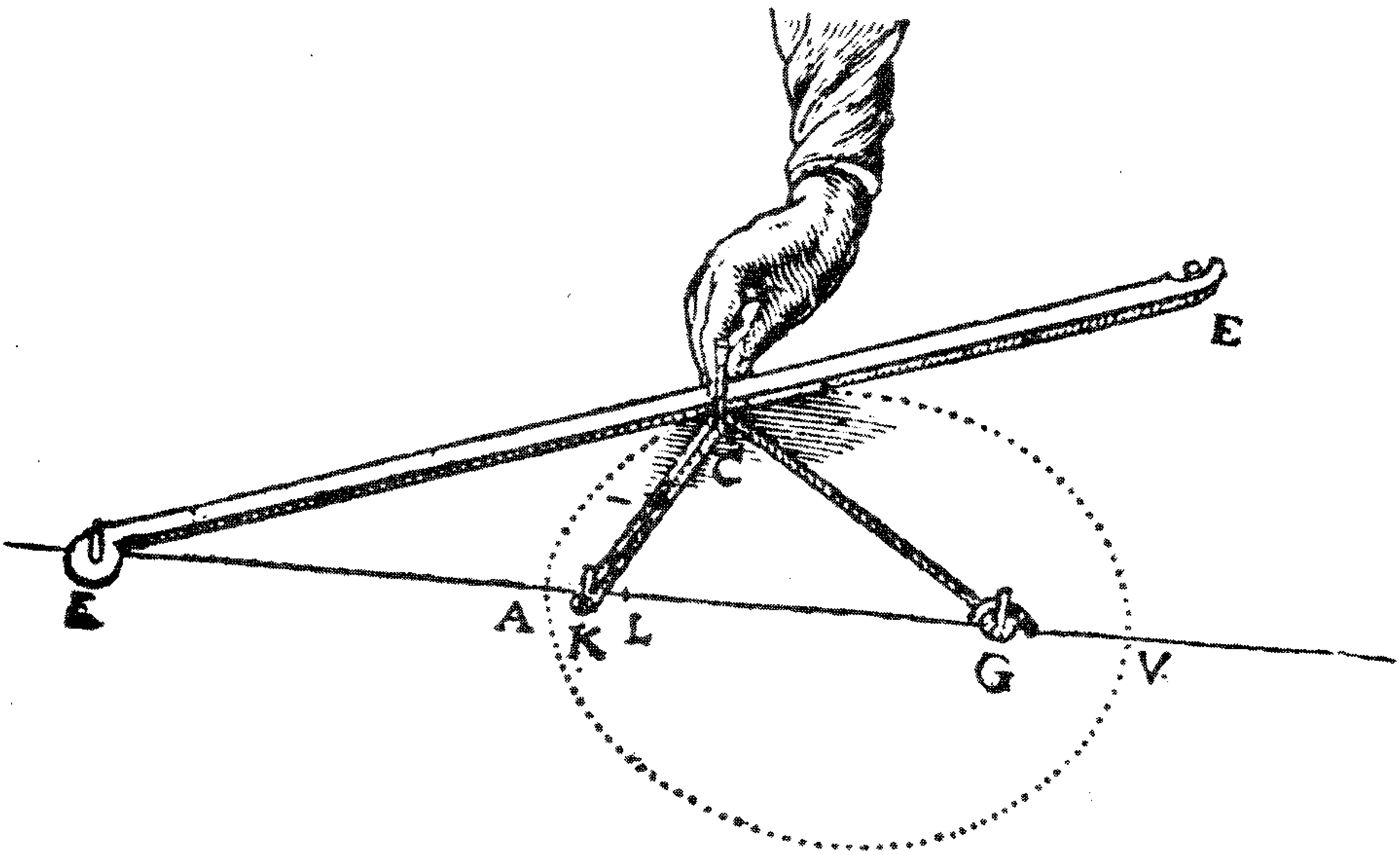
the geometry of



René Descartes

translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham

Dover Publications, Inc. New York

1925, Dover : 1958

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

