Diophante

Second degré

Livres arithmétiques. Livre I, problème XXVII

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres : chose qui est d'ailleurs figurative.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

Livres arithmétiques. Livre I, Problème XXVIII

Trouver deux nombres tels que leur somme et la somme de leurs carrés forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le double de la somme des carrés des nombres excède d'un carré le carré de la somme des nombres, chose qui est aussi figurative.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que la somme de leurs carrés forme 208 unités.

Que la différence des nombres soit 2 arithmes. Que le plus grand nombre soit 1 arithme, augmenté de nouveau de la moitié de la somme des nombres, c'est-à-dire de 10 unités, et que le plus petit nombre soit 10 unités moins 1 arithme; ce qui établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur différence est 2 arithmes.

Il faut encore que la somme des carrés des nombres forme 208 unités. Mais la somme de leurs carrés forme 2 carrés d'arithme plus 200 unités; ce que nous égalons à 208 unités, et l'arithme devient 2 unités.

Revenant à ce que nous avons posé, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit nombre sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

Livres arithmétiques. Livre III, Problème XXVIII

Trouver trois nombres tels que le carré de la somme de ces trois nombres, retranché de chacun de ces nombres, forme un carré.

Posons que la somme des trois nombres est 1 arithme, et que le carré de cette somme est 1 carré d'arithme. Que les trois nombres soient 2 carrés d'arithme, 5 carrés d'arithme et 10 carrés d'arithme. On établit ainsi que chacun des nombres, diminué du carré de la somme des trois nombres, c'est-à-dire diminué de 1 carré d'arithme, forme un carré.

Dès lors, puisque le carré de la somme des trois nombres a évidemment comme racine la somme des trois nombres, il s'ensuit que la somme des trois nombres est 1 arithme. Or, cette somme est aussi 17 carrés d'arithme; donc, l'arithme devient 1/17, et le carré d'arithme 1/289. Le premier nombre sera 2/289; le second sera 5/289; le troisième 10/289, et ces nombres résolvent la proposition.

Système d'équations (voir le symbolisme)
(Ce qui suit est tiré de Sesiano, 1999)

Clé du symbolisme employé dans les *Livres arithmétiques* :

unités	$\overset{\circ}{\mathrm{M}}$	μονα(δε)ς
x	ς	ἄριθμός
x^2	Δ^{Y}	δύναμις
x^3	K^{Y}	κύβος
x^4	$\Delta^{Y}\Delta$	δυναμοδύναμις
x^5	ΔK^{Y}	δυναμόκυβος
x^6	$K^{Y}K$	κυβόκυβος
x^7	–	–
x^8	ΔKK^{Y} ?	δυναμοκυβόκυβος ?
x^9	$K^{Y}KK$?	κυβοκυβόκυβος ?
$\frac{1}{x}$	ς^{x}	ἄριθμοστόν
$\frac{1}{x^2}$	$\Delta^{Y^{x}}$	δυναμοστόν
...	...	...
carré	□$^{\text{ος}}$	τετράγωνος
=	ι$^{\sigma}$	ἴσος
–	⋔	(λείπειν)

Figure 6

Livres arithmétiques. Livre II, problème VIII

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι̅ς̅ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. Τετάχθω ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ς α̅, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ς$^{\text{ῶν}}$ ὅσων δήποτε ⋔ μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά· ἔστω δὴ ς β̅ ⋔ M̊ δ̅. ἔσονται ἄρα οἱ $\square^{\text{οι}}$, ὃς μὲν Δ^{Y} α̅, ὃς δὲ Δ^{Y} δ̅ M̊ ι̅ς̅ ⋔ ς ι̅ς̅. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι M̊ ι̅ς̅. Δ^{Y} ἄρα ε̅ M̊ ι̅ς̅ ⋔ ς ι̅ς̅ ἴσαι εἰσὶ M̊ ι̅ς̅· καὶ γίνεται ὁ ς ι̅ς̅$^{\text{ε}}$. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ι̅ς̅$^{\text{ε}}$, αὐτὸς ἄρα ἔσται σ̅ν̅ς̅$^{\text{κε}}$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰ ι̅β̅$^{\text{ε}}$, αὐτὸς ἄρα ἔσται ρ̅μ̅δ̅$^{\text{κε}}$. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Traduction :

Partager un carré proposé en deux carrés.

