CHAPITRE 3

L'ALGÈBRE AU CŒUR DU PROGRAMME ANALYTIQUE

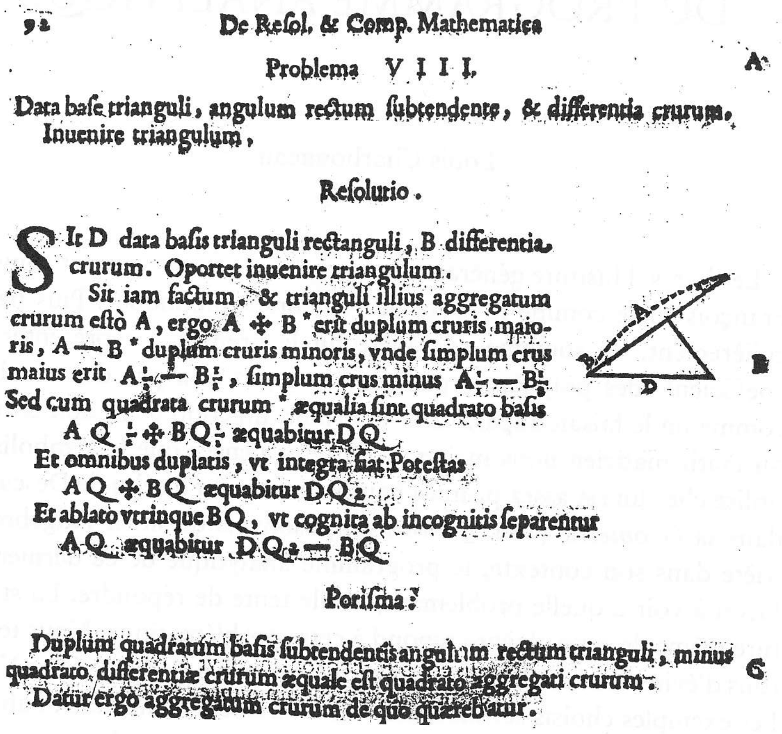
Louis Charbonneau

Les livres d'histoire générale des mathématiques présentent souvent François Viète comme le «père de l'algèbre symbolique». Plus particulièrement, on souligne que Viète fut le premier à représenter les coefficients des polynômes par des lettres, et non par des nombres comme on le faisait auparavant. Pourtant, un coup d'œil aux œuvres du mathématicien nous inciterait plutôt à penser que le symbolisme utilisé chez lui est assez primitif comparativement à celui de Descartes dans sa *Géométrie* (1637). Nous proposons ici de situer l'algèbre de Viète dans son contexte, le programme analytique de ce dernier, de façon à voir à quelle problématique elle tente de répondre. La structure même de cette algèbre répond à cette problématique. Nous tenterons d'éviter les écueils du vocabulaire très particulier utilisé par Viète. Les exemples choisis seront aussi volontairement élémentaires afin de permettre à un lecteur non mathématicien de percevoir la nature de la démarche intellectuelle de Viète.

UN PROBLÈME ET SA SOLUTION (GHETALDI)

L'algèbre a toujours été un outil de résolution de problèmes. Dès lors, commençons notre étude par un exemple d'utilisation de l'algèbre et de l'art analytique, pour résoudre un problème de la mort de Viète par l'un de ses disciples[1], Marinus Ghetaldi (1566-1626).

Énoncé : Étant donné la base d'un triangle (rectangle), soustendant l'angle droit, et la différence des cathètes. Trouver le triangle[2].


92 De Resol. & Comp. Mathematica

Problema VIII.

Data base trianguli, angulum rectum subtendente, & differentia crurum, Inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit D data basis trianguli rectanguli, B differentia crurum. Oportet inuenire triangulum.

Sit iam factum, & trianguli illius aggregatum crurum esto A, ergo A + B erit duplum cruris maioris, A — B duplum cruris minoris, vnde simplum crus maius erit A½ — B½, simplum crus minus A½ — B½.

Sed cum quadrata crurum æqualia sint quadrato basis A Q ½ + B Q ½ æquabitur D Q.

Et omnibus duplatis, vt integra fiat Potestas A Q + B Q æquabitur D Q 2.

Et ablato vtrinque B Q, vt cognita ab incognitis separentur A Q æquabitur D Q 2 — B Q.

Porisma.

Duplum quadratum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minus quadrato differentiæ crurum æquale est quadrato aggregati crurum. Datur ergo aggregatum crurum de quo quærebatur.

Figure 1. Ghetalti (1630) ; haut de la page 92.

Remarquons, dans la figure 1, la notation utilisée dans la *Resolutio*, car elle s'apparente beaucoup à celle de Viète. Les termes nombrants $\frac{1}{2}$ ou 2 sont placés après la lettre qu'ils «dénombrent». L'égalité est

(1) Sur Ghetaldi, voir le chapitre précédent de cet ouvrage.
(2) Ghetaldi, *De Resolutione et Compositione Mathematica Libri Quinque*, Rome, 1630 ; Problema VIII, pp. 92-93. Ma traduction.

indiquée par le terme *æquabitur*. Le fait qu'une lettre soit multipliée par elle-même est précisé par un Q après celle-ci, Q pour *Quadrato*.

La première partie de la résolution, appelée *Resolutio*, associe des consonnes aux grandeurs connues, soit D pour la base (l'hypoténuse) et B pour la différence des cathètes (les cathètes sont les deux côtés de l'angle droit). Supposons connue la somme des cathètes et désignons-la par la lettre A. L'usage d'une voyelle souligne le fait que la somme des cathètes est inconnue. Toutefois, en la supposant déterminée, on peut la manipuler comme si elle était connue. On a alors :

$$\begin{cases} A + B = 2 \text{ (grande cathète)} \\ A - B = 2 \text{ (petite cathète)} \end{cases}$$

Or la somme des carrés des cathètes égale D^2, et donc $A^2+B^2 = 2D^2$ ou encore$A^2 = 2D^2–B^2$.