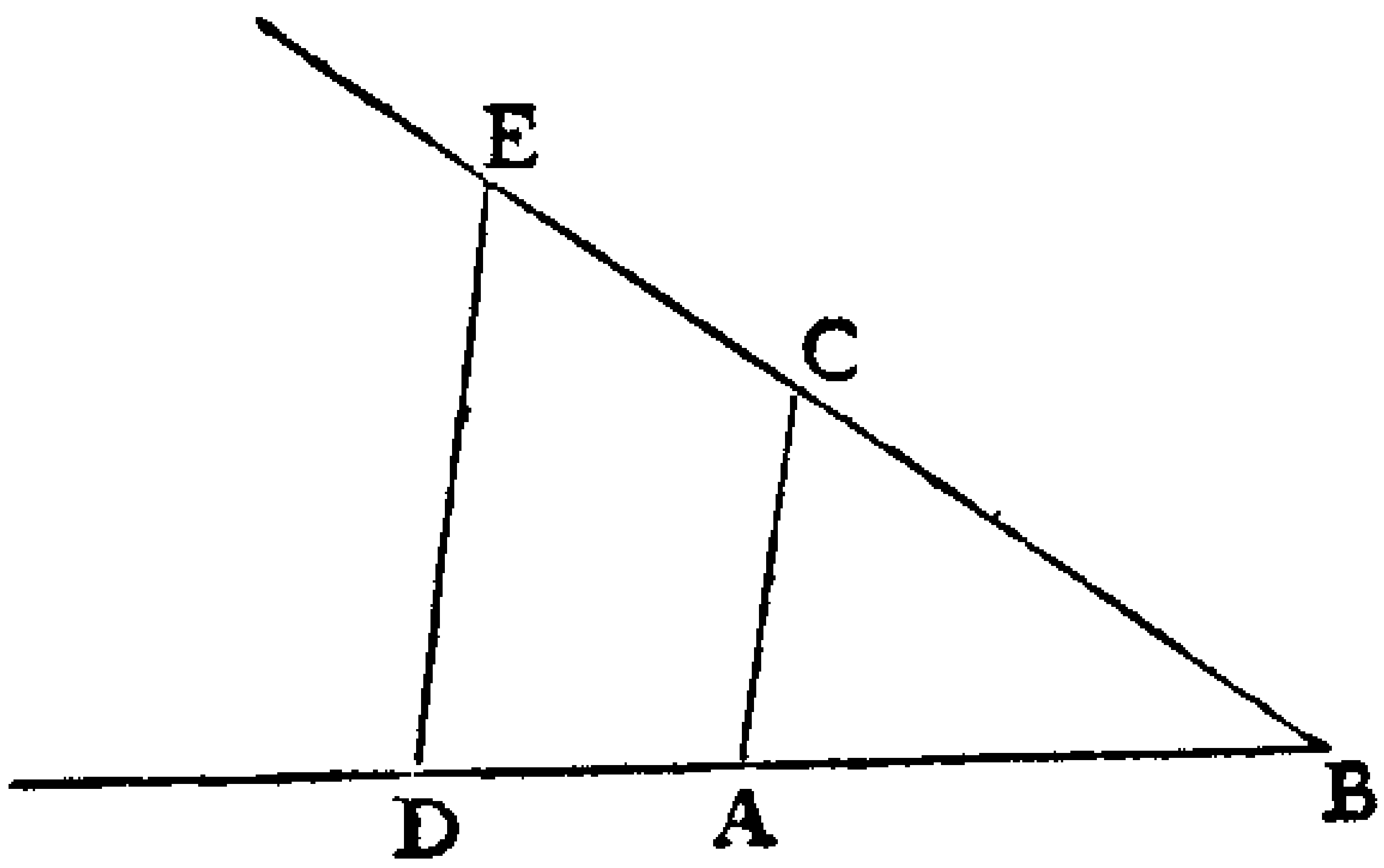
Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Commēt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, on cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