Soit proposé de partager 16 *en deux carrés.*

Soit posé pour la racine du premier x, et pour la racine du second un nombre quelconque de x moins autant d'unités que vaut la racine du nombre à partager. Soit ceci $2x - 4$. *Donc, l'un des carrés sera* x^2, *l'autre* $4x^2 + 16 - 16x$.[19] *Je veux encore que leur somme soit égale à* 16. *Ainsi,* $5x^2 + 16 - 16x = 16$, *d'où il vient que* $x = \frac{16}{5}$. *La racine du premier sera* $\frac{16}{5}$, *et lui-même* $\frac{256}{25}$ *; la racine du second sera* $\frac{12}{5}$, *et lui-même* $\frac{144}{25}$. *La preuve est évidente.*

Livres arithmétiques. Livre V, problème IX

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον.

Δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, μήτε τὸν διπλάσιον αὐτοῦ καὶ μονάδι μιᾷ μείζονα μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ οὗ ὁ μονάδι μιᾷ μείζων ἔχῃ μέρος τέταρτον.

Ἐπιτετάχθω δὴ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι M̊ ς̅ καὶ ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$. Ἐπεὶ οὖν θέλομεν τὴν μονάδα τεμεῖν καὶ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι M̊ ς̅ καὶ ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$, τὸ ἄρα σύνθεμα τῶν $\square^{\text{ων}}$ ἐστὶν M̊ ι̅γ̅. δεήσει ἄρα τὸν ι̅γ̅ διελεῖν εἰς δύο $\square^{\text{ους}}$ ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ M̊ ς̅. Ἐὰν οὖν τὸν ι̅γ̅ διέλω εἰς δύο $\square^{\text{ους}}$, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ἐστὶν M̊ α̅, λύω τὸ ζητούμενον· λαμβάνω τοῦ ι̅γ̅ τὸ ἥμισυ, γίνεται ς̅ *L'*, καὶ ζητῶ τί μόριον προσθεῖναι M̊ ς̅ *L'* καὶ ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$. καὶ πάντα τετράκις. ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς κ̅ς̅ μονάσιν, καὶ ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον $\Delta^{Y\chi}$ α̅, καὶ γίνονται M̊ κ̅ς̅ $\Delta^{Y\chi}$ α̅ ἴσα $\square^{\varphi}$. Καὶ πάντα ἐπὶ Δ^{Y}. γίνονται Δ^{Y} κ̅ς̅ M̊ α̅ ἴσα $\square^{\varphi}$. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς ε̅ M̊ α̅, καὶ γίνεται ὁ ς M̊ ι̅. [Δ^{Y} γὰρ M̊ ρ̅, τὸ $\Delta^{Y\chi}$ M̊ α̅$^{\rho}$.] ἔσται ἄρα τὸ ταῖς κ̅ς̅ προστιθέμενον α̅$^{\rho}$, τὸ ἄρα ταῖς M̊ ς̅ *L'* γίνεται α̅$^{\upsilon}$ καὶ ποιεῖ $\square^{\text{ον}}$ τὸν ἀπὸ πλευρᾶς ν̅α̅$^{\kappa}$.

