



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

LES ÉLÉMENTS  
DE  
GÉOMÉTRIE  
D'EUCLIDE,

traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle,  
du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure  
des Surfaces et des Solides; avec des Notes;

Par F. PEYRARD, Bibliothécaire  
de l'École Polytechnique.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT NATIONAL.

Et nova sunt semper. — OVID....



A PARIS,

CHEZ F. LOUIS, LIBRAIRE, RUE DE SAVOIE, N° 12.

AN XII — 1804.



---

# ÉLÉMENTS

DE

# GÉOMÉTRIE

## D'EUCLIDE.

---

### LIVRE PREMIER.

#### DÉFINITIONS.

1. **LE** point est ce qui n'a aucune partie.
2. La ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est toute également interposée entre ses points (1).
5. Une superficie est ce qui a longueur et largeur seulement.

---

(1) Dans la suite nous dirons une droite au lieu de dire une ligne droite.

*Vois la note page 559. A*

6. Les extrémités d'une superficie sont des lignes.

7. Une superficie *plane* est celle qui est également <sup>plane</sup> ~~interposée~~ entre ses lignes droites.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque des lignes droites comprennent un angle, l'angle s'appelle rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit. La droite tombante est dite <sup>sur</sup> perpendiculaire à celle sur laquelle elle tombe.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand que l'angle droit.

12. L'angle *aigu* est celui qui est plus petit que l'angle droit.

13. On appelle terme ou *limite* ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. On appelle figure ce qui est compris entre une ou plusieurs limites.

15. Le cercle est une figure plane comprise dans une seule ligne qu'on appelle circonférence; toutes les droites menées à la circonférence d'un seul point de ceux qui sont placés dans les figures, sont égales entr'elles.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle ; le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est une figure comprise entre le diamètre et la portion de la circonférence qui est <sup>soutenue</sup> interceptée par le diamètre.

19. Un segment de cercle est une portion du cercle comprise entre une droite et la circonférence du cercle.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. On appelle trilatères ou *triangles* les figures terminées par trois droites.

22. Quadrilatères, celles qui sont terminées par quatre.

23. Multilatères ou *polygones*, celles qui sont terminées par plus de quatre droites.

24. Parmi les figures trilatères, celle qui est terminée par trois côtés égaux se nomme triangle équilatéral.

25. Celle qui a seulement deux côtés égaux se nomme triangle isocèle.

26. Celle dont tous les côtés sont inégaux se nomme triangle scalène.

27. Parmi les figures trilatères, celle qui a un angle droit se nomme triangle rectangle.

28. Celle qui a un angle obtus se nomme triangle amblygone ou *triangle obtus-angle*.

29. Celle qui a ses trois angles aigus, triangle oxygone ou *triangle acutangle*.

30. Parmi les figures quadrilatères, celle qui a ses côtés égaux et ses angles droits, se nomme carré.

31. Celle qui a ses angles droits, mais qui n'a pas ses côtés égaux, se nomme carré oblong ou *rectangle*.

32. Celle qui a ses côtés égaux, mais qui n'a pas ses angles droits, se nomme rhombé.

33. Celle dont les côtés et les angles opposés sont égaux, mais dont tous les côtés ne sont pas égaux et dont les angles ne sont pas droits, se nomme rhomboïde.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes (1).

35. Enfin, les parallèles sont des droites qui, étant placées sur un même plan, et qui étant

---

(1) On nomme aujourd'hui trapèze un quadrilatère dont deux de ses côtés seulement sont parallèles, et les autres quadrilatères, excepté le trapèze et les quadrilatères dont parle Euclide, se nomment ordinairement quadrilatères simplement dits.

prolongées de part et d'autre à l'infini, ne se rencontrent nulle part.

## D E M A N D E S.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque décrire une circonférence de cercle.

*Notions communes ou axiomes.*

1. Les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles.
2. Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les tous seront égaux.
3. Si de quantités égales on retranche des quantités égales, les restes seront égaux.
4. Si à des quantités inégales on ajoute des quantités égales, les tous seront inégaux.
5. Si de quantités inégales on retranche des quantités égales, les restes seront inégaux.
6. Les quantités qui sont doubles d'une même quantité sont égales entr'elles.
7. Les quantités qui sont les moitiés d'une même quantité sont égales entr'elles.