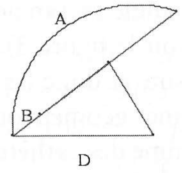


Figure 2.

Cette dernière relation est appelée la *porisma*. Elle caractérise le problème. Elle permet aussi de déterminer A à partir de la connaissance de D et B. Mais le problème étant un problème géométrique, il faut trouver une construction qui exhibe A pour ensuite exhiber le triangle rectangle cherché. C'est là la fonction de la *Compositio*.

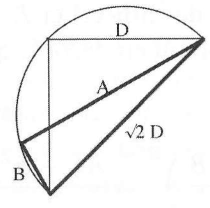


Figure 3.

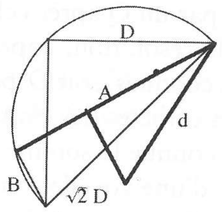


Figure 4.

Compositio : Pour exhiber A, il suffit d'utiliser deux fois la relation de Pythagore, d'abord pour construire $\sqrt{2}D$ par un triangle rectangle isocèle de cathète D (voir la figure 3), puis pour exhiber A, comme une cathète d'un triangle rectangle dont l'autre cathète est B et l'hypoténuse est $\sqrt{2}D$ (voir la figure 3). Par construction, nous savons que A satisfait le porisme et donc les conditions du problème. Il suffit maintenant de déterminer géométriquement le triangle rectangle cherché. Il sera tel que la somme des cathètes soit A et la différence soit B. Ces cathètes sont la moitié de $A - B$ et la moitié de $A + B$. Alors, dans le triangle d'hypoténuse d, la petite cathète a pour longueur la moitié du segment obtenu en enlevant à A un segment de même longueur que B, et la grande cathète est un segment de même longueur que cette petite cathète auquel on ajoute un segment de même longueur que B (voir la figure 4, où le point sur le segment A détermine un segment de même longueur que le segment B). Il reste maintenant à montrer que ce triangle est bien celui qui est cherché, autrement dit que d est bien de même longueur que le segment D donné. Cette démonstration se fera en parcourant à l'envers la *Resolutio*. Par construction, on a $A^2 = 2D^2 - B^2$. Donc, par l'équivalence des propositions de la *Resolutio*, $A + B = 2$ (grande cathète) et $A - B = 2$ (petite cathète). Par la relation de Pythagore, il en découle que d^2 égale la somme des carrés des cathètes, soit

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}D\right)^2}{2} = D^2.$$

On a donc $d^2 = D^2$, d'où $d = D$.

Ghetaldi divise sa résolution du problème en trois parties. D'abord la *Resolutio*, où l'on recherche une propriété caractéristique du

problème en supposant le problème résolu. Puis la *Porisma*, cette relation caractéristique du problème. Et enfin la *Compositio*, qui décrit une construction basée sur la *Porisma* aboutissant au triangle cherché et où est démontrée la justesse de la construction par un raisonnement correspondant au raisonnement inverse de celui fait dans la *Resolutio*.

LA RECONSTITUTION DE L'ANALYSE DES ANCIENS

Le processus de résolution de problèmes choisi par Ghetaldi correspond à l'analyse au sens des Anciens, telle que la décrit Pappus au début du livre VII de *La Collection mathématique*(1).

Le champ de l'analyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la manière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires, veulent puiser dans les lignes la puissance de trouver les problèmes qui leur sont proposés. C'est en suivant la voie de l'analyse *[αναλυσις, la résolution] et de la* synthèse *[συντεσις, la construction] que cette matière a été traitée par trois hommes : Euclide, auteur des* Éléments, *Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse.*

(1) Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, 2 vol., traduction et introduction de Paul ver Eecke, Paris-Bruges, Desclée de Brouwer, 1933, tome 2, p. 477.

La *Resolutio* de Ghetaldi correspond donc à l'analyse. La *Compositio* inclut la synthèse. Ce processus caractérise à bien des égards l'approche de Viète, le maître de Ghetaldi. Rappelons que Viète a élaboré son art analytique au cours des années 1584-1589, années de disgrâce suite aux intrigues des membres de la Ligue, et que ses premières œuvres «analytiques» datent de 1591 et 1593. Or, la traduction latine de Commandino de *La Collection mathématique* de Pappus a été publiée en 1588 et elle faisait suite à la publication par Xylander de la traduction latine des *Livres arithmétiques* de Diophante en 1575. La réintroduction de ces œuvres au cœur des mathématiques agit comme un catalyseur. Elle ouvre un tout nouveau champ, celui de l'utilisation de l'analyse comme un outil de découverte mathématique et de résolution de problèmes. Viète participe grandement de ce mouvement. D'ailleurs, le titre de son livre programmatique publié en 1591, le *In artem analyticem isagoge*, le souligne. Mais son sous-titre dévoile le but véritable de l'auteur : «Seorsim excussa ab *Opere restitua Mathematica Analyseos, Seu,* Algebrâ novâ» Le mot important ici est *restitua*. Reconstruire l'analyse mathématique telle que l'utilisaient les Anciens. Plus spécifiquement, Viète entreprend cette reconstruction en s'attaquant à deux grands problèmes : celui, attribué à Apollonius, de la détermination d'un cercle tangent à trois cercles donnés, et le problème de la section des angles. Cette analyse des Anciens est une analyse qui s'applique à la géométrie. En cela, une littérature mathématique importante viendra s'ajouter aux premiers essais du maître, comme nous pouvons le voir dans la liste, partielle, des publications dédiées à ce sujet[1].

1591 François Viète, *In artem analyticem isagoge*
1593 François Viète, *Effectionum Geometricarum Canonica recensio* et *Supplementum Geometria* et *Variorum de rebus Mathematicis responsorum, Libri septem*
1600 François Viète, *Francisci Vietae Apollonius Gallus seu Apollonii Pergaei* περι επαιρων *Geometria*
1607 François Viète (par Marino Ghetaldi), *Apollonius Gallus*
1612 Bachet de Méziriac, *Apollonius*
1612 Alexandre Anderson, *Supplementum Apollonii redivivi, sive Analysis problematis hactenus desiderati*

(1) Une liste exhaustive se trouve dans Henk J.M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, New York, Springer-Verlag, 2001.

