LES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE D'EUCLIDE,

traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides; avec des Notes;

Par F. PEYRARD, Bibliothécaire
de l'École Polytechnique.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT NATIONAL.

Et nova sunt semper. — OVID....

A PARIS,

CHEZ F. LOUIS, LIBRAIRE, RUE DE SAVOIE, N° 12.

AN XII — 1804.

ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE

D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce qui n'a aucune partie.
2. La ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est toute également interposée entre ses points (1).
5. Une superficie est ce qui a longueur et largeur seulement.

(1) Dans la suite nous dirons une droite au lieu de dire une ligne droite.

Voir la note page 559. A

6. Les extrémités d'une superficie sont des lignes.

7. Une superficie plane est celle qui est également ~~interposée~~ placée entre ses lignes droites.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque des lignes droites comprennent un angle, l'angle s'appelle rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit. La droite tombante est dite perpendiculaire ~~à~~ sur celle sur laquelle elle tombe.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand que l'angle droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit que l'angle droit.

13. On appelle terme ou *limite* ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. On appelle figure ce qui est compris entre une ou plusieurs limites.

15. Le cercle est une figure plane comprise dans une seule ligne qu'on appelle circonférence; toutes les droites menées à la circonférence d'un seul point de ceux qui sont placés dans les figures, sont égales entr'elles.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle ; le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est une figure comprise entre le diamètre et la portion de la circonférence qui est soutendue ~~interceptée~~ par le diamètre.

19. Un segment de cercle est une portion du cercle comprise entre une droite et la circonférence du cercle.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. On appelle trilatères ou *triangles* les figures terminées par trois droites.

22. Quadrilatères, celles qui sont terminées par quatre.

23. Multilatères ou *polygones*, celles qui sont terminées par plus de quatre droites.

24. Parmi les figures trilatères, celle qui est terminée par trois côtés égaux se nomme triangle équilatéral.

25. Celle qui a seulement deux côtés égaux se nomme triangle isocèle.

26. Celle dont tous les côtés sont inégaux se nomme triangle scalène.

27. Parmi les figures trilatères, celle qui a un angle droit se nomme triangle rectangle.

28. Celle qui a un angle obtus se nomme triangle amblygone ou *triangle obtus-angle*.

29. Celle qui a ses trois angles aigus, triangle oxygone ou *triangle acutangle*.

30. Parmi les figures quadrilatères, celle qui a ses côtés égaux et ses angles droits, se nomme quarré.

31. Celle qui a ses angles droits, mais qui n'a pas ses côtés égaux, se nomme quarré oblong ou *rectangle*.

32. Celle qui a ses côtés égaux, mais qui n'a pas ses angles droits, se nomme rhombe.

33. Celle dont les côtés et les angles opposés sont égaux, mais dont tous les côtés ne sont pas égaux et dont les angles ne sont pas droits, se nomme rhomboïde.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes (1).

35. Enfin, les parallèles sont des droites qui, étant placées sur un même plan, et qui étant

---

(1) On nomme aujourd'hui trapèze un quadrilatère dont deux de ses côtés seulement sont parallèles, et les autres quadrilatères, excepté le trapèze et les quadrilatères dont parle Euclide, se nomment ordinairement quadrilatères simplement dits.

prolongées de part et d'autre à l'infini, ne se rencontrent nulle part.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque décrire une circonférence de cercle.

Notions communes ou axiomes.

1. Les quantités *qui sont égales* à une même *quantité sont égales* entr'elles.

2. Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les tous seront égaux.

3. Si de quantités égales on retranche des quantités égales, les restes seront égaux.

4. Si à des quantités inégales on ajoute des quantités égales, les tous seront inégaux.

5. Si de quantités inégales on retranche des quantités égales, les restes seront inégaux.

6. Les quantités qui sont doubles d'une même quantité sont égales entr'elles.

7. Les quantités qui sont les moitiés d'une même quantité sont égales entr'elles.

8. Les choses qui se conviennent mutuellement sont égales entr'elles.

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droits sont égaux (1).

11. Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

12. Deux droites ne renferment point un espace.

PROPOSITION PREMIÈRE.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Soit AB (fig. 1) la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral.

Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3); ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE; et du point C, où les cir-

(1) Dans quelques manuscrits les axiomes 10 et 11 se trouvent placés parmi les demandes.

LIVRE II.

DÉFINITIONS.

1. TOUT parallélogramme rectangle est dit contenu sous les deux droites qui comprennent un angle droit.

2. Dans tout parallélogramme, on appelle gnomon la réunion de l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux complémens.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris sous ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a point été partagée, et sous chacun des segmens de l'autre.

Soient deux droites A, BC (fig. 47), et que la droite BC soit partagée d'une manière quelcoupé aux points D, E : je dis que le rectangle compris sous les droites A, BC est égal au rectangle compris sous les droites A, BD, au rectangle compris sous les droites A, DE, et au rectangle compris sous les droites A, EC.

Conduisez par le point B la droite BF perpendiculaire sur la droite BC (prop. 11. 1)*; faites la droite BG égale à la droite A, et par le point G conduisez la droite GH parallèle à la droite BC (prop. 31. 1); par les points D, E, C, conduisez ensuite les droites DK, EL, CH, parallèles à la droite BG.

Le rectangle BH est égal aux rectangles BK, DL, EH; mais le rectangle BH est compris *sous les droites* A, BC, car il est compris sous les droites GB, BC, dont la droite BG est égale à la droite A; le rectangle BK est compris sous les droites A, BD, car il est compris sous les droites GB, BD, dont la droite GB est égale à la droite A; le rectangle DL est compris sous les droites A, DE, puisque DK, c'est-à-dire BG, est égale à la droite A; et enfin, le rectangle EH est compris sous les droites A, EC : donc le rectangle compris sous les droites A, BC est

* Le premier nombre indique la proposition, et le second indique le livre.

égal au rectangle compris sous les droites A, BD, au rectangle compris sous les droites A, DE, et enfin au rectangle compris sous les droites A, EC.

Donc si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris sous ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a point été partagée et sous chacun des segmens de l'autre; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

THÉORÈME.

Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous l'un et l'autre segment, est égal au quarré de la droite entière.

Que la droite AB (fig. 48) soit partagée d'une manière quelconque au point C : je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BC, avec le rectangle compris sous les droites BA, AC, est égal au quarré de la droite AB.

Sur la droite AB construisez le quarré ADEB (prop. 46. 1), et par le point C conduisez la droite CF parallèle à l'une et à l'autre des droites AD, BE (prop. 31. 1).

Le quarré AE est égal aux rectangles AF, CE; mais le quarré AE est construit sur la droite AB; le rectangle AF est compris sous les droites BA, AC, car il est compris sous les droites DA, AC, dont la droite AD est égale à AB; et enfin le rectangle CE est compris sous les droites AB, BC, puisque la droite BE est égale à la droite AB; donc le rectangle compris sous les droites BA, AC, avec le rectangle compris sous les droites AB, BC, est égal au quarré de la droite AB.

Donc si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, les rectangles compris sous la droite totale et sous chacun des segmens sont égaux au quarré construit sur la droite totale; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

THÉORÈME.

Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et l'un des segmens, est égal au rectangle compris sous les segmens et au quarré formé sur le segment premièrement pris.

Que la droite AB (fig. 49) soit partagée en un point quelconque C: je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BC est égal au rectangle compris sous les droites AC, CB, et au quarré de la droite BC.

Sur la droite BC construisez le quarré CDEB (prop. 46. 1), prolongez en F la droite ED, et par le point A conduisez la droite AF parallèle à l'une ou à l'autre des droites CD, BE (prop. 31. 1).

Le rectangle AE est certainement égal aux rectangles AD, CE; mais le rectangle AE est compris sous les droites AB, BC, car il est compris sous les droites AB, BE, dont la droite BE est égale à la droite BC; le rectangle AD est compris sous les droites AC, CB, puisque la droite DC est égale à la droite CB; et enfin le quarré DB est construit sur la droite BC: donc le rectangle compris sous les droites AB, BC est égal au rectangle compris sous les droites AC, CB et au quarré de la droite BC.

Donc si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous un des segmens, est égal au rectangle compris sous les segmens et au quarré construit sur le segment premièrement pris; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le quarré construit sur la droite entière est égal aux quarrés formés sur les deux segmens et au double du rectangle compris sous ces deux segmens.