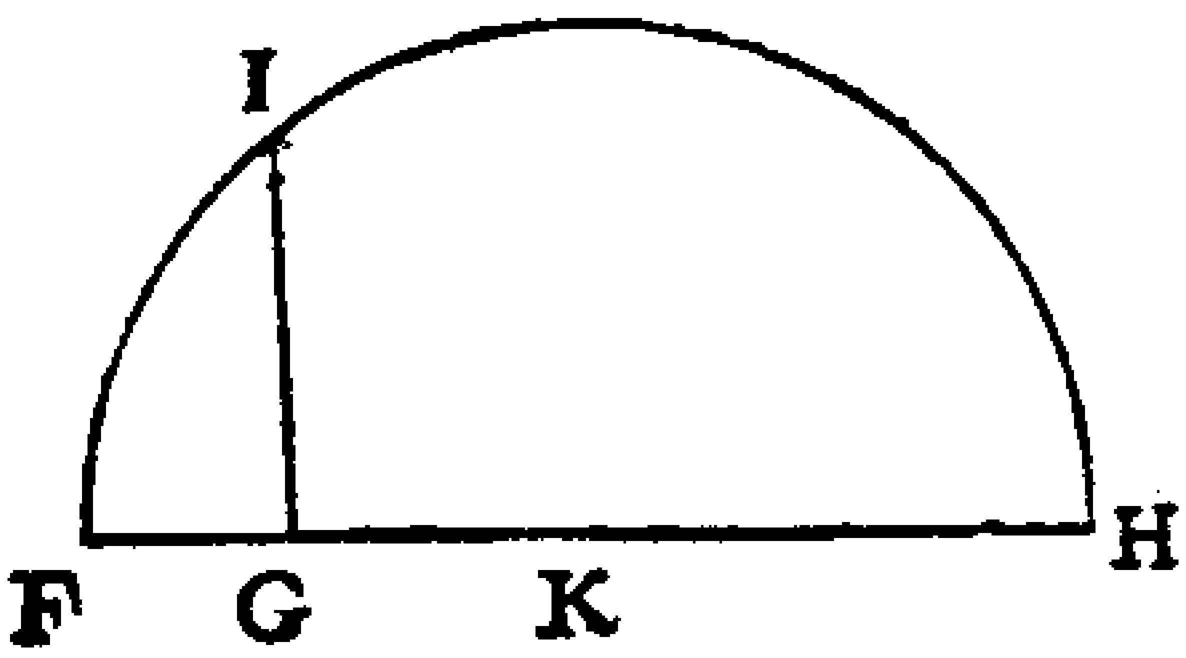


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commēt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a+b$; Et $a-b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d'a^3-b^3+abb, & ainſi des autres.

Vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point determinée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt determinée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb-b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

Au reste affin de ne pas manquer a se souuenir des noms de ces lignes, il en faut tousiours faire vn registre separé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, escriuant par exemple.

A B ∞ 1, c'est a dire, A B esgal à 1.

G H ∞ *a*

B D ∞ *b*, &c.

Commét il faut venir aux Equatiõs qui seruent a resoudre les problesmes.

Ainsi voulant resoudre quelque problesme, on doit d'abord le considerer comme desia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le construire, aussy bien a celles qui sont inconnuës, qu'aux autres. Puis sans considerer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui monstre le plus naturellement de tous en qu'elle sorte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iusques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne mesme quantité en deux façons: ce qui se nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons sont esgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a supposé de lignes, qui estoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobstant on n'omette rien de ce qui est desiré en la question, cela tesmoigne qu'elle n'est pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a discretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës ausqu'elles ne correspond aucune Equation. Aprés cela s'il en reste encore plusieurs, il se faut seruir par ordre de chascune des Equations qui restent aussy, soit en la considerant toute seule, soit en la comparant auec les autres, pour expliquer chascune de ces lignes inconnuës; & faire ainsi

ainsi en les demeslant, qu'il n'en demeure qu'vne seule, esgale a quelque autre, qui soit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le sursolide, ou le quarré de cube, &c. soit esgal a ce, qui se produist par l'addition, ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'vne soit connuë, & les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'escris en cete sorte.