1615 François Viète (par Alexander Anderson), *Ad Angularium Sectionum Analyticem Theoremata*
1615 Alexandre Anderson, Αιτολογια *Pro zetetico Apolloniani problematis a se iam pridem edito in supplemento Apollonii Redivivi*
1616 Clément Cyriaque de Mangin, *Problemata duo nobilissima, quorum nec analysin geometricam, videntu te nuisse Ioannes Regiomontanus et Petrus Nonius ; nec demonstrandum satis accuratam repraesentasse, Franciscus Vieta et Marinus Ghetaldus, nunc demum a Clemente Cyriaco diligentius elaborata et novia analyseon formis exulta...*
1617 Alexander Anderson, *Animadversiones in Franciscum Vietam a Clemento Cyriaco nuper brevis* Διακρισις
1627 Giovani Camillo Gloriosi, *Exercitationum mathematicorum decas prima-tertia*
1630 A. Vasset (prob. Claude Hardy), *L'Algèbre nouvelle de M. Viète*
1630 I.L. Sieur de Vaulézard, *Introduction dans l'art analytique ou nouvelle algèbre de François Viète*
1630 Marino Ghetaldi, *De resolutione et de compositione mathematica libri quinque*

On y constate que l'application de l'analyse aux problèmes géométriques était très vivante dans le premier tiers du XVII^e siècle. Parmi ces auteurs, Ghetaldi et Anderson se considèrent comme des disciples de Viète[1]. Par ailleurs, dans les travaux mentionnés ici, l'algèbre disparaît presque toujours sous une enveloppe géométrique. La reconstruction des travaux grecs semble se faire dans un esprit de préservation de la forme géométrique des Anciens. L'algèbre y apparaît comme un outil de l'analyse. Mais cette analyse disparaît pour ne laisser la place qu'à la synthèse, elle-même intégrée dans la *Compositio* qui, de fait, correspond à ce que l'on retrouve dans les livres «reconstituant» la géométrie.

Nous sommes donc en droit de nous demander quelles sont la nature et l'importance de cette algèbre. Or, pour faire cela, il importe de situer le programme analytique de Viète dans le contexte des mathématiques de la deuxième moitié du XVI^e siècle.

(1) Sur l'héritage de Viète, voir le chapitre 2 de cet ouvrage.

DE L'ALGÈBRE, GÉNÉRALISATION DU NUMÉRIQUE, À L'ALGÈBRE OUTIL D'ANALYSE

Qu'est-ce qu'un nombre ? Est-on justifié d'utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques ? Voilà deux questions au cœur de débats qui enflammaient les mathématiciens de la Renaissance. Elles sont aussi au centre de la problématique[1] qui amène Viète à structurer son art analytique comme il l'a fait. Voyons cela de plus près.

De la relation entre les nombres et les grandeurs géométriques : qu'est-ce qu'un nombre ?

Depuis la crise des incommensurables qui a ébranlé l'école pythagoricienne, et la dichotomie entre l'arithmétique et la géométrie qui s'ensuivit, les discussions sur la nature des nombres et de la relation de ces derniers avec les grandeurs géométriques ne cessèrent de diviser les philosophes mathématiciens. À la Renaissance, ces discussions prennent d'autant plus de vigueur que le retour à la tradition grecque en mathématiques vient se superposer à l'influence des mathématiques arabes, beaucoup plus pragmatiques que les mathématiques grecques à cet égard.

Les nombres, certes, servent à la mesure, éventuellement à la mesure de grandeurs géométriques. Toutefois, pour plusieurs, l'on ne saurait confondre nombres et grandeurs géométriques. En effet, les relations entre les grandeurs incommensurables ne peuvent s'exprimer par des «nombres», à la différence des grandeurs ayant une commune mesure. De ce point de vue, les grandeurs géométriques englobent les nombres. Pourtant, Stevin (1548-1620) affirme que $\sqrt{8}$ constituant une partie de 8 est de même nature que 8 et donc que

(1) Les informations de cette section proviennent en grande partie des chapitres 6 et 7 du livre de Henk J.M. Bos (2001), *op. cit.* (voir la note 3). On trouve un résumé de ces chapitres dans l'article du même auteur, Henk J.M. Bos, ‹Tradition and modernity in early modern mathematics : Viète, Descartes and Fermat›, in Catherine Goldstein, Jeremy Gray et Jim Ritter, *L'Europe mathématique / Mathematical Europe. Histoires, mythes, identités / History, myth, identity*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, pp. 183-204.

$\sqrt{8}$ est un nombre au même titre que 8. Par ailleurs, les grandeurs géométriques diffèrent des nombres en ce que les opérations entre elles produisent dans certains cas un changement dans la nature de ces grandeurs car les grandeurs géométriques possèdent une dimension. Par exemple, le produit de deux nombres est un nombre de même nature que les deux nombres originaux. Cependant, le produit de deux segments, tous les deux de dimension 1, est pour sa part de dimension 2. Mais il n'y a pas que la dichotomie entre nombres et grandeurs géométriques qui pose problème. Les rapports, de nombres ou de grandeurs, semblent aussi d'une nature différente de celles des nombres et des grandeurs géométriques. Dans le contexte où l'algèbre est perçue comme l'instrument mathématique de marchands, eux-mêmes tributaires des Arabes, elle apparaît comme une généralisation de l'arithmétique. Mais puisque la nature du nombre reste ambivalente, il en va de même pour l'arithmétique et plus encore pour cette arithmétique généralisée. Dès lors, l'algèbre ne saurait prétendre à un statut plus élevé que la géométrie.

Est-on justifié d'utiliser l'algèbre pour résoudre des questions géométriques ?

Dans ce contexte d'incertitude quant à la nature des nombres, la question de la justification de l'utilisation de l'algèbre pour résoudre des problèmes de nature géométrique ne peut être évitée.