Que la droite AB (fig. 50) soit partagée d'une manière quelconque au point C : je dis que le quarré construit sur AB est égal aux quarrés construits sur AC, CB, et au double du rectangle compris sous les segmens AC, CB.

Construisez le quarré ADEB sur la droite AB (prop. 46. 1), conduisez la droite BD; par le point C conduisez la droite CGF parallèle à l'une ou à l'autre des droites AD, BE (prop. 31. 1), et par le point G conduisez la droite HK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB, DE.

Puisque la droite CF est parallèle à la droite AD, et que la droite BD tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur BGC sera égal à l'angle intérieur et opposé ADB (prop. 29. 1); mais l'angle ADB est égal à l'angle ABD (prop. 5. 1), parce que le côté BA est égal au côté AD; donc l'angle CGB est égal à l'angle GBC : donc le côté BC est égal au côté CG (prop. 6. 1); mais le côté CB est égal au côté GK (prop. 34. 1), et le côté CG égal au côté BK : donc le côté GK est égal au côté GC : donc le quadrilatère CGKB est équilatère. Je dis de plus qu'il est rectangle; car puisque la droite CF est parallèle à la droite BK, et que la droite CB tombe sur ces deux droites, les angles KBC, GCB sont égaux à deux droites (prop. 29. 1); mais l'angle KBC est droit (déf. 30. 1) : donc l'angle GCB est droit aussi : donc les angles opposés CGK, GKB seront encore droits (prop. 34. 1) : donc le quadrilatère CGKB est rectangle. Mais on a démontré qu'il étoit équilatère; donc ce quadrilatère est un quarré, et ce quarré est construit sur la droite BC. Par la même raison le quadrilatère HF est encore un quarré qui est construit sur HG, c'est-à-dire sur AC. Donc HF, CK sont deux quarrés construits sur AC, CB; et puisque le rectangle AG est égal au rectangle GE (prop. 43. 1), et que ce rectangle AG est compris sous les droites AC, CB, la droite GC étant égal à CB, le rectangle GE sera égal à un rectangle qui est compris sous les droites AC, CB : donc les rectangles AG, GE sont égaux au double du rectangle qui est compris sous les droites AC, CB; mais les quarrés HF, CK sont construits sur les droites AC, CB : donc les quatre figures HF, CK, AG, GE sont égales aux quarrés construits sur AC, CB et au double du rectangle compris sous les droites AC, CB; mais les quatre figures HF, CK, AG, GE composent toute la figure ADEB qui est le quarré construit sur AB; donc le quarré construit sur AB est égal aux quarrés construits sur AC, CB, et au double du rectangle compris sous les droites AC, CB.

Donc si une droite est partagée d'une manière quelconque, le quarré de la droite entière est égal au quarré des segmens et au double du rectangle compris sous ces segmens; ce qu'il *falloit démontrer*.

AUTREMENT.

Je dis que le quarré construit sur la droite AB est égal aux quarrés construits sur AC, CB et au double du rectangle compris sous AC, CB.

En effet, puisque dans la même figure le côté BA est égal au côté AD, l'angle ABD sera égal à l'angle ADB (prop. 5. 1); et comme les trois angles d'un triangle quelconque sont égaux à deux droites (prop. 32. 1), les trois angles ABD, ADB, BAD du triangle ABD seront égaux à deux droits. Mais l'angle BAD est