8. Les choses qui se conviennent mutuellement sont égales entr'elles.

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droits sont égaux (1).

11. Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

12. Deux droites ne renferment point un espace.

### PROPOSITION PREMIÈRE.

#### P R O B L È M E.

*Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.*

Soit AB (fig. 1) la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral.

Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3); ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE; et du point C, où les cir-

---

(1) Dans quelques manuscrits les axiomes 10 et 11 se trouvent placés parmi les demandes.

---

## LIVRE II.

---

### DÉFINITIONS.

1. **TOUT** parallélogramme rectangle est dit contenu sous les deux droites qui comprennent un angle droit.

2. Dans tout parallélogramme, on appelle gnomon la réunion de l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux complémens.

### PROPOSITION PREMIÈRE.

#### THÉORÈME.

*Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris sous ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a point été partagée, et sous chacun des segmens de l'autre.*

Soient deux droites  $A, BC$  (fig. 47), et que la droite  $BC$  soit partagée d'une manière quel-

con- aux points D, E : je dis que le rectangle  
 compris sous les droites A, BC est égal au rec-  
 tangle compris sous les droites A, BD, au  
 rectangle compris sous les droites A, DE, et  
 au rectangle compris sous les droites A, EC.

Conduisez par le point B la droite BF perpen-  
 diculaire sur la droite BC (prop. 11. 1)\*; faites  
 la droite BG égale à la droite A, et par le point  
 G conduisez la droite GH parallèle à la droite  
 BC (prop. 31. 1); par les points D, E, C, con-  
 duisez ensuite les droites DK, EL, CH, pa-  
 rallèles à la droite BG.

Le rectangle BH est égal aux rectangles BK,  
 DL, EH; mais le rectangle BH est compris  
 sous les droites A, BC, car il est compris sous  
 les droites GB, BC, dont la droite BG est égale  
 à la droite A; le rectangle BK est compris sous  
 les droites A, BD, car il est compris sous les  
 droites GB, BD, dont la droite GB est égale à la  
 droite A; le rectangle DL est compris sous les  
 droites A, DE, puisque DK, c'est-à-dire BG,  
 est égale à la droite A; et enfin, le rectangle  
 EH est compris sous les droites A, EC : donc  
 le rectangle compris sous les droites A, BC est

---

\* Le premier nombre indique la proposition, et le  
 second indique le livre.

égal au rectangle compris sous les droites  $A, BD$ , au rectangle compris sous les droites  $A, DE$ , et enfin au rectangle compris sous les droites  $A, EC$ .

Donc si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris sous ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a point été partagée et sous chacun des segments de l'autre; ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION II.

### THÉORÈME.

*Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous l'un et l'autre segment, est égal au carré de la droite entière.*

Que la droite  $AB$  (fig. 48) soit partagée d'une manière quelconque au point  $C$ : je dis que le rectangle compris sous les droites  $AB, BC$ , avec le rectangle compris sous les droites  $BA, AC$ , est égal au carré de la droite  $AB$ .

Sur la droite  $AB$  construisez le carré  $ADEB$  (prop. 46. 1), et par le point  $C$  conduisez la droite  $CF$  parallèle à l'une et à l'autre des droites  $AD, BE$  (prop. 31. 1).

Le carré  $AE$  est égal aux rectangles  $AF$ ,  $CE$ ; mais le carré  $AE$  est construit sur la droite  $AB$ ; le rectangle  $AF$  est compris sous les droites  $BA$ ,  $AC$ , car il est compris sous les droites  $DA$ ,  $AC$ , dont la droite  $AD$  est égale à  $AB$ ; et enfin le rectangle  $CE$  est compris sous les droites  $AB$ ,  $BC$ , puisque la droite  $BE$  est égale à la droite  $AB$ ; donc le rectangle compris sous les droites  $BA$ ,  $AC$ , avec le rectangle compris sous les droites  $AB$ ,  $BC$ , est égal au carré de la droite  $AB$ .

Donc si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, les rectangles compris sous la droite totale et sous chacun des segmens sont égaux au carré construit sur la droite totale; ce qu'il falloit démontrer.