Pour les mathématiciens de la Renaissance, l'algèbre prend principalement sa source dans l'arithmétique et se présente sous la forme d'une collection de règles. De ce fait, elle semble moins générale que la géométrie. Par ailleurs, Cardan (1501-1576) avait utilisé en 1545 un raisonnement géométrique pour justifier ses règles de résolution des équations du troisième degré[1]. La géométrie lui paraît donc encore plus fondamentale que l'algèbre. Ne tourne-t-on pas en rond si l'on cherche à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques ? De plus, la résolution algébrique de certaines équations du troisième degré implique le passage par des imaginaires, processus pour le moins troublant, alors que ces mêmes équations correspondent au problème de la trisection d'un angle qui, lui, est un problème dont

(1) Al-Khwarizmi avait de même justifié par un recours à la géométrie ses règles de résolution des équations du second degré.

on connaît une solution géométrique, si l'on ne se restreint pas à la règle et au compas. Dès lors, la géométrie semble à plusieurs égards un outil plus sûr que l'algèbre.

Dans ce contexte, la géométrie apparaît en cette fin du XVI^{e} siècle comme un domaine clairement plus général que l'algèbre qui demeure, elle, parcellaire et tributaire de l'arithmétique, elle-même moins générale que la géométrie. À cet égard, la controverse règne parmi les mathématiciens. Elle prend la forme de discussions sur l'opportunité d'inclure dans les nombres les irrationnels et généralement les mesures de toute grandeur géométrique. Ramus décrit la géométrie comme l'art de bien mesurer et donc trouve inutile la discussion sur la classification des grandeurs irrationnelles que fait Euclide dans le livre X de ses *Éléments*. Kepler (1571-1630), le mystique, s'insurge pour sa part avec virulence contre cette intrusion du numérique dans la géométrie. Selon lui, la géométrie permet de trouver les vraies causes des phénomènes alors que l'algèbre et le nombre ne servent qu'aux calculs des marchands.

Pour donner à l'algèbre un statut et une autonomie, il importe de porter un regard neuf sur ces questions. Mais encore faut-il avoir les outils intellectuels pour le faire. Ceux-ci viendront partiellement d'un pédagogue réformateur : Pierre de la Ramée.

PIERRE DE LA RAMÉE (1515-1572)

Pierre de la Ramée, connu aussi sous son nom latinisé de Ramus, fait partie de l'histoire de la pédagogie, entre autres pour ses réformes de l'enseignement dans les collèges parisiens, mais aussi pour ses idées sur la façon d'enseigner et d'organiser les connaissances pour les présenter à un public étudiant. La réforme ramusienne découle des transformations que connaît la clientèle des collèges qui devient de plus en plus jeune au cours du XVI^{e} siècle[1]. Ramus propose de présenter les

(1) Sur la réforme de l'enseignement dans les collèges et le rôle de Ramus, voir Peter Sharratt (ed.), *French Renaissance Studies, 1540-70, Humanism and Encyclopedia*, Edinburg, The University Press, 1976. En particulier, l'article de Peter Sharratt, ‹Peter Ramus and the Reform of the University : the Divorce of Philosophy and Eloquence ?›, pp. 4-20, et celui de Jean-Claude Margolin, ‹L'enseignement des mathématiques en France (1540-70) : Charles de Novelle, Fine, Peletier, Ramus›, pp. 109-154. On pourra aussi consulter Frank Pierrepont Graves, *Peter Ramus and the Educational Reformation of the Sixteenth Century*, New York, The Macmillan Company, 1912.

connaissances en passant du général au particulier et d'organiser le tout de façon schématique. En ce qui concerne les questions sur la nature du nombre, il se montre résolument moderne, considérant la mesure des incommensurables comme donnant lieu à des nombres, de même que les rapports. La géométrie, «l'art de bien mesurer» selon Ramus, devient ainsi en grande partie tributaire de l'arithmétique. Ramus s'exprime d'ailleurs clairement là-dessus dans son *Remonstrance* de 1567.

> *La premiere de ces disciplines c'est l'arithmétique, art de bien nombrer toute chose qui peut tomber en nature de nombre en adjoutant, déduisant, multipliant, divisant, tous nombres entiers et rompus en composant leurs raisons et proportions. La seconde c'est la géométrie, art de bien mesurer, toute chose subjette à mesure, comme longueur, largeur, hauteur, et généralement toutes grandeurs tant plaines que solides, soit au ciel, soit en terre ou en quelque autre subjet mesurable ; cette partie seconde* ne se peut aucunement entendre ny pratiquer sans la première [c'est Nelly Bruyère qui souligne]*; car mesurer c'est nombrer les intervalles, c'est comparer les raisons et proportions des figures ; l'astrologie s'ensuit, ne peut pareillement ny concevoir, ny demonstrer sans l'arithmetique et géométrie ; car l'astrologie n'est autre chose qu'Arithmetique à nombrer les degrez, minutes, et toutes aultres parties ès mouvemens des corps célestes, ce n'est autre chose que géométrie à mesurer les triangles, les cercles, les sphères et toutes figures y estant, et ainsi des autres disciplines mathématiques, voire bien davantages les propositions d'arithmétique, géométrie, astrologie sont basties de telle ordre, que qui ne congnoit la premiere, ne peut entendre la seconde, qui n'entend l'une et l'autre ne peut entendre la troisième, bref si un escolier a perdu une seuele leçon en mathematique, qu'il ne retourne plus à l'escole car il n'entendra rien à ce qui s'ensuit*[1].

Mais il ne faudrait pas croire que la géométrie devient pour Ramus une sous-discipline de l'arithmétique. Bien au contraire. De fait, chaque discipline doit avoir son objet propre. Cela découle des trois lois de la méthode telle que Ramus les décrit dans son *Scholæ dialecticæ* de 1569.

(1) Cité par Nelly Bruyère, *Méthode et dialectique dans l'œuvre de La Ramée : Renaissance et âge classique*, Paris, Vrin, 1984, pp. 360-361.