$z \propto b$. ou

$z^2 \propto -az + bb$. ou

$z^3 \propto +az^2 + bbz - c^3$. ou

$z^4 \propto az^3 - c^3z + d^4$. &c.

C'est a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgalé a b, ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z est esgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainsi des autres.

Et on peut tousiours reduire ainsi toutes les quantités inconnuës à vne seule, lorsque le Problesme se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussy par des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'vn ou deux degrés plus composée. Mais ie ne m'areste point a expliquer cecy plus en detail, a cause que ie vous osterois le plaisir de l'apprendre de vous mesme, & l'vtilité de cultiuer vostre esprit en vous y exerceant, qui est a mon auis la principale, qu'on puisse tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

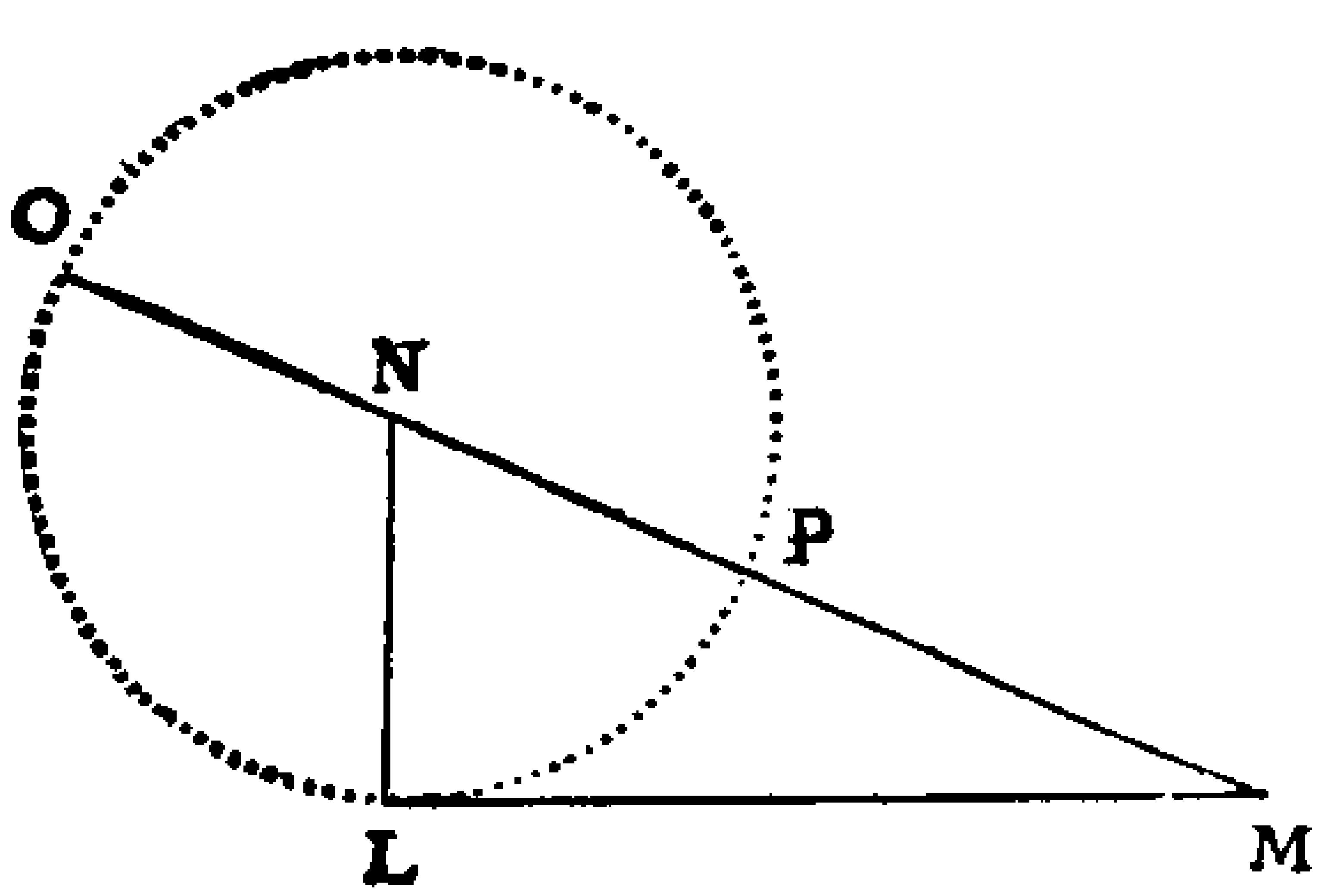
C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problesmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple



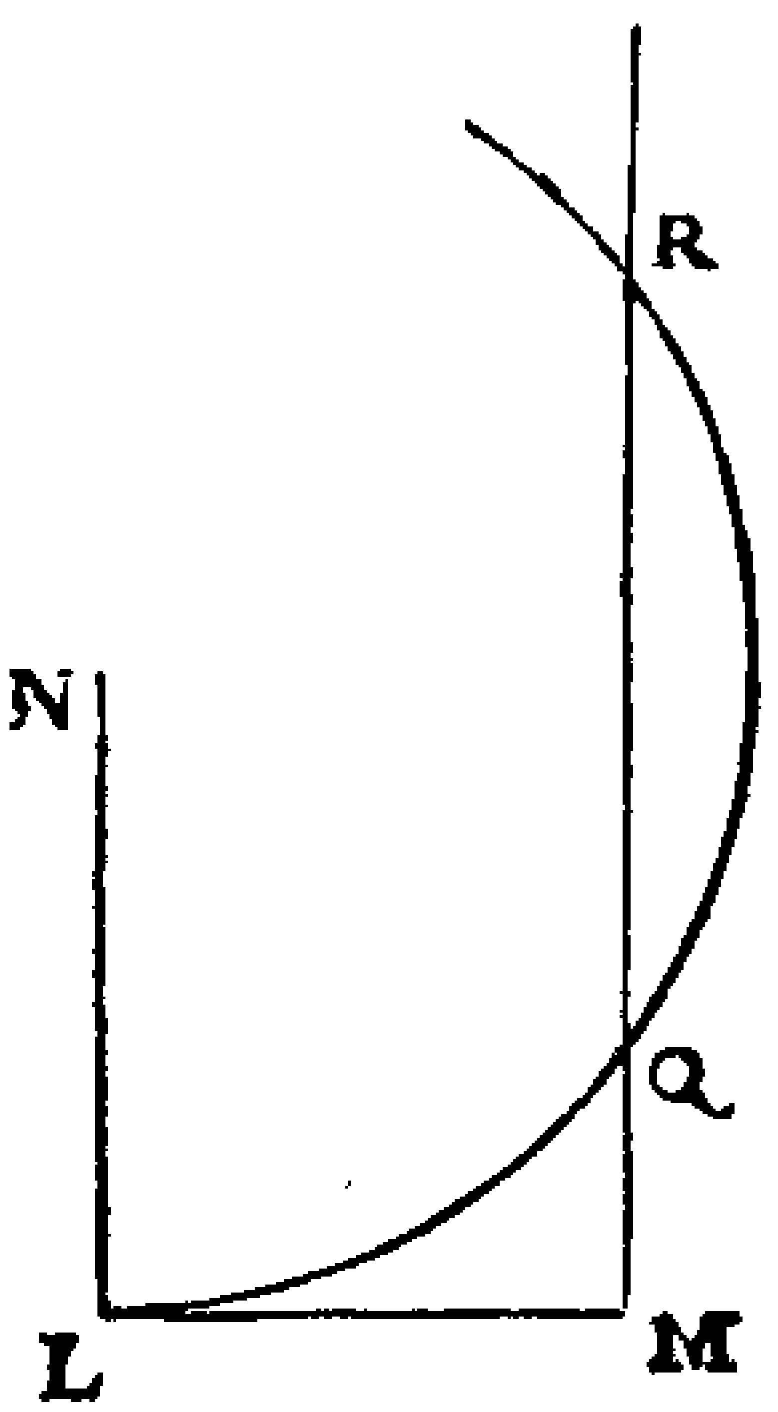
$$z^2 \propto a z + bb$$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2} a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Que si iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$$z^2 \propto az - bb:$$

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay seulement veulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Exemple tiré de Pappus.