### PROPOSITION III.

#### THÉORÈME.

*Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et l'un des segmens, est égal au rectangle compris sous les segmens et au carré formé sur le segment premièrement pris.*

Que la droite  $AB$  (fig. 49) soit partagée en un point quelconque  $C$ : je dis que le rectangle

compris sous les droites  $AB$ ,  $BC$  est égal au rectangle compris sous les droites  $AC$ ,  $CB$ , et au carré de la droite  $BC$ .

Sur la droite  $BC$  construisez le carré  $CDEB$  (prop. 46. 1), prolongez en  $F$  la droite  $ED$ , et par le point  $A$  conduisez la droite  $AF$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $CD$ ,  $BE$  (prop. 31. 1).

Le rectangle  $AE$  est certainement égal aux rectangles  $AD$ ,  $CE$ ; mais le rectangle  $AE$  est compris sous les droites  $AB$ ,  $BC$ , car il est compris sous les droites  $AB$ ,  $BE$ , dont la droite  $BE$  est égale à la droite  $BC$ ; le rectangle  $AD$  est compris sous les droites  $AC$ ,  $CB$ , puisque la droite  $DC$  est égale à la droite  $CB$ ; et enfin le carré  $DB$  est construit sur la droite  $BC$ ; donc le rectangle compris sous les droites  $AB$ ,  $BC$  est égal au rectangle compris sous les droites  $AC$ ,  $CB$  et au carré de la droite  $BC$ .

Donc si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le rectangle compris sous la droite totale et sous un des segmens, est égal au rectangle compris sous les segmens et au carré construit sur le segmen premièrement pris; ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION IV.

## THÉORÈME.

*Si une droite est partagée d'une manière quelconque en deux parties, le carré construit sur la droite entière est égal aux carrés formés sur les deux segmens et au double du rectangle compris sous ces deux segmens.*

Que la droite  $AB$  (fig. 50) soit partagée d'une manière quelconque au point  $C$  : je dis que le carré construit sur  $AB$  est égal aux carrés construits sur  $AC$ ,  $CB$ , et au double du rectangle compris sous les segmens  $AC$ ,  $CB$ .

Construisez le carré  $ADEB$  sur la droite  $AB$  (prop. 46. 1), conduisez la droite  $BD$ ; par le point  $C$  conduisez la droite  $CGF$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $AD$ ,  $BE$  (prop. 31. 1), et par le point  $G$  conduisez la droite  $HK$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $AB$ ,  $DE$ .

Puisque la droite  $CF$  est parallèle à la droite  $AD$ , et que la droite  $BD$  tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur  $BGC$  sera égal à l'angle intérieur et opposé  $ADB$  (prop. 29. 1); mais l'angle  $ADB$  est égal à l'angle  $ABD$  (prop. 5. 1), parce que le côté  $BA$  est égal au côté  $AD$ ; donc l'angle  $CGB$  est égal à l'angle  $GBC$  : donc le

côté BC est égal au côté CG (prop. 6. 1); mais le côté CB est égal au côté GK (prop. 34. 1), et le côté CG égal au côté BK : donc le côté GK est égal au côté GC : donc le quadrilatère CGKB est équilatère. Je dis de plus qu'il est rectangle; car puisque la droite CF est parallèle à la droite BK, et que la droite CB tombe sur ces deux droites, les angles KBC, GCB sont égaux à deux droites (prop. 29. 1); mais l'angle KBC est droit (déf. 30. 1) : donc l'angle GCB est droit aussi : donc les angles opposés CGK, GKB seront encore droits (prop. 34. 1) : donc le quadrilatère CGKB est rectangle. Mais on a démontré qu'il étoit équilatère; donc ce quadrilatère est un carré, et ce carré est construit sur la droite BC. Par la même raison le quadrilatère HF est encore un carré qui est construit sur HG, c'est-à-dire sur AC. Donc HF, CK sont deux carrés construits sur AC, CB; et puisque le rectangle AG est égal au rectangle GE (prop. 43. 1), et que ce rectangle AG est compris sous les droites AC, CB, <sup>la droite</sup> GC étant égal à CB, le rectangle GE sera égal à un rectangle qui est compris sous les droites AC, CB : donc les rectangles AG, GE sont égaux au double du rectangle qui est compris sous les droites AC, CB; mais les carrés HF, CK sont cons-



truits sur les droites AC, CB : donc les quatre figures HF, CK, AG, GE sont égales aux quarrés construits sur AC, CB et au double du rectangle compris sous les droites AC, CB ; mais les quatre figures HF, CK, AG, GE composent toute la figure ADEB qui est le quarré construit sur AB ; donc le quarré construit sur AB est égal aux quarrés construits sur AC, CB, et au double du rectangle compris sous les droites AC, CB.