F

droit : donc les deux autres angles ABD, ADB sont égaux à un angle droit ; or ces deux angles sont égaux entr'eux : donc chacun des angles ABD, ADB est égal à la moitié d'un angle droit. Mais l'angle BCG est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé BAD : donc l'angle restant CGB est la moitié d'un angle droit ; donc l'angle CGB est égal à l'angle CBG : donc le côté BC est égal au côté CG (prop. 34. 1) ; mais CB est égal à KG, et CG égal aussi à BK (prop. 34. 1) : donc le quadrilatère CK est équilatère ; mais il a un angle droit : donc ce quadrilatère est un quarré, et ce quarré est construit sur le segment CB. Le quadrilatère HF est un quarré, par la même raison, et ce quarré est construit sur le segment AC : donc les quadrilatères CK, HF sont deux quarrés, et ces deux quarrés sont construits sur les segmens AC, CB. De plus, puisque le rectangle AG est égal au rectangle EG (prop. 31. 1), et que le rectangle AG est compris sous les droites AC, CB, car la droite CG est égale à la droite CB, le rectangle EG est égal au rectangle compris sous les droites AC, CB : donc les rectangles AG, GE sont égaux au double du rectangle qui seroit compris sous les droites AC, CB, mais les quarrés CK, HF sont égaux à ceux qui seroient construits sur les segmens AC, CB : donc les quatre figures CK, HF, AG, GE sont égales aux quarrés construits sur les segmens AC, CB, et au double du rectangle compris sous ces mêmes segmens. Mais les figures CK, HF, AG, GE composent toute la figure AE qui est le quarré construit sur AB.

Donc le quarré formé sur la droite AB est égal aux quarrés formés sur les droites AC, CB, et au double du rectangle compris sous les mêmes droites AC, CB ; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de là que, dans les quarrés, les parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont toujours des quarrés.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segmens inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite qui est placée entre les points de section, est égal au quarré de la moitié de cette droite.

Qu'une droite quelconque AB (fig. 51) soit coupée en deux parties égales au point C et en deux parties inégales au point D : je dis que le rectangle compris sous les droites AD, DB, avec le quarré construit sur CD, est égal au quarré construit sur CB.

Sur la droite BC construisez le quarré CEFB (prop. 46. 1), et conduisez la droite BE; par le point D conduisez la droite DHG parallèle à l'une ou à l'autre des droites CE, BF (prop. 31. 1); par le point H conduisez la droite KLM parallèle à l'une ou à l'autre des droites CB, EF, et enfin par le point A conduisez la droite AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, BM.

Puisque le complément CH est égal au complément HF (prop. 43. 1), si nous ajoutons à chacun de ces complémens le quarré DM, le rectangle total CM sera égal au rectangle total DF; mais le rectangle CM est égal au rectangle AL (prop. 36. 1), puisque la droite AC est égale à la droite CB : donc le rectangle AL est égal au rectangle DF; donc si nous ajoutons le rectangle CH à chacun de ces deux rectangles, le rectangle total AH sera égal aux rectangles DF, DL; mais le rectangle AH est compris sous les droites AD, DB, puisque la droite DH est égale à la droite DB; or les rectangles FD, DL forment le gnomon NOP : donc le gnomon NOP est égal au rectangle compris sous les droites AD, DB; donc si nous ajoutons à chacune de ces deux quantités le quarré LG qui est égal au quarré de CD (corol. 4. 2), le gnomon NOP et le quarré LG seront égaux au rectangle compris sous les droites AD, DB, et au quarré construit sur CD; mais le gnomon NOP et le quarré LG forment tout le quarré CEFB qui est construit sur CB : donc le rectangle compris sous AD, DB, avec le quarré construit sur CD, est égal au quarré construit sur CB.

Donc si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segmens inégaux de la droite totale avec le quarré de la droite qui est placée entre les deux points de section, est égal au quarré de la moitié de cette droite; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute ~~directement~~ une droite quel- ~~conque~~, dans la même direction *le rectangle compris sous une droite composée de la première droite et de la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la première ligne droite, est égal au quarré d'une droite composée de la moitié de la première ligne droite et de la droite ajoutée.*

Qu'une ligne droite quelconque AB (fig. 52) soit coupée en deux parties égales au point C; qu'on lui ajoute directement une droite quelconque BD: je dis que le rectangle compris sous AD, DB, avec le quarré de la droite CB, est égal au quarré de CD.

Sur la droite CD décrivez le quarré CEFD (prop. 46. 1); conduisez la droite DE; par le point B conduisez la droite BHG parallèle à l'une ou à l'autre des droites CE, DF (prop. 31. 1); par le point H conduisez la droite KLM parallèle à l'une ou à l'autre des droites AD, EF, et enfin par le point A conduisez la droite AK parallèle à l'une ou à l'autre des droites CL, DM.