Et on le peut voir aussy fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septiesme liure, ou aprés s'estre aresté quelque tems a denombrer tout ce qui auoit esté escrit en Geometrie par ceux qui l'auoient precedé, il parle enfin d'vne question, qu'il dit que ny Euclide, ny Apollonius, ny aucun autre n'auoient sceu entierement resoudre. & voycy ses mots.

Ie cite plutost la version latine que le texte grec affin que chascun l'entende plus aysement.

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius: sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit, per ea tantum conica, quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, &c.

Et vn peu aprés il explique ainsi qu'elle est cete question.

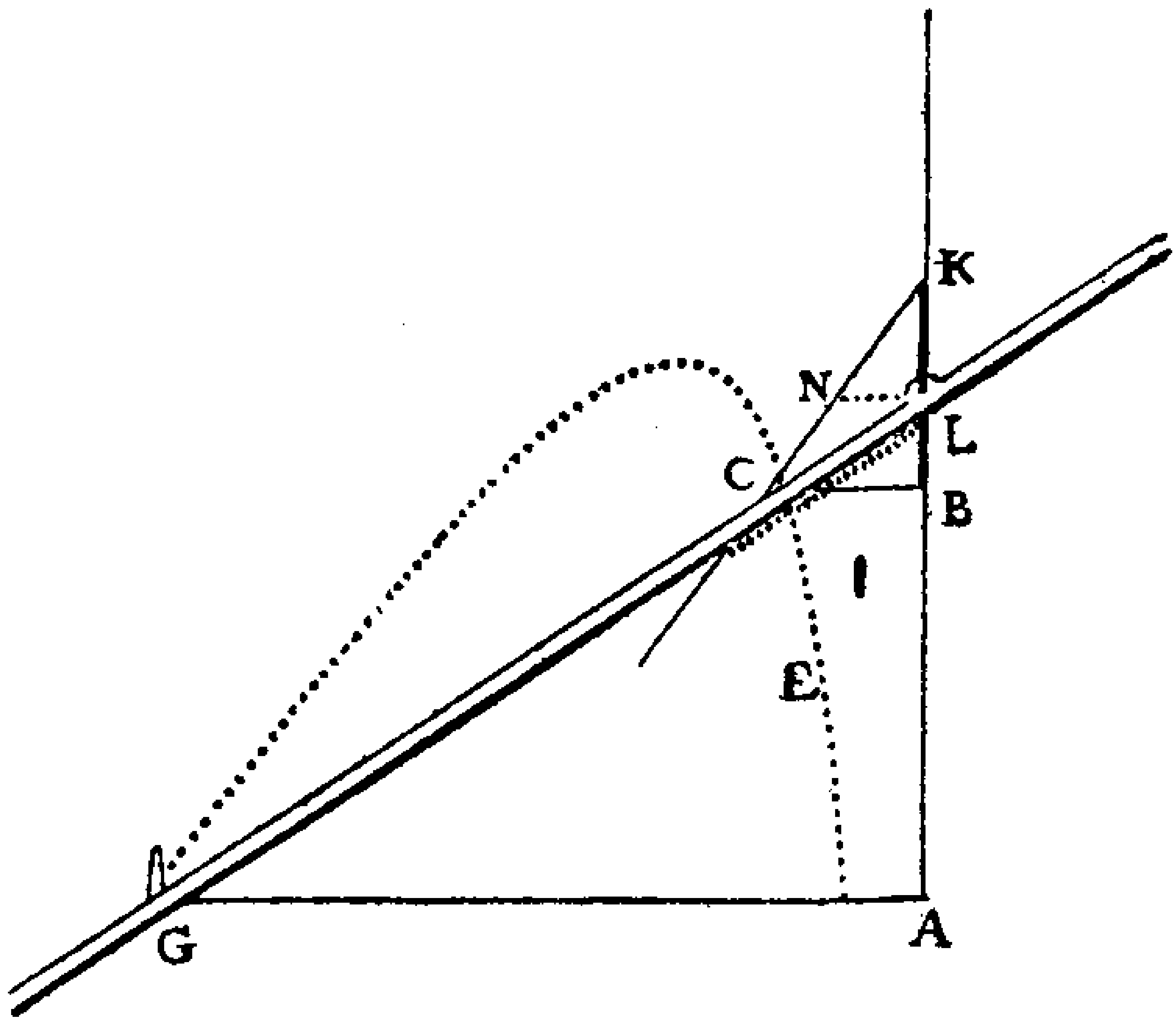
At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se iactat, & ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis du moins que des ſections coniques; ny ce qui peut empeſcher, qu'on ne conçoiue la ſeconde, & la troiſieſme, & toutes les autres, qu'on peut deſcrire, auſſy bien que la premiere; ny par conſequent qu'on ne les recoiue toutes en meſme façon, pour ſeruir aux ſpeculations de Geometrie.