Donc si une droite est partagée d'une manière quelconque, le quarré de la droite entière est égal au quarré des segmens et au double du rectangle compris sous ces segmens ; ce qu'il falloit démontrer.

## A U T R E M E N T .

Je dis que le quarré construit sur la droite AB est égal aux quarrés construits sur AC, CB et au double du rectangle compris sous AC, CB.

En effet, puisque dans la même figure le côté BA est égal au côté AD, l'angle ABD sera égal à l'angle ADB (prop. 5. 1) ; et comme les trois angles d'un triangle quelconque sont égaux à deux droites (prop. 32. 1), les trois angles ABD, ADB, BAD du triangle ABD seront égaux à deux droits. Mais l'angle BAD est

F

droit : donc les deux autres angles  $ABD$ ,  $ADB$  sont égaux à un angle droit ; or ces deux angles sont égaux entr'eux : donc chacun des angles  $ABD$ ,  $ADB$  est égal à la moitié d'un angle droit. Mais l'angle  $BCG$  est droit , car il est égal à l'angle intérieur et opposé  $BAD$  : donc l'angle restant  $CGB$  est la moitié d'un angle droit ; donc l'angle  $CGB$  est égal à l'angle  $CBG$  : donc le côté  $BC$  est égal au côté  $CG$  (prop. 34. 1) ; mais  $CB$  est égal à  $KG$ , et  $CG$  égal aussi à  $BK$  (prop. 34. 1) : donc le quadrilatère  $CK$  est équilatère ; mais il a un angle droit : donc ce quadrilatère est un carré , et ce carré est construit sur le segment  $CB$ . Le quadrilatère  $HF$  est un carré , par la même raison , et ce carré est construit sur le segment  $AC$  : donc les quadrilatères  $CK$ ,  $HF$  sont deux carrés , et ces deux carrés sont construits sur les segments  $AC$ ,  $CB$ . De plus , puisque le rectangle  $AG$  est égal au rectangle  $EG$  (prop. 31. 1) , et que le rectangle  $AG$  est compris sous les droites  $AC$ ,  $CB$ , car la droite  $CG$  est égale à la droite  $CB$ , le rectangle  $EG$  est égal au rectangle compris sous les droites  $AC$ ,  $CB$  : donc les rectangles  $AG$ ,  $GE$  sont égaux au double du rectangle qui seroit compris sous les droites  $AC$ ,  $CB$ , mais les carrés  $CK$ ,  $HF$  sont égaux à ceux qui seroient

construits sur les segmens AC, CB : donc les quatre figures CK, HF, AG, GE sont égales aux quarrés construits sur les segmens AC, CB, et au double du rectangle compris sous ces mêmes segmens. Mais les figures CK, HF, AG, GE composent toute la figure AE qui est le quarré construit sur AB.

Donc le quarré formé sur la droite AB est égal aux quarrés formés sur les droites AC, CB, et au double du rectangle compris sous les mêmes droites AC, CB ; ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

Il suit de là que, dans les quarrés, les parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont toujours des quarrés.

## PROPOSITION V.

## THÉORÈME.

*Si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segmens inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite qui est placée entre les points de section, est égal au quarré de la moitié de cette droite.*

Qu'une droite quelconque AB (fig. 51) soit coupée en deux parties égales au point C et en deux parties inégales au point D : je dis que le rectangle compris sous les droites AD, DB, avec le quarré construit sur CD, est égal au quarré construit sur CB.

