de l'une d'elles nous comptons en direction de l'unité, le nombre des éléments du tableau qui séparent l'autre puissance de l'unité, et le nombre est du côté de l'unité. Si les deux puissances sont du même côté de l'unité, nous comptons en direction opposée à l'unité.* »

Un texte d'as-Samaw'al

Tiré de : *Mathématiques au fil des âges*, IREM Groupe Épistémologie et Histoire, gauthier-Villars, 1987, p. 98-100

dont l'élévation au carré donne la fonction rationnelle considérée.

L'absence de symbole pour désigner l'inconnue est palliée par une présentation en tableaux dans lesquels les cases représentent les puissances de la variable. On retranche de la fonction initiale les carrés des termes introduits dans la fonction inconnue, sans oublier les doubles carrés.

La deuxième ligne correspond à la fonction donnée. Les termes de la fonction inconnue apparaissent dans la première ligne. La troisième ligne sert pour les calculs.

On notera la présence de coefficients négatifs. Le dernier paragraphe énonce d'ailleurs des règles sur les signes. □

AL-SAMAW'AL : calcul de la racine carrée d'une fonction.

J'ai établi, avec l'assistance et l'inspiration de Dieu, une méthode générale à l'aide de laquelle on extrait les racines carrées des fonctions rationnelles qui contiennent des termes négatifs et dans lesquels les éléments positifs sont éliminés par les éléments négatifs correspondants.

Exposons-la sur un exemple particulier à travers lequel nous montrerons le procédé.

cubo-cube	carré cube	carré carré	cube	carré	choses	unités	parties de choses	parties de carré	parties de cube	parties de carré carré
0		0		0		0		0		0
	moins 30	9	moins 40	84	moins 116	64	moins 48	100	moins 96	64
0		0		0		0		0		0

fig. 3.6.

Nous voulons connaître la racine carrée de 25 cubo-cubes 9 carré-carrés 84 carrés 64 unités 100 parties de carré 64 parties de carré-carré moins 30 carré-cubes 40 cubes 116 choses 48 parties de choses 96 parties de cube. Nous le disposons sur la tablette selon la figure.

Puis nous commençons par l'ordre des unités et nous disons : racine pas de racine, racine pas de racine, comme nous l'avons dit à propos des racines des nombres. Puis nous marquons par un signe la place de la racine dans les positions qui sont à droite et à gauche des unités. La dernière racine sera dans la position des cubo-cubes. Puis nous cherchons le plus grand nombre qui soit tel que lorsqu'on le multiplie par lui-même et qu'on le retranche de 25, il ne reste rien. Nous trouvons 5 cubes. Nous les posons sur la ligne supérieure, dans la position du cube, et sur la ligne inférieure, sous 25. Nous multiplions le supérieur par l'inférieur et nous retranchons le résultat de ce qui est-dessus de lui, qui s'épuise. Puis nous doublons le 5 inférieur et nous le déplaçons vers la droite d'une seule position ; et nous cherchons le plus grand nombre qui, lorsque nous le multiplions par le 10 inférieur, donne moins 30. Nous trouvons moins 3. Nous le posons sur la ligne supérieure, après le 5 et au-dessus de 84, et nous le posons également sur la ligne inférieure après le 10 et sous le 9. Puis nous multiplions moins 3 par le 10 inférieur, cela donne moins 30 que l'on retranche de ce qui est au-dessus de lui. La position se vide. Puis nous multiplions le 3 supérieur par le 3 inférieur, cela donne plus 9, car le produit d'un négatif par un négatif est un positif. On le retranche de ce qui est au-dessus de moins 3 et il s'épuise. Puis on double le moins 3 inférieur et on le déplace, avec ce qui le précède, d'une position vers la droite. On obtient ce qui est indiqué sur la figure.

cube	carré	choses	unités	parties de choses	parties de carré	parties de cube	parties de carré carré
5	moins 3	0	moins 4	6			
		moins 80	48	0	64	moins 96	64
		10	moins 6	0	moins 8	12	

fig. 3.7.

