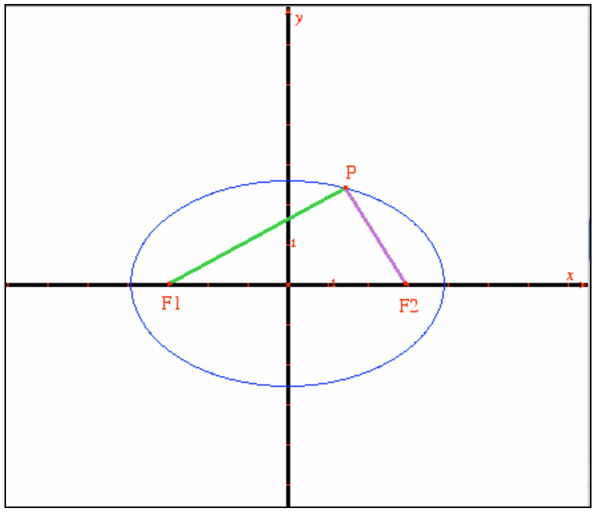
Équations des ellipses et des hyperboles

Pour trouver les équations caractéristiques des ellipses et des hyperboles, choisissons un système d'axes de telle sorte que l'axe des x passe par les deux foyers, et l'axe des y soit la médiatrice du segment déterminé par ces foyers.



Si les coordonnées des divers points sont $F1 = (-a,0)$, $F2 = (a,0)$ et $P = (x,y)$, on aura successivement (dans le cas de l'ellipse)

$$distance(F1,P) + distance(P,F2) = \ell$$

$$\sqrt{(x-(-a))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \ell$$

$$\sqrt{(x^2 + 2ax + a^2) + y^2} + \sqrt{(x^2 - 2ax + a^2) + y^2} = \ell$$

$$\left[x^2 + 2ax + a^2 + y^2\right] + 2\sqrt{x^2 + 2ax + a^2 + y^2}\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2} + \left[x^2 - 2ax + a^2 + y^2\right] = \ell^2$$

$$\sqrt{x^2 + 2ax + a^2 + y^2}\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2} = \tfrac{1}{2}\ell^2 - \left[x^2 + a^2 + y^2\right]$$

$$\left[x^2 + 2ax + a^2 + y^2\right]\left[x^2 - 2ax + a^2 + y^2\right] = \left(\tfrac{1}{2}\ell^2 - \left[x^2 + a^2 + y^2\right]\right)^2$$

$$\left[(x^2 + a^2 + y^2) + 2ax\right]\left[(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax\right] = \left(\tfrac{1}{2}\ell^2 - \left[x^2 + a^2 + y^2\right]\right)^2$$

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - (2ax)^2 = \tfrac{1}{4}\ell^4 - \ell^2\left[x^2 + a^2 + y^2\right] + \left[x^2 + a^2 + y^2\right]^2$$

$$-(2ax)^2 = \tfrac{1}{4}\ell^4 - \ell^2\left[x^2 + a^2 + y^2\right]$$

$$(\ell^2 - 4a^2)x^2 + \ell^2 y^2 = \tfrac{1}{4}\ell^4 - \ell^2 a^2$$

$$4b^2x^2 + \ell^2y^2 = \ell^2b^2 \quad \textit{en posant} \quad b^2 = \tfrac{1}{4}\ell^2 - a^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ce qui nous donne une relation de la forme

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

On peut procéder de façon semblable dans le cas des hyperboles.