Δεῖ οὖν τὸν ι̅γ̅ διαιρούμενον εἰς δύο $\square^{\text{ους}}$ κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα ν̅α̅$^{\kappa}$, καὶ ζητῶ τί ἡ τριὰς λείψασα, προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ τὸν αὐτόν, τουτέστιν ν̅α̅$^{\kappa}$. Τάσσω οὖν δύο $\square^{\text{ους}}$, ἕνα μὲν ἀπὸ ς ι̅α̅ M̊ β̅, τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ Μ̊ γ̄ ⋔ ϛ ϑ̄, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν □ων Δʏ σ̄β̄ Μ̊ ῑγ̄ ⋔ ϛ ῑ ἴσος Μ̊ ῑγ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ ε̄ ρα. ἔσται ἄρα ἑνὸς τῶν □ων ἡ πλευρὰ σ̄ν̄ζ̄ ρα, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου σ̄ν̄η̄ ρα. καὶ ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν □ων ἄρωμεν Μ̊ ς̄, ἔσται τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος Μ̊ ‚ε̄τ̄ν̄η̄ α.σα, τὸ δὲ ἕτερον ‚δ̄ω̄μ̄γ̄ α.σα, καὶ δῆλον ὡς ἑκάτερον μετὰ Μ̊ ς̄ ποιεῖ □ον.

Traduction

Partager l'unité en deux parties et ajouter à chacune des parties un nombre donné de manière à former un carré.

Il faut toutefois que le (nombre) donné ne soit pas impair et que le double de ce nombre, augmenté de l'unité, ne soit pas divisible par un nombre premier qui, augmenté de l'unité, possède une quatrième partie.

Soit proposé d'ajouter 6 *unités à chacune des parties et de former un carré.*

Ainsi, puisque nous voulons partager l'unité et ajouter 6 *unités à chacune des parties pour faire un carré, la somme de ces carrés sera* 13 *unités. Il faut alors partager* 13 *en deux carrés tels que chacun d'eux soit plus grand que* 6 *unités. Si donc je partage* 13 *en deux carrés dont la différence soit plus petite que l'unité, je résoudrai la question. Je prends la moitié de* 13*, ce qui donne* $6 + \frac{1}{2}$*, et je cherche la fraction qui, lorsqu'on lui ajoute* $6 + \frac{1}{2}$ *unités, fait un carré. Multipliant le tout par* 4*, je viens à chercher une fraction carrée qui, ajoutée à* 26 *unités, fasse un carré. Que la fraction à ajouter soit* $\frac{1}{x^2}$*; il vient* $26 + \frac{1}{x^2}$ *égal à un carré. Multipliant le tout par* x^2*, il vient* $26x^2 + 1$ *égal à un carré. Que ceci soit égal au carré de côté* $5x + 1$*; alors,* x *est* 10 *unités.* [*Car* x^2 *est* 100*, et* $\frac{1}{x^2}$ *est* $\frac{1}{100}$.] *Par conséquent, ce qui est à ajouter aux* 26 *unités sera* $\frac{1}{100}$*; donc,* $\frac{1}{400}$ *sera à ajouter aux* $6 + \frac{1}{2}$ *unités, et cela fera un carré, de côté* $\frac{51}{20}$.

Il faut donc que, partageant 13 *en deux carrés, on construise la racine de chacun de ces deux carrés aussi près que possible de* $\frac{51}{20}$*; et je cherche ce qui, diminué de* 3 *et augmenté de* 2*, forme celui-ci, à savoir* $\frac{51}{20}$. *Je pose donc deux carrés, l'un de côté* $11x + 2$*, l'autre de côté* $3 - 9x$*. La somme des carrés qui en proviennent sera* $202x^2 + 13 - 10x$*, qui égale* 13*. Il vient que* x *est* $\frac{5}{101}$*. Donc, la racine de l'un des carrés sera* $\frac{257}{101}$*, celle de l'autre* $\frac{258}{101}$*. Et si nous retranchons des carrés de chacune de ces racines* 6*, il viendra pour l'une des parties de l'unité* $\frac{5358}{10201}$ *, pour l'autre* $\frac{4843}{10201}$ *. Il est clair que chacune d'elles forme, avec* 6 *unités, un carré.*