Puis nous cherchons un nombre qui, lorsque nous le multiplions par 10, devient moins 80. Nous le trouvons égal à moins 8. Nous le posons après le 6 de la ligne supérieure et après le 12 de la ligne inférieure ; nous multiplions le 8 par toute la ligne inférieure et nous retranchons chaque chose de ce qui est au-dessus d'elle. Le carré s'épuise et la racine de la fonction est la ligne supérieure. Sa valeur est 5 cubes plus 6 parties d'une chose moins 3 carrés 4 unités et 8 parties de carré, et c'est le résultat cherché.

Le fondement dans l'extraction des racines des grandeurs qui contiennent des soustractions est que le produit de moins par plus est moins, par moins c'est plus et que, si nous soustrayons un nombre positif d'un nombre négatif, il reste la somme de deux nombres négatifs. Si nous retranchons un nombre soustrait d'un nombre soustrait plus grand que lui, il reste leur différence soustraite. Si le nombre retranché est plus petit que le nombre soustrait de lui, il reste leur différence positive. Si nous soustrayons le négatif du positif, il reste leur somme positive et si nous soustrayons un terme négatif d'une position vide, il y reste ce nombre positif.

Ce sont là des fondements sans ambiguïté pour celui qui a compris ce qui a été indiqué précédemment.

Le Livre magnifique en algèbre, XII^e siècle.

Copie d'un manuscrit
(Est-ce le même texte que celui de la page prcédente ?)

عدد نضربه في العشرة السفلية فيكون ٣٠ ناقصة فنجده ٣ ناقصة فنضعها في السطر الاعلى بعد الخمسة وفوق الاربعة وثمانين ونضعها أيضاً في السطر الاسفل بعد العشرة وتحت التسعة ونضرب العلية الناقصة في العشرة السفلية يكون ٣٠ ناقصة نلقيها مما فوقها فتخلو المرتبة ونضرب الثلاثة العلوية في الثلاثة السفلية فيكون تسعة زائدة لان الحاصل من ضرب الناقص في الناقص زائد فنلقيها مما فوق الثلاثة فيفنى ثم نضعف الثلاثة السفلية وننقلها ومـــا قبلها مرتبة الى اليمين فيصير على ما في الصورة . ثم نطلب ما نضربه في العشرة فيكون* لا شيء فنجده صفراً فنضعه قبل الثلاثة التي في السطر الاعلى وبعد الستة السفلية وننقل السطر الاسفل مع الصفر

(١)

مرتبة اجزاء مال مال	مرتبة اجزاء الكعاب	مرتبة اجزاء المال	مرتبة اجزاء الشيء	مرتبة الاحاد	مرتبة الاشياء	مرتبة الاموال	مرتبة الكعاب	مرتبة مال مال
○		○		○		الا ٣	○	
٦٤	الا ٩٦	١٠٠	الا ٤٨	٦٤	الا ١١٦	٨٤	الا ٤٠	
○		○		○			الا ٦	١٠

مرتبة الى اليمين ونطلب عدداً نضربه في العشرة فيكون ٤٠ ناقصة فنجده أربعة ناقصة فنضعها بعد الصفر من السطر الاعلى والاسفل ونضربها في العشرة ونلقي

(٢)

مرتبة اجزاء مال مال	مرتبة اجزاء الكعب	مرتبة اجزاء المال	مرتبة اجزاء الشيء	مرتبة الاحاد	مرتبة الاشياء	مرتبة الاموال	مرتبة الكعاب
○		○		الا ٤	٠	الا ٣	○
٦٤	الا ٩٦	١٠٠	الا ٤٨	٤٨	الا ١١٦	٦٠	
○		○	الا ٨	٠	الا ٦	١٠	

(١) هناك صفر في العمود الثالث الخط الثاني من الجدول .
(٢) هناك اضطراب في نسخ الجدول صححناه .

Page extraite de : *Al-Bāhir en algèbre,* d'Al-Samaw'al (mort en 1175 environ). Édité par S. Ahmad et R. Rasshed, imprimerie de l'Université de Damas, 1972, p. 69 du texte arabe.

fig. 3.8.