> *Aristote a relevé trois signes distinctifs de la matière de l'art. Le premier,* kata pantos, *au sujet de tout, de sorte que quelles que soient les maximes des arts, elles ne sont ni fausses, ni conjecturales, ni en partie vraies, en partie fausses, mais totalement et nécessairement vraies. Telle est cette loi de vérité. La seconde est* kath'auto, *par soi, de sorte que tout ce qui est contenu dans un art, soit homogène et comme les membres d'un seul corps. L'arithmétique dans la géométrie est agéométrique, le géométrique dans l'arithmétique est anarithmétique. C'est pourquoi il faut déployer l'arithmétique arithmétiquement, la géométrie géométriquement. Cette loi est celle de la justice attribuant à chacun son bien. La troisième est* kath'olon prôton, *première universelle, de sorte que quoi que l'on propose, cela soit réciproque aux parties. C'est pourquoi les choses générales doivent être proposées généralement... Cette loi est dénommée à juste titre loi de la sagesse*[1].

Par ailleurs, Ramus fut l'un des premiers à concevoir l'algèbre comme étant une forme d'analyse[2]. En effet, pour résoudre algébriquement un problème, nous procédons en fait de la même manière que pour résoudre un problème par l'analyse, mais habituellement sans refaire la synthèse. En effet, en écrivant une équation qui représente la situation, nous acceptons pour un instant que l'inconnue cherchée existe et qu'elle satisfasse une certaine relation exprimée par une équation. Ensuite, par un jeu de règles de manipulation qui permettent de passer d'une relation à une autre équivalente, on modifie cette équation pour arriver à une relation, comme $x = 2$, qui, si elle

(1) Nelly Bruyère, *ibid.*, pp. 271-272.
(2) Jacob Klein, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Cambridge Mass., London, MIT Press, 1968, p. 151. Voir la note 201 p. 254 (Viète y qualifie Ramus d'homme des plus perspicace), la note 233 (pp. 266-267), la note 235 (p. 268), la note 241 (p. 271). Michael S. Mahoney, *The Royal Road : The Development of Algebraic Analysis from 1550 to 1650, with special reference to the work of Pierre de Fermat*, Thèse Princeton University, 148, 1967, pp. 198-200. Michael S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1973, pp. 32-33. Voir aussi Giovanna Cifoletti, ‹The Creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century›, in Catherine Goldstein, Jeremy Gray and Jim Ritter, *L'Europe mathématique / Mathematical Europe. Histoires, mythes, identités / History, myth, identity*, Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996, pp. 123-142, particulièrement pp. 132-137. Dans cet article, l'auteure montre comment, en France, la perception de l'algèbre et de son histoire s'est modifiée au cours du XVIe siècle. Ramus a joué un rôle important dans cette évolution.

est vraie, assure la véracité de la relation originale, et donc résout le problème.

L'influence de Ramus se manifeste constamment dans l'œuvre mathématique de Viète. On retrouve dans son *In artem analyticem isagoge* les trois lois citées plus haut[1]. L'algèbre est resituée dans le cadre d'un programme global portant le nom d'art analytique. Mais, surtout, mettant en pratique la deuxième des lois fondamentales, il donne à l'algèbre une toute nouvelle envergure. C'est ce que nous allons voir maintenant.

LE REDÉPLOIEMENT DE L'ALGÈBRE PAR FRANÇOIS VIÈTE : VERS UNE APPROCHE AXIOMATIQUE

Lorsque Viète publie en 1579 sa première œuvre mathématique, *Canon mathematicus*, il fait montre d'un esprit hautement numérique. De même que Ptolémée avait débuté son magistral *Almageste* par un chapitre décrivant comment il avait construit sa table des cordes, l'ancêtre de nos sinus, de même Viète s'applique d'abord à donner des tables et des outils permettant de résoudre plus facilement les triangles plans et sphériques. Les raisonnements impliqués dans ce genre de questions reposent sur la mesure des segments et des arcs de cercle et sur des manipulations successives de relations entre ce qui est connu et ce qui est inconnu. De ce fait, Viète, comme tout astronome, se situe à la jonction du numérique et du géométrique. Contrairement à presque tous les astronomes de son époque, Viète délaisse la représentation sexagésimale des fractions et y préfère une représentation décimale[2], une barre et la grosseur des chiffres permettant de distinguer la partie entière de la partie fractionnaire. Cela n'est pas innocent. Par l'usage de cette représentation, la frontière entre le géométrique et le numérique s'amenuise. À la fin du *Canon mathematicus*, Viète présente, d'une façon très schématique, les diverses façons d'effectuer les calculs. À voir la forme que prennent ces explications, on peut penser que se

(1) François Viète, *In Artem Analyticem Isagoge*, Tours, Mettayer, 1591 ; chapitre VI, 8.
(2) Notons que cet usage des nombres décimaux intervient six ans avant la publication de *La Disme* de Stevin en 1585, livre ayant participé à la popularisation de l'usage de ceux-ci.

retrouve ici une influence de Ramus. En effet, nous l'avons dit, Ramus favorisait toujours, dans les manuels, un mode schématisé de présentation, comme une façon d'exhiber le général au-delà du particulier. L'utilisation des raisonnements de nature algébrique dans la résolution de problèmes géométriques imprègne l'ensemble de ce premier travail. En cela aussi, il se rapproche de Ramus pour qui la géométrie est l'art de bien mesurer. Cependant, Viète n'aborde pas alors la question de savoir s'il est justifié d'utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques.