Ie pourrois mettre icy pluſieurs autres moyens pour tracer & conçeuoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus compoſées par degrés a l infini. mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres; ie ne ſçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt a dire qui tombent ſous quelque meſure preciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eſtre exprimé par quelque equation, en tous par vne meſme, Et que lorſque cete equation ne monte que iuſques au rectangle de deux quantités indeterminées, oubien au quarré d'vne meſme, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'Ellipſe qui ſoient compriſes. mais que lorſque l'equation monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion des deux, ou de l'vne des deux quantités indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme; & ainſi des autres a l'infini.

La façon de diſtinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoiſtre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

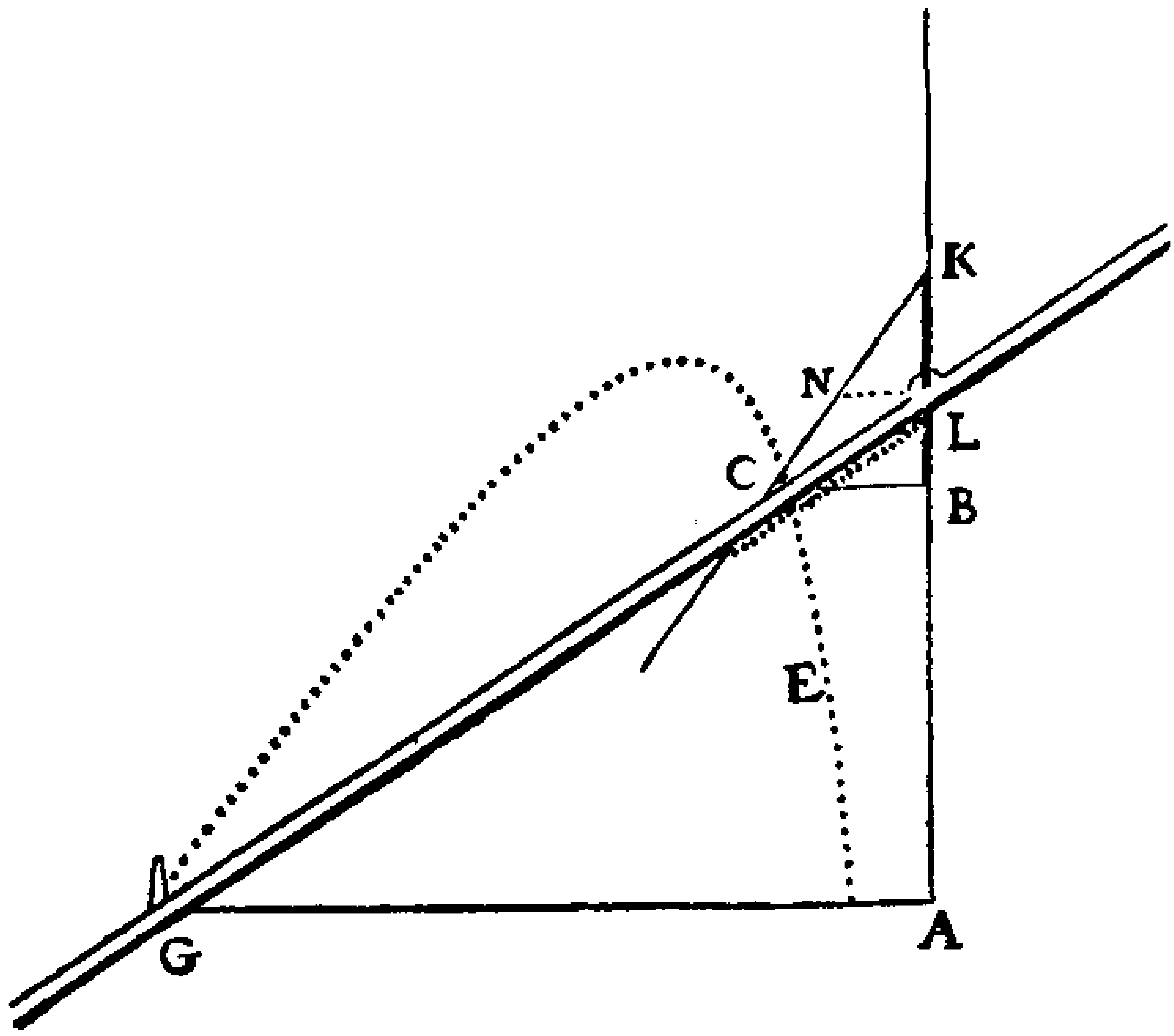
Comme ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne E C, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la