Sur la droite BC construisez le quarré CEFB (prop. 46. 1), et conduisez la droite BE; par le point D conduisez la droite DHG parallèle à l'une ou à l'autre des droites CE, BF (prop. 31. 1); par le point H conduisez la droite KLM parallèle à l'une ou à l'autre des droites CB, EF, et enfin par le point A conduisez la droite AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, BM.

Puisque le complément CH est égal au complément HF (prop. 43. 1), si nous ajoutons à chacun de ces complémens le quarré DM, le

rectangle total  $CM$  sera égal au rectangle total  $DF$ ; mais le rectangle  $CM$  est égal au rectangle  $AL$  (prop. 36. 1); puisque la droite  $AC$  est égale à la droite  $CB$ : donc le rectangle  $AL$  est égal au rectangle  $DF$ ; donc si nous ajoutons le rectangle  $CH$  à chacun de ces deux rectangles, le rectangle total  $AH$  sera égal aux rectangles  $DF, DL$ ; mais le rectangle  $AH$  est compris sous les droites  $AD, DB$ , puisque la droite  $DH$  est égale à la droite  $DB$ ; or les rectangles  $FD, DL$  forment le gnomon  $NOP$ : donc le gnomon  $NOP$  est égal au rectangle compris sous les droites  $AD, DB$ ; donc si nous ajoutons à chacune de ces deux quantités le carré  $LG$  qui est égal au carré de  $CD$  (corol. 4. 2), le gnomon  $NOP$  et le carré  $LG$  seront égaux au rectangle compris sous les droites  $AD, DB$ , et au carré construit sur  $CD$ ; mais le gnomon  $NOP$  et le carré  $LG$  forment tout le carré  $CEFB$  qui est construit sur  $CB$ : donc le rectangle compris sous  $AD, DB$ , avec le carré construit sur  $CD$ , est égal au carré construit sur  $CB$ .

Donc si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segmens inégaux de la droite totale avec le carré de la droite

qui est placée entre les deux points de section, est égal au carré de la moitié de cette droite ; ce qu'il falloit démontrer.

### PROPOSITION VI.

#### THÉORÈME.

*Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si, on lui ajoute ~~directement~~ <sup>à la même direction</sup> une droite quelconque, le rectangle compris sous une droite composée de la première droite et de la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le carré de la moitié de la première ligne droite, est égal au carré d'une droite composée de la moitié de la première ligne droite et de la droite ajoutée.*

Qu'une ligne droite quelconque AB (fig. 52) soit coupée en deux parties égales au point C ; qu'on lui ajoute directement une droite quelconque BD : je dis que le rectangle compris sous AD, DB, avec le carré de la droite CB, est égal au carré de CD.

Sur la droite CD décrivez le carré CEFD (prop. 46. 1) ; conduisez la droite DE ; par le point B conduisez la droite BHG parallèle à l'une ou à l'autre des droites CE, DF (prop. 31. 1) ; par le point H conduisez la droite KLM parallèle à l'une ou à l'autre des droites AD, EF, et enfin

par le point A conduisez la droite AK parallèle à l'une ou à l'autre des droites CL, DM.

Puisque la droite AC est égale à la droite CB, le rectangle AL sera égal au rectangle CH (prop. 36. 1); mais le rectangle CH est égal au rectangle HF (prop. 43. 1): donc le rectangle AL sera égal au rectangle HF; donc si nous ajoutons à chacun de ces rectangles le rectangle CM, le rectangle total AM sera égal au gnomon NOP; mais le rectangle AM est compris sous les droites AD, DB, car DM est égal à DB (corrol. 4. 2); donc le gnomon NOP est égal à un rectangle qui est compris sous les droites AD, DB; donc si nous ajoutons à chacune de ces deux quantités le carré LG qui est égal à un carré construit sur CB, le rectangle compris sous les droites AD, DB avec le carré construit sur BC sera égal au gnomon NPO et au carré LG. Mais le gnomon NPO et le carré LG composent le carré total CEFD qui est construit sur CD: donc le rectangle compris sous AD, DB avec le carré construit sur BC est égal au carré construit sur CD.