Dans la mouvance de la relecture de l'histoire de l'algèbre au XVI^e^ siècle, relecture fortement influencée par la redécouverte de Diophante puis de Pappus, Viète s'éloigne dans les années 1580 de la vision «mercantile» de l'algèbre, telle qu'issue du monde des marchands italiens ou allemands, et qui prend sa source dans les mathématiques arabes. Il prend alors une position originale en ne focalisant plus la problématique autour de la question «qu'est-ce qu'un nombre?», mais en centrant plutôt son attention sur la façon de trouver généralement une solution à un problème de géométrie. Les années de disgrâce, de 1585 à 1589, sont consacrées à cette réorganisation. Comment s'y prend-il ? Il invente un nouveau domaine, la logistique spécieuse, un calcul sur les lettres : «*La Logistique est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet*[1].» Ce qu'il y a de particulièrement original, et moderne, chez Viète est son souci de présenter un tel calcul (logistique) d'une façon pour ainsi dire axiomatique. Le but de l'art analytique étant de résoudre tout problème par l'emploi de l'analyse, et l'algèbre étant un outil important de l'analyse, il se doit de donner à l'algèbre une forme qui lui permette de résoudre aussi bien les problèmes de nature géométrique que ceux de nature arithmétique. Dès lors, les lettres utilisées par l'algèbre doivent respecter les propriétés des opérations sur les nombres et celles des opérations sur les grandeurs géométriques. Par exemple, elles doivent, comme les grandeurs géométriques, avoir une dimension. Dans son *In artem analyticem isagoge*, de 1591, après avoir repris les axiomes de nature algébrique du livre I des *Éléments* d'Euclide, Viète donne explicitement les propriétés des opérations sur les lettres.

Mais que sont ces lettres ? Rien n'est précisé. Les lettres ne sont que des «espèces», des signes, qui doivent se comporter d'une certaine façon lorsque intégrées dans une opération. Elles ne sont ni

(1) ‹Introduction à l'art analytique par François Viète›, traduit par M.F. Ritter, *Bullettino de bibliografia e de storia delle scienze mathematiche e fisiche*, vol. 1, 1868, pp. 222-244, voir p. 232.

des nombres ni des grandeurs géométriques. Elles ne font que reproduire le comportement des nombres ou des grandeurs géométriques. Le problème de la nature des nombres et de leurs relations avec la géométrie ne se pose donc plus, puisque les équations correspondant aux relations caractéristiques d'un problème ne mettent en jeu que des espèces. Le niveau d'abstraction atteint ici impressionne. Il explique aussi pourquoi, dans les livres d'histoire des mathématiques, on présente Viète comme celui qui a pour la première fois représenté par des lettres les grandeurs indéterminées, comme les coefficients[1]. En fait, Viète n'avait pas vraiment le choix. Se conformant à la deuxième loi *Kath'auto* de Ramus voulant que chaque domaine de connaissances ait un ou des objets propres, il ne pouvait introduire ni nombres ni grandeurs géométriques dans les équations des espèces. Dès lors, un peu comme un auteur de roman doit se plier à la logique d'un personnage, le mathématicien poitevin a dû respecter la cohérence de sa logistique spécieuse et n'avoir que des lettres dans ses expressions symboliques. Les seuls nombres qui peuvent y apparaître sont les nombres qui résultent d'un dénombrement d'une espèce spécifique, comme $B\,3$ pour $B + B + B$.

Cette logistique spécieuse devient donc autonome. Elle n'a plus besoin, comme chez Al-Khwarizmi ou Cardan, d'avoir recours à des preuves géométriques. Grâce à ses axiomes, elle est auto-suffisante en ce qui a trait aux démonstrations.

L'approche de Viète transforme donc fondamentalement l'algèbre. Cette dernière n'est plus vue comme une arithmétique généralisée. D'une part, elle recueille de sa filiation avec l'analyse le prestige attribué aux mathématiques grecques. Elle peut alors prétendre se situer parmi les plus nobles domaines mathématiques, ce que sa relation avec le monde marchand et le monde arabe ne lui permettait pas auparavant. D'autre part, maintenant indépendante de l'arithmétique et de la géométrie, elle acquiert un pouvoir démonstratif qu'elle n'avait jamais eu précédemment. Elle demeure avant tout un outil, mais un outil maintenant noble.

(1) De fait, on rencontre chez Jordanus de Nemore (1225-1260) l'utilisation de lettres pour les coefficients.

LA LOGISTIQUE SPÉCIEUSE, UNE APPROCHE AXIOMATIQUE

Voyons maintenant très brièvement comment se structure cette logistique spécieuse telle que Viète la présente dans son livre programmatique *In artem analyticem isagoge*. L'approche axiomatique se déclare dès le début, au chapitre II, lorsque Viète accepte comme démontrés seize axiomes ou propriétés de l'égalité et des proportions que l'on retrouve dans les *Éléments* d'Euclide. Ainsi, l'axiome 2 s'énonce en ces termes : «*Les quantités égales à une même quantité sont égales entre elles*», et l'axiome 15 : «*Si l'on a trois ou quatre grandeurs et que le produit des termes extrêmes est égal au produit des moyens, elles sont en proportion*[(1)]». Au chapitre III, il donne la loi des homogènes : «*Les homogènes doivent être comparés aux homogènes*», autrement dit on ne peut comparer, additionner et soustraire que des grandeurs de même dimension. Il continue en désignant par un nom chacune des dimensions : carré, cube, carré-carré, carré-cube, etc. lorsqu'il s'agit de puissances successives d'une même lettre, et longueur, plan, solide, plano-solide, etc. lorsqu'il s'agit d'une lettre ayant une dimension spécifique. Le chapitre IV est dédié aux préceptes de la logistique spécieuse. Ces préceptes sont de fait les règles régissant les quatre opérations de base : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Elles précisent, d'une part, l'effet de ces opérations sur la dimension des lettres impliquées, d'autre part, les notations (par exemple, le résultat de B plan divisé par A est noté $\dfrac{B \text{ plan}}{A}$) et, enfin, des règles de manipulation, comme la commutativité de la multiplication, la distributivité de la multiplication sur l'addition et des règles de manipulation de fractions comme «soit ajouter Z à $\dfrac{A \text{ plan}}{B}$, la somme sera $\dfrac{A \text{ plan} + Z \text{ par } B}{B}$». On peut dès lors écrire des expressions symboliques comme celle-ci :

$$\left\{\frac{S \text{ in } A \text{ planum } R\,bis \text{ in } A \text{ planum}}{R}\right\} \text{aequabitur } B \text{ plano}$$

(1) Dans ce paragraphe, les traductions du latin sont celles de Ritter, dans ‹Introduction à l'art analytique par François Viète›, *Bulletino de bibliografia e de storia delle scienze mathematiche e fisiche*, vol. 1, 1868.