reigle



reigle G L, & du plan rectiligne C N K L, dont le costé K N est indefiniement prolongé vers C , & qui estant meu sur le plan de dessous en ligne droite, c'est a dire en telle sorte que son diametre K L se trouue tousiours appliqué sur quelque endroit de la ligne B A prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cete reigle G L autour du point G, a cause quelle luy est tellement iointe quelle passe tousiours par le point L. Ie choisis vne ligne droite, comme A B, pour rapporter a ses diuers poins tous ceux de cete ligne courbe E C, & en cete ligne A B ie choisis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie choisis & l'vn & l'autre, a cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veult. car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'equation plus courte, & plus aysée; toutefois en quelle façon qu'on les prene, on peut tousiours faire que la ligne paroisse de mesme genre, ainsi qu'il est aysé a demonstrer.

Aprés



Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sſ tipliant

tipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Que ſi en l'inſtrument qui ſert a la deſcrire on fait qu'au lieu de la ligne droite C N K, ce ſoit cete Hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan C N K L; l'interſection de cete ligne & de la reigle G L deſcrira, au lieu de l'Hyperbole E C, vne autre ligne courbe, qui ſera du ſecond genre. Comme ſi C N K eſt vn cercle, dont L ſoit le centre, on deſcrira la premiere Conchoide des anciens; & ſi c'eſt vne Parabole dont le diametre ſoit K B, on deſcrira la ligne courbe, que i'ay tantoſt dit eſtre la premiere, & la plus ſimple pour la queſtion de Pappus, lorſqu'il n'y a que cinq lignes droites données par poſition. Mais ſi au lieu d'vne de ces lignes courbes du premier genre, c'en eſt vne du ſecond, qui termine le plan C N K L, on en deſcrira par ſon moyen vne du troiſieſme, ou ſi c'en eſt vne du troiſieſme, on en deſcrira vne du quatrieſme, & ainſi a l'infini. comme il eſt fort ayſé a connoiſtre par le calcul. Et en quelque autre façon, qu'on imagine la deſcription d'vne ligne courbe, pourvûqu'elle ſoit du nombre de celles que ie nomme Geometriques, on pourra touſiours trou-

uer