Puisque la droite AC est égale à la droite CB, le rectangle AL sera égal au rectangle CH (prop. 36. 1); mais le rectangle CH est égal au rectangle HF (prop. 43. 1) : donc le rectangle AL sera égal au rectangle HF; donc si nous ajoutons à chacun de ces rectangles le rectangle CM, le rectangle total AM sera égal au gnomon NOP; mais le rectangle AM est compris sous les droites AD, DB, car DM est égal à DB (corrol. 4. 2); donc le gnomon NOP est égal à un rectangle qui est compris sous les droites AD, DB; donc si nous ajoutons à chacune de ces deux quantités le quarré LG qui est égal a quarré construit sur CB, le rectangle compris sous les droites AD, DB avec le quarré construit sur BC sera égal au gnomon NPO et au quarré LG. Mais le gnomon NPO et le quarré LG composent le quarré total CEFD qui est construit sur CD : donc le rectangle compris sous AD, DB avec le quarré construit sur BC est égal au quarré construit sur CD.

Donc si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute ~~directement~~ qui ait la même direction une droite ~~quelconque~~, le rectangle compris sous une droite composée de la première ligne

Donc si une ligne droite est partagée en deux parties égales, et si on lui ajoute ~~directement~~ une droite, qu~~elconque~~ ait la même direction, le quarré d'une droite composée de la ligne droite entière et de la droite ajoutée, et le quarré de la droite ajoutée, sont doubles du quarré de la moitié de la ligne droite et au quarré d'une droite composée de la moitié de la ligne droite et de la droite ajoutée comme ne faisant qu'une seule droite; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

Partager une droite donnée de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segmens, soit égal au quarré de l'autre segment.

Soit AB (fig. 57) la droite donnée : il faut partager la droite AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segmens, soit égal au quarré de l'autre segment.

Sur la droite AB décrivez le quarré ABDC (prop. 46. 1), partagez la droite AC en deux parties égales en E (prop. 10. 1), et menez la droite BE; ayant prolongé ensuite la droite CA vers F, faites la droite EF égale à la droite BE (prop. 3. 1), décrivez sur AF le quarré FH, et prolongez la droite GH vers K : je dis que la droite AB est partagée en H de manière que le rectangle compris sous AB et BH est égal au quarré de AH.

Puisque la droite AC est coupée en deux parties égales en E, si nous lui ajoutons directement la droite AF, le rectangle compris sous les droites CF, FA et le quarré de AE, pris ensemble, seront égaux au quarré de EF (prop. 6. 2); mais la droite EF est égale à la droite EB : donc le rectangle compris sous CF, FA et le quarré de AE, pris ensemble, sont égaux au quarré de EB; mais les quarrés de BA, AE sont égaux au quarré de EB (prop. 47. 1), car l'angle BAE est droit; donc le rectangle compris sous CF, FA avec le quarré de AE est égal aux quarrés de BA, AE. Donc, si on retranche le quarré de AE qui est commun, le rectangle compris sous CF, FA sera égal au quarré de AB; mais le rectangle FK est compris sous les droites CF, FA, puisque la droite AF est égale à la droite FG, et le quarré de AB est égal au quarré AD : donc le rectangle FK est égal au quarré AD : donc, si l'on retranche le rectangle commun AK, le quarré FH sera égal au rectangle HD; mais le rectangle HD est compris sous les droites AB, BH, puisque AB est égal à BD et que FH est le quarré de AH: donc le rectangle compris sous AB, BH sera égal au quarré de AH.

Donc la droite AB est coupée au point H, de manière que le rectangle compris sous AB, BH est égal au quarré de AH; ce qu'il falloit faire.

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

Dans les triangles obtus angles, le quarré du côté opposé à l'angle obtus est égal aux quarrés des deux côtés qui comprennent l'angle obtus, et au double du rectangle compris sous le côté de l'angle obtus qui est prolongé jusqu'à la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle opposé et sous la droite interceptée entre la perpendiculaire et le sommet de l'angle obtus.

Soit ABC (fig. 58) un triangle obtus angle dont l'angle BAC est obtus; du point B conduisez une perpendiculaire BD sur le côté prolongé CA: je dis que le quarré de BC est égal aux quarrés de BA, AC, et au double du rectangle compris sous les droites CA, AD.