Aujourd'hui, nous écririons $\dfrac{SA + 2RA}{R} = B$, où S est une lettre de dimension 1 pour Viète, A une lettre de dimension 2 pour Viète (ce qui explique le *planum* après le A), R une lettre de dimension 1 pour Viète, et B une lettre de dimension 2 pour Viète. Remarquons que même si les espèces possèdent une dimension, elles ne sont pas des grandeurs géométriques puisqu'elles sont simplement des lettres. On pourrait dire qu'elles sont des grandeurs universelles. En ce sens, les espèces sont indépendantes des nombres et des grandeurs géométriques. Toutefois, elles en possèdent les propriétés.

Au chapitre V, «Des lois du zététique», Viète donne enfin les règles de manipulation des équations et le vocabulaire qu'il y associe, entre autres, le choix des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les grandeurs données. Mais ce nouveau mot, «zététique», qui apparaît dans le titre de ce chapitre, que signifie-t-il ? Pour en connaître le sens, il nous faut aller au-delà de la logistique spécieuse pour revenir à la raison d'être même de l'art analytique, soit de résoudre des problèmes.

LA STRUCTURE DE L'ART ANALYTIQUE

Dans l'exemple de la section 2, le travail analytique fait dans la *Resolutio* implique un court développement basé sur la logistique spécieuse. Dans des problèmes plus complexes, ce développement peut être beaucoup plus long et étriqué. Comme nous l'avons vu, le but de la *Resolutio* est d'exhiber une *Porisma* qui caractérise le problème. Ce travail que Ghetaldi nomme *Resolutio*, Viète l'avait appelé «*le zététique*». On pourrait définir le zététique ainsi : mise en équation du problème et manipulation de cette équation pour la mettre sous une forme canonique donnant lieu à une interprétation géométrique, souvent en termes de proportions. Une telle équation est dite ordonnée et la proportion qui lui correspond est elle-même dite ordonnée. Cette proportion est appelée la constitution de l'équation. Le zététique constitue une première partie de l'art analytique. La logistique spécieuse est l'outil privilégié du zététique.

Dans le processus analytique de résolution de problèmes géométriques, la *Porisma* n'est vraiment utile que si elle remplit deux conditions. D'abord, elle doit pouvoir être effectivement traduite en une construction géométrique (nous y reviendrons dans le paragraphe suivant). Ensuite, elle doit pouvoir permettre la mise en forme de la synthèse en parcourant dans le sens inverse l'analyse. Or, pour qu'un tel parcours puisse se faire, il faut que, dans l'analyse, chaque relation soit équivalente à celle qui la précède. L'étude de la légitimité de la synthèse en tant que l'inverse de l'analyse, Viète l'appelle le «*poristique*». Autrement dit, le poristique pourrait se définir comme l'étude de certains passages délicats du cheminement analytique dont la réversibilité n'est pas assurée de façon immédiatement convaincante pour son utilisation dans un cheminement synthétique. Notons toutefois que le sens que nous attribuons à «poristique» ne fait pas l'unanimité parmi les historiens. Le poristique est la deuxième partie de l'art analytique.

Enfin, la troisième partie consiste, en utilisant les résultats du zététique, en la résolution effective des problèmes, que ces derniers soient de nature géométrique ou numérique. Viète nomme cette troisième partie l'«*exégétique*» ou «*rhétique*». Mais cohérent avec son approche ramusienne et la second loi *kath'auto*, il distingue l'exégétique numérique de l'exégétique géométrique.

L'exégétique numérique consiste à déterminer numériquement les racines des équations. Plus spécifiquement, elle fournit des méthodes d'approximation des racines d'équations numériques, c'est-à-dire des équations dont les coefficients sont précisément des nombres. Voici un exemple de problème résolu par l'exégétique numérique :

> *Soit proposé* 370 N – 1 Q *égale* 9,261. *On demande la valeur de* 1N *ou de la racine du carré arraché proposé*[1].

Le N indique la première puissance de l'inconnue, le Q, l'inconnue au carré. Nous écririons : $370x - x^2 = 9\,261$. Remarquons l'utilisation de notations qui s'inspirent de notations plus courantes de l'époque alors que chaque puissance de l'inconnue était représentée par son propre symbole. Il n'y a donc pas de confusion entre les symboles de la logistique spécieuse et ceux du calcul sur les nombres de l'exégétique numérique. À nouveau, Viète reste fidèle à la seconde loi *kath'auto* de Ramus.

L'exégétique géométrique établit pour sa part un mode d'interprétation des équations en termes de constructions géométriques. Déjà dans

(1) François Viète (1600), *De Numerosa Potestatum Ad Exegesim Resolutione*, problème XVI. Traduction de Jacques Borowczyk, publiée dans les *Cahiers d'histoire des mathématiques et d'épistémologie*, IREM de Poitiers, mai 1989.

la logistique spécifique, Viète a pris soin d'associer à chaque type d'équation une forme correspondante en termes de proportions. Il appelle cette forme «la constitution de l'équation». Voici un exemple tiré de son *De Recognitione Aequationum* («De l'examen des équations») publié à titre posthume en 1615 par son disciple Alexander Anderson[1] :

> *Si* B *par* A – A *carré est égal à* Z *carré : il y a trois proportionnelles, dont la moyenne est* Z, *l'agrégat des extrêmes* B ;
> *et* A *est faite la plus petite ou la plus grande des extrêmes.*

De façon plus lisible pour nous, ce théorème s'écrit : «si $AB - A^2 = Z^2$ alors il existe x, y, z, tels que le rapport de x à y est identique au rapport de y à z, avec $Z = y$ et $B = x + z$ et $A = x$ ou z.»

La partie de droite de l'implication est la constitution de l'équation. La constitution de l'équation associe à cette dernière une proportion et donc se rapproche de la géométrie, car il existe plusieurs constructions géométriques permettant de déterminer une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs données. D'ailleurs, dans le livre d'exégétique géométrique portant sur les équations carrées et bicarrées, *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio* («Revue canonique des constructions géométriques»), publié en 1593, on retrouve à la proposition XI l'implication inverse[2] :

> *S'il y avait trois lignes droites proportionnelles : le rectangle sous la composée des extrêmes et l'autre de celles-ci, plus grande ou plus petite, diminué du carré de la même autre, est égal au carré de la moyenne.*

En exhibant ainsi le moyen de passer du géométrique à la logistique spécieuse et *vice versa*, Viète offre aux géomètres le moyen d'aborder ces problèmes avec des armes bien fourbies. En effet, voulant attaquer un problème, le géomètre commence son analyse en exhibant une relation qui caractérise le problème et la traduit dans le langage de la logistique spécieuse. Il continuera en cherchant des expressions

(1) François Viète, *De Recognitione Aequationum*, Paris, David Le Clerc, 1615, chapitre III, théorème III. La traduction est de Jean Peyroux dans : François Viète, *Œuvres mathématiques*, Première partie : «Œuvres mathématiques, suivies du Dénombrement des réalisations géométriques et du supplément de géométrie», Paris, 1991, p. 149.

(2) François Viète, *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio*, Paris, 1593, proposition XI. La traduction est de Jean Peyroux, *op. cit.*, p. 340.

symboliques équivalentes par les règles de la logistique spécieuse et ce jusqu'à découvrir une expression «vraie». Ces expressions ont chacune leur pendant en termes de constructions géométriques. Interprétant géométriquement la dernière expression, le problème peut être alors résolu, et ce, en des termes purement géométriques, le travail d'analyse pouvant être complètement camouflé sous un habillage géométrique.

On peut maintenant classer l'ensemble de l'œuvre de Viète selon ces trois parties de l'art analytique.

	Partie	Titre	Commentaires
1591	Description du programme	*In artem analyticem isagoge*	Republié en 1624 par Jean de Beaugrand
1593	Zététique	*Zeteticorum Libri quinque*	Une série de problèmes
1593	Exégétique géométrique	*Effectionum Geometricarum Canonica Recensio*	Traduction du zététique en termes purement géométriques
1593	Exégétique géométrique	*Supplementum Geometria*	*Idem*
1593	Utilisation de la nouvelle algèbre pour des problèmes géométriques	*Variorum de rebus Mathematicis responsorum, Libri septem*	
1600	Exégétique numérique	*De numerosâ potestatum ad Exegesim resolutione*	Publié par Marino Ghetaldi
1600	Utilisation de la nouvelle algèbre pour des problèmes géométriques	*Francisci Vietae Apollonius Gallus seu Apollonii Pergaei peri peri epairwnn Geometria*	
1607	Utilisation de la nouvelle algèbre pour des problèmes géométriques	*Apollonius Gallus*	Publié par Marino Ghetaldi
1615	Zététique (logistique spécieuse)	*De Recognitione Æquationum*	Publié par Alexander Anderson. Théorie des équations.
1615	Zététique (logistique spécieuse)	*De Emendatione Æquationum Tractatus Secundus*	Publié par Alexander Anderson. Joint au précédent. Correspond peut-être au traité non publié *Ad Logisticem speciosam Notæ posteriores.*
1615	Utilisation de la nouvelle algèbre pour des problèmes géométriques	*Ad Angularium Sectionum Analyticem Theoremata*	Publié par Alexander Anderson. Joint aux deux précédents.
1624	Logistique spécieuse	*Ad Logisticem Speciosam Notæ priores*	Réédité en 1631. Publié les deux fois par Jean de Beaugrand.

NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE

En conclusion, retenons d'abord que l'algèbre de Viète n'est plus une arithmétique généralisée, mais bien une entité mathématique indépendante dont les axiomes ont pour but de reproduire le comportement des grandeurs géométriques et des quantités numériques. C'est en cela qu'on peut dire que la logistique spécieuse est vraiment à l'origine de l'algèbre symbolique. Au-delà des symboles eux-mêmes, il nous faut voir la structure axiomatique explicite de ce système symbolique.

«*Nullum non problema solvere.*» Cette affirmation vient clore l'énoncé programmatique que constitue le *In artem analyticem isagoge*. Elle affirme bien les intentions de Viète. Mais quels sont ces problèmes ? Notre courte étude nous montre que la majorité des problèmes que Viète attaque sont des problèmes ayant une longue histoire remontant aux géomètres grecs. Elle nous laisse entrevoir que ses disciples immédiats s'intéressèrent principalement à de tels problèmes. Les exemples que nous avons choisis sont du second degré. Toutefois, les problèmes non résolus qui intéressent Viète et ses disciples donnent plutôt lieu à des expressions du troisième degré. Nous renvoyons le lecteur au très beau livre de Henk J.M. Bos (2001) pour plus de détails sur ceux-ci. Toutefois, il importe de noter que c'est par la géométrie que l'algèbre a obtenu ses lettres de noblesse(1).

(1) Henk J.M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer Verlag, New York, 2001. Henk J.M. Bos montre de façon convaincante que c'est à cause du choix de la *neusis* comme axiome supplémentaire pour résoudre les problèmes du troisième degré au lieu de l'utilisation de l'intersection de courbes, que l'art analytique de Viète n'a pas pu mettre en action toute sa puissance. L'intersection de courbes sera le fer de lance de la géométrie de Descartes. La *neusis* est ainsi énoncée par Viète à la fin de l'*Isagoge* : «*Tirer d'un point quelconque à deux lignes quelconques une droite telle que le segment intercepté entre ces lignes soit une longueur donnée.*» Sur la *neusis*, voir aussi le chapitre 7 de cet ouvrage.