Donc si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute ~~directement~~ <sup>qui ait la même direction</sup> une droite quelconque, le rectangle compris sous une droite composée de la première ligne

Donc si une ligne droite est partagée en deux parties égales, et si on lui ajoute <sup>ait la même direction</sup> directement une droite, quelconque, le carré d'une droite composée de la ligne droite entière et de la droite ajoutée, et le carré de la droite ajoutée, sont doubles du carré de la moitié de la ligne droite et au carré d'une droite composée de la moitié de la ligne droite et de la droite ajoutée comme ne faisant qu'une seule droite; ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XI.

## PROBLÈME.

*Partager une droite donnée de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segmens, soit égal au carré de l'autre segment.*

Soit AB (fig. 57) la droite donnée : il faut partager la droite AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segmens, soit égal au carré de l'autre segment.

Sur la droite AB décrivez le carré ABDC (prop. 46. 1), partagez la droite AC en deux parties égales en E (prop. 10. 1), et menez la droite BE; ayant prolongé ensuite la droite CA



vers F, faites la droite EF égale à la droite BE (prop. 3. 1), décrivez sur AF le carré FH, et prolongez la droite GH vers K : je dis que la droite AB est partagée en H de manière que le rectangle compris sous AB et BH est égal au carré de AH.

Puisque la droite AC est coupée en deux parties égales en E, si nous lui ajoutons directement la droite AF, le rectangle compris sous les droites CF, FA et le carré de AE, pris ensemble, seront égaux au carré de EF (prop. 6. 2); mais la droite EF est égale à la droite EB : donc le rectangle compris sous CF, FA et le carré de AE, pris ensemble, sont égaux au carré de EB; mais les carrés de BA, AE sont égaux au carré de EB (prop. 47. 1), car l'angle BAE est droit; donc le rectangle compris sous CF, FA avec le carré de AE est égal aux carrés de BA, AE. Donc, si on retranche le carré de AE qui est commun, le rectangle compris sous CF, FA sera égal au carré de AB; mais le rectangle FK est compris sous les droites CF, FA, puisque la droite AF est égale à la droite FG, et le carré de AB est égal au carré AD : donc le rectangle FK est égal au carré AD : donc, si l'on retranche le rectangle commun AK, le carré FH sera égal

au rectangle  $HD$  ; mais le rectangle  $HD$  est compris sous les droites  $AB$ ,  $BH$ , puisque  $AB$  est égal à  $BD$  et que  $FH$  est le carré de  $AH$  : donc le rectangle compris sous  $AB$ ,  $BH$  sera égal au carré de  $AH$ .

Donc la droite  $AB$  est coupée au point  $H$ , de manière que le rectangle compris sous  $AB$ ,  $BH$  est égal au carré de  $AH$  ; ce qu'il falloit faire.

## PROPOSITION XII.

### THÉORÈME.

*Dans les triangles obtus angles , le carré du côté opposé à l'angle obtus est égal aux carrés des deux côtés qui comprennent l'angle obtus , et au double du rectangle compris sous le côté de l'angle obtus qui est prolongé jusqu'à la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle opposé et sous la droite interceptée entre la perpendiculaire et le sommet de l'angle obtus.*

Soit  $ABC$  (fig. 58) un triangle obtus angle dont l'angle  $BAC$  est obtus ; du point  $B$  conduisez une perpendiculaire  $BD$  sur le côté prolongé  $CA$  : je dis que le carré de  $BC$  est égal aux carrés de  $BA$ ,  $AC$ , et au double du rectangle compris sous les droites  $CA$ ,  $AD$ .

Puisque la droite  $CD$  est coupée d'une ma-

cher un segment qui reçoive un angle égal à l'angle donné D.

Menez une droite EF qui touche le cercle ABC au point B (prop. 17. 3), et sur la droite FE et au point B, pris dans cette droite, faites l'angle FBC égal à l'angle D (prop. 23. 1).

Puisque la droite EF touche le cercle ABC et que la droite BC a été menée du point de contact B, l'angle FBC sera égal à celui qui est compris dans le segment alterne du cercle BAC (prop. 32. 5); mais l'angle FBC est égal à l'angle D : donc l'angle qui est compris dans le segment BAC sera égal à l'angle D.

Donc d'un cercle donné ABC on a retranché le segment BAC qui reçoit un angle égal à l'angle donné D; ce qu'il falloit faire.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÈME.

