L'initiation à l'algèbre dans l'environnement CARAPACE[1]

André Boileau, Carolyn Kieran, Maurice Garançon
Université du Québec à Montréal

Notre décision de proposer une approche alternative pour introduire l'algèbre est motivée d'une part par le constat des difficultés énormes vécues par la plupart des élèves confrontés à des activités algébriques (difficultés qui persistent très longtemps chez plusieurs), et d'autre part par ce que nous percevons être un manque criant de sens dans les cheminements proposés aux élèves dans la plupart des curriculums.

Nous sommes profondément convaincus qu'il existe des façons très naturelles d'accéder au *langage algébrique*, et de fait cet article est consacré à la description d'une telle approche que nous expérimentons depuis bientôt sept ans.

L'utilisation de situations fonctionnelles

Nous nous intéressons au départ à des enfants d'une douzaine d'années, qui ont déjà acquis une grande familiarité avec l'arithmétique (surtout celle des entiers naturels), mais qui n'ont pas encore eu de contact avec l'algèbre. Notre but initial est d'initier ces enfants au *langage algébrique*.

Précisons ce que nous entendons, <u>à ce niveau</u>, par *langage algébrique*. On peut le caractériser comme le domaine des énoncés généraux de relations fonctionnelles algorithmiques basées sur l'arithmétique. Ainsi, quand on affirme que

> "le caissier arrive au prix total en additionnant les prix de tous les articles"

nous sommes en présence d'un *énoncé* (du *langage*) *algébrique* (dont la symbolisation formelle dépasse le niveau secondaire). Par contre, nous considérons que

> "le caissier arrive au prix total en additionnant les prix de tous les articles, compte tenu des rabais et des taxes applicables",

n'est pas un *énoncé algébrique* car les relations arithmétiques en présence ne sont pas suffisamment explicitées.

---

[1] Les auteurs ont bénéficié de l'aide financière du Ministère de l'Éducation du Québec (subvention FCAR #92-ER-1207) et du Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (subvention #410-90-1041).
Le présent texte, taduit en anglais, constitue l'appendice du document suivant : Kieran, C.,Boileau, A., Garançon, M. *Introducing algebra by means of a technology-supported, functionnal approach. In Approaches to Algebra Perspectives for Reseach and teaching*. Chap. 19 Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers. (1996)

Notre expérience nous a amplement démontré qu'on peut facilement amener des élèves d'une douzaine d'années a faire de tels *énoncés algébriques* à propos de *situations fonctionnelles*, pourvu que:

* le contexte ambiant (dans l'exemple précédent: l'achat d'objets) leur soit familier [Note: le contexte arithmétique doit, lui aussi, être familier; par exemple, il faut éviter de faire appel aux pourcentages si cette notion leur pose encore des difficultés]
* la production d'exemples arithmétiques soit non seulement permise, mais encouragée
  (dans la situation précédente par exemple: si on achète deux objets valant respectivement 2$ et 3$, le prix total sera de 5$)
* l'utilisation du langage naturel soit permise (tout en maintenant des exigences d'exactitude. On reviendra plus loin sur l'évolution vers le langage algébrique usuel.)
* on les place tout d'abord dans des situations fonctionnelles pures (c.à.d. dans le cadre d'activités où ils doivent établir des relations fonctionnelles indépendamment de toute résolution d'équation).

Ce dernier point mérite quelques éclaircissements. Nous avons constaté que, placés devant des problèmes du type

"Le prix d'un objet après une taxe de 15% est de 23$. Quel est son prix avant taxe?"

le premier réflexe d'élèves n'ayant pas d'expérience en algèbre était d'effectuer une opération arithmétique, souvent inverse (par exemple ici: diviser par 15%), et de surveiller la réaction de l'intervenant pour découvrir si on se trompe ou non. Par contre, si nous faisons précéder le problème précédent par une question sur la situation fonctionnelle sous-jacente

"Si on connais le prix d'un objet avant taxe, décrire comment calculer son prix après une taxe de 15%".

nous constatons une nette amélioration dans les démarches ultérieures de solution entreprises par les élèves.

Deux remarques sur le paragraphe précédent. Un réponse à notre dernière question du type

"On calcule d'abord la taxe de vente en multipliant le prix avant taxe par 0,15. On additionne ensuite le prix avant taxe et la taxe de vente, et l'on obtient le prix après taxe."

nous semble non seulement correcte mais tout à fait appropriée. L'utilisation d'étapes intermédiaires dans l'établissement d'une relation fonctionnelle contribue à réduire la complexité, du point de vue de l'élève, en réduisant le problème à une suite de sous-problèmes. Soulignons que la réponse précédente aura été précédée et suivie d'exemples numériques ("si le prix avant taxe est de 10$...), destinés tout d'abord à percevoir la régularité puis ensuite à le mettre à l'épreuve. Notons au passage que cette description de la situation fonctionnelle est basée sur l'arithmétique en ce qu'elle fait appel à l'affectation ("tel calcul <u>donne</u> tel résultat") plutôt qu'à l'égalité ("telle expression <u>est</u> telle chose").

Deuxième remarque. Dans les approches traditionnelles, le recours très rapide à des manipulations algébriques pour résoudre de tels problèmes nous semble être une tentative pour canaliser cette pulsion vers le calcul que nous venons d'évoquer. Cependant, mêmes vues comme une telle extension du calcul arithmétique, les manipulations symboliques n'évoquent pas, pour la plupart des élèves, plus de signification que les calculs arithmétiques qu'elles remplacent.

L'apport de l'ordinateur

Une telle activité, consistant à produire des descriptions générales de situations fonctionnelles dans un *langage algébrique*, peut sembler moins intéressante que l'approche traditionnelle, où l'on met en équations dans le cadre du symbolisme algébrique usuel. En effet le symbolisme usuel a le mérite d'être dénué d'ambiguïtés[2] (même si le problème de la correspondance avec la situation de départ demeure) et de permettre aisément des manipulations susceptibles de produire des connaissances nouvelles (par exemple: le nombre et les valeurs des solutions d'une équation). En comparaison, le *langage algébrique* peut sembler stérile dès le départ.

Pourtant on peut imaginer insuffler un peu de vie au *langage algébrique* en utilisant l'ordinateur. Bien que ceci impose quelques contraintes supplémentaires visant à s'assurer que le *langage algébrique* soit univoque (la reconnaissance automatique du sens du langage naturel n'étant pas encore assez développée[3]), l'ordinateur peut alors opérer sur le

---

[2] Bien que son interprétation par les élèves puisse surprendre. Citons par exemple le cas de cet élève de 18 ans qui, ayant constaté que "**2 sin x**" était refusé par un logiciel, se fit expliquer qu'il fallait rendre explicite les opérations de multiplication (notées * pour l'ordinateur). Il tenta alors d'utiliser "**2*sin*x**". Ou cet autre qui simplifie **(sin x)/x** pour obtenir **sin**.

[3] D'autant que, d'un point de vue pédagogique, il semble plus intéressant de demander à l'élève d'être plus précis que de charger l'ordinateur d'essayer d'interpréter correctement ce qui lui est communiqué.

texte qu'on lui a communiqué, par exemple en effectuant certains calculs et en renvoyant à l'élève diverses représentations (tableaux de valeurs, graphes cartésiens, etc.).

Il serait aussi possible de demander à l'ordinateur d'effectuer, automatiquement ou sur demande, des manipulations symboliques sur les textes algébriques. Mais, comme ceci s'accompagne obligatoirement d'une perte de sens (puisque les manipulations symboliques préservent le sens numérique mais non le sens conceptuel[4]), nous pensons qu'il faut d'abord s'assurer que le *langage algébrique* soit assis sur des bases numériques solides.

Notons ici que l'ordinateur vient renforcer les aspects algorithmiques du *langage algébrique* . Dans ce contexte, l'élève est amené à représenter une situation fonctionnelle sous la forme d'un programme décrivant à l'ordinateur d'une façon générale comment effectuer certains calculs arithmétiques. Cette représentation est de nature essentiellement procédurale, et devrait donc selon certains faciliter l'accès aux concepts sous-jacents.

Introduction à l'environnement CARAPACE: les activités de départ

Nous allons maintenant examiner plus spécifiquement le contexte d'apprentissage que nous avons créé et expérimenté depuis bientôt sept ans. Il est basé sur l'étude de situations fonctionnelles à l'aide d'un logiciel appelé CARAPACE (Contexte d'Aide à la Résolution Algorithmique de Problèmes Algébriques dans un Cadre Évolutif), développé spécialement pour la circonstance.

Décrivons succinctement la démarche suivie au départ avec un élève d'une douzaine d'années, n'ayant jamais eu de contact avec l'algèbre. Au début, nous lui présentons des contextes de situations fonctionnelles comme ceci:

> "Carine travaille à temps partiel dans le voisinage. Elle vend des abonnements à un magazine. Elle gagne 20$ par semaine, plus un bonus de 4$ pour chaque abonnement vendu."

Nous lui posons tout d'abord des questions d'évaluation numérique, comme "Si Carine vend 5 abonnements, combien gagnera-t-elle?" Les questions posées visent à vérifier sa

---

[4] Citons par exemple le cas de ces élèves qui, ayant trouvé que la distance parcourue était de x le premier jour, $2x-7$ le second jour et $x+11$ le troisième jour ont refusé d'exprimer la distance totale parcourue par $4x+4$ parce que d'une part on perdait l'information qu'on additionnait trois distances, d'autant plus que le 4 de la "réponse" $4x+4$ entrait en conflit avec les trois jours du problème. Ils ont donc présenté leur réponse sous la forme $x+(2x-7)+(x+11)$.

compréhension de la situation, et nous tentons de minimiser la complexité des calculs arithmétiques pour ne pas le distraire. Nous insistons pour qu'il mette explicitement par écrit (après coup) tous les calculs qu'il a effectués. Par exemple, ici:

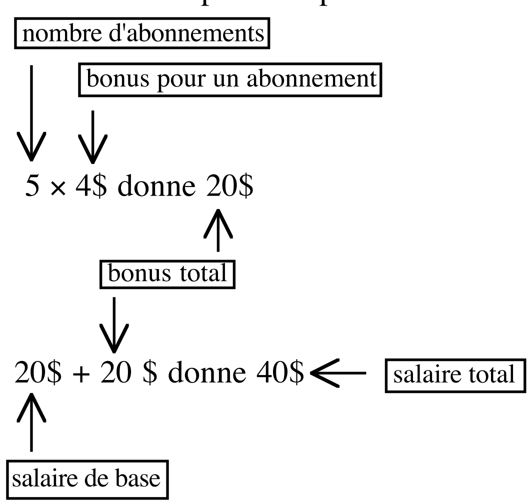
5 × 4$ donne 20$

20$ + 20$ donne 40$.

Puis, après plusieurs calculs semblables, nous l'incitons à organiser le tout en un tableau à deux colonnes. On met dans la colonne de gauches les nombres correspondant aux questions posées, et dans la colonne de droite les réponses obtenues. On lui demande ensuite de trouver des noms décrivant chacune des deux colonnes de nombres. On obtient par exemple:

nombre d'abonnements	salaire total
2	28
5	40
7	48
8	52
10	60
13	72

Ensuite on lui demande d'identifier/décrire/nommer les nombres apparaissant dans les calculs notés précédemment. On obtient par exemple:



Comme un tel étiquetage a été fait pour tous les calculs effectués précédemment, il est facile de faire identifier par l'élève les étiquettes pointant sur des nombres qui varient d'un calcul à l'autre (ici: nombre d'abonnements, bonus total, salaire total) et celles pointant sur des nombres qui ne varient pas (ici: bonus pour un abonnement, salaire de base). L'étape suivante est primordiale. Il s'agit d'amener l'élève à produire une description générale des calculs, qui peut ressembler à ceci:

nombre d'abonnements × 4$ donne bonus total

20$ + bonus total donne salaire total

Toutes les activités précédentes se sont effectuées sans faire appel à l'ordinateur. On introduit à ce moment le logiciel CARAPACE: l'élève se trouve confronté à une fenêtre ressemblant à ceci:

Entrées

Calculs

Sorties

On explique à l'élève qu'il faut "remplir le formulaire" comme suit:

Entrées

nombre d'abonnements

Calculs

nombre d'abonnements × 4 donne bonus total

20 + bonus total donne salaire total

Sorties

salaire total

Lors de ses premiers contacts avec CARAPACE, on n'insiste pas pour expliquer à l'élève le sens exact du "formulaire". En effet, il y a plusieurs choses à apprendre en même temps: le maniement de la souris, le fonctionnement du traitement de texte lui permettant d'entrer ses programmes, le choix dans les menus, etc. On peut donc se contenter au début d'une explication approximative:

* la section Entrées contient le nom qu'on retrouve dans la colonne de gauche du tableau des essais numériques.

  Plus tard on construira des tableaux à plus de deux colonnes, où il pourra y avoir plusieurs variables indépendantes: cette section sera donc la liste de toutes les variables indépendantes (ou variables d'entrée).

* la section $\boxed{\text{Calculs}}$ accueille la description générale