Puisque la droite CD est coupée d'une macher un segment qui reçoive un angle égal à l'angle donné D.

Menez une droite EF qui touche le cercle ABC au point B (prop. 17. 3), et sur la droite FE et au point B, pris dans cette droite, faites l'angle FBC égal à l'angle D (prop. 23. 1).

Puisque la droite EF touche le cercle ABC et que la droite BC a été menée du point de contact B, l'angle FBC sera égal à celui qui est compris dans le segment alterne du cercle BAC (prop. 32. 3); mais l'angle FBC est égal à l'angle D : donc l'angle qui est compris dans le segment BAC sera égal à l'angle D.

Donc d'un cercle donné ABC on a retranché le segment BAC qui reçoit un angle égal à l'angle donné D; ce qu'il falloit faire.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

Si dans un cercle, deux cordes se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segmens de l'une de ces cordes est égal au rectangle compris sous les segmens de l'autre.

Que dans le cercle ABCD (fig. 100) les deux cordes AC, BD se coupent mutuellement au point E : je dis que le rectangle compris sous

Voir la note page 561.

les droites AE, EC est égal à celui qui est compris sous les droites DE, EB.

Si les droites AC, BD passent par le centre, de manière que le point E soit le centre du cercle ABCD, il est évident que les droites AE, EC, DE, EB étant égales, le rectangle compris sous les droites AE, EC est égal à celui qui est compris sous les droites DE, EB.

Si les droites AC, DB (fig. 101) ne passent pas par le centre, prenez le centre du cercle ABCD (prop. 1. 3), que ce centre soit le point F; du centre F conduisez les droites FG, FH perpendiculaires sur les droites AC, DB (prop. 12. 1), et menez les droites FB, FC, FE.

Puisque la droite GF menée par le centre est perpendiculaire sur la droite AC qui n'est pas menée par le centre, la droite GF coupe la droite AC à angle droit, et la partage en deux parties égales (prop. 3. 3) : donc la droite AG est égale à la droite GC. Puisque la droite AC est coupée en deux parties égales au point G, et en deux parties inégales au point E, le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de GE, est égal au quarré de GC (prop. 5. 2) : donc si nous ajoutons à ces quantités le quarré de GF, le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec les quarrés de GE, GF, est égal aux quarrés de CG, GF. Mais le quarré de FE est égal aux quarrés de EG, GF (prop. 47. 1), et le quarré de FC égal aux quarrés de CG, GF : donc le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de FE, est égal au quarré de FC. Or la droite FC est égale à la droite FB : donc le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de EF, est égal au quarré de FB. Par la même raison le rectangle compris sous les droites DE, EB, avec le quarré de FE, est égal au quarré de FB. Mais on a démontré que le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de FE, est égal au quarré de FB : donc le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de FE, est égal au rectangle compris sous les droites DE, EB, avec le quarré de FE : donc si on retranche le quarré de FE, qui est commun, le rectangle restant compris sous AE, EC sera égal au rectangle restant compris sous DE, EB.

Donc si dans un cercle deux cordes se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segmens de l'une sera égal au rectangle compris sous les segmens de l'autre ; ce qu'il falloit démontrer.

Un autre exemple : la proposition III-35 des *Éléments* d'Euclide

Si deux cordes d'un cercle sont sécantes, le rectangle contenu par les segments partiels de l'une est égal au rectangle contenu par les segments partiels de l'autre.

Démonstration :

(. . .)
[Utilisant nos notations, la fin de la démonstration va comme suit :]

$a\ b + c^2 = d^2$

Ajoutons aux deux membres l'aire e^2 ; il vient :

$a\ b + c^2 + e^2 = d^2 + e^2$.

Mais $c^2 + e^2 = f^2$ et $d^2 + e^2 = g^2$.

Donc $a\ b + f^2 = g^2$.

Et $g^2 = h^2$.

Donc $a\ b + f^2 = h^2$.

Pour les mêmes raisons, nous avons de même : $a'\ b' + f^2 = h^2$.

Mais nous avons prouvé que $a\ b + f^2 = h^2$,

donc $a'\ b' + f^2 = a\ b + f^2$.

après élimination du terme commun f^2 :

$a'\ b' = a\ b$. Q.E.D.