*Si dans un cercle, deux cordes se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segmens de l'une de ces cordes est égal au rectangle compris sous les segmens de l'autre.*

Que dans le cercle ABCD (fig. 100) les deux cordes AC, BD se coupent mutuellement au point E : je dis que le rectangle compris sous

*Voir la note page 561.*

les droites  $AE$ ,  $EC$  est égal à celui qui est compris sous les droites  $DE$ ,  $EB$ .

Si les droites  $AC$ ,  $BD$  passent par le centre, de manière que le point  $E$  soit le centre du cercle  $ABCD$ , il est évident que les droites  $AE$ ,  $EC$ ,  $DE$ ,  $EB$  étant égales, le rectangle compris sous les droites  $AE$ ,  $EC$  est égal à celui qui est compris sous les droites  $DE$ ,  $EB$ .

Si les droites  $AC$ ,  $DB$  (fig. 101) ne passent pas par le centre, prenez le centre du cercle  $ABCD$  (prop. 1. 3), que ce centre soit le point  $F$ ; du centre  $F$  conduisez les droites  $FG$ ,  $FH$  perpendiculaires sur les droites  $AC$ ,  $DB$  (prop. 12. 1), et menez les droites  $FB$ ,  $FC$ ,  $FE$ .

Puisque la droite  $GF$  menée par le centre est perpendiculaire sur la droite  $AC$  qui n'est pas menée par le centre, la droite  $GF$  coupe la droite  $AC$  à angle droit, et la partage en deux parties égales (prop. 3. 3) : donc la droite  $AG$  est égale à la droite  $GC$ . Puisque la droite  $AC$  est coupée en deux parties égales au point  $G$ , et en deux parties inégales au point  $E$ , le rectangle compris sous les droites  $AE$ ,  $EC$ , avec le carré de  $GE$ , est égal au carré de  $GC$  (prop. 5. 2) : donc si nous ajoutons à ces quantités le carré de  $GF$ , le rectangle compris sous les droites  $AE$ ,  $EC$ , avec les carrés de  $GE$ ,

GF, est égal aux quarrés de CG, GF. Mais le quarré de FE est égal aux quarrés de EG, GF (prop. 47. 1), et le quarré de FC égal aux quarrés de CG, GF : donc le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de FE, est égal au quarré de FC. Or la droite FC est égale à la droite FB : donc le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de EF, est égal au quarré de FB. Par la même raison le rectangle compris sous les droites DE, EB, avec le quarré de FE, est égal au quarré de FB. Mais on a démontré que le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de FE, est égal au quarré de FB : donc le rectangle compris sous les droites AE, EC, avec le quarré de FE, est égal au rectangle compris sous les droites DE, EB, avec le quarré de FE : donc si on retranche le quarré de FE, qui est commun, le rectangle restant compris sous AE, EC sera égal au rectangle restant compris sous DE, EB.

Donc si dans un cercle deux cordes se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segmens de l'une sera égal au rectangle compris sous les segmens de l'autre ; ce qu'il falloit démontrer.

Un autre exemple : la proposition III-35 des *Éléments* d'Euclide

Si deux cordes d'un cercle sont sécantes, le rectangle contenu par les segments partiels de l'une est égal au rectangle contenu par les segments partiels de l'autre.

Démonstration :

(...)

[Utilisant nos notations, la fin de la démonstration va comme suit : ]

$$a b + c^2 = d^2$$

Ajoutons aux deux membres l'aire  $e^2$  ; il vient :

$$a b + c^2 + e^2 = d^2 + e^2.$$

Mais  $c^2 + e^2 = f^2$  et  $d^2 + e^2 = g^2$ .

$$\text{Donc } a b + f^2 = g^2.$$

$$\text{Et } g^2 = h^2.$$

$$\text{Donc } a b + f^2 = h^2.$$

Pour les mêmes raisons, nous avons de même :  $a' b' + f^2 = h^2$ .

Mais nous avons prouvé que  $a b + f^2 = h^2$ ,

$$\text{donc } a' b' + f^2 = a b + f^2 .$$

après élimination du terme commun  $f^2$  :

$$a' b' = a b. \text{ Q.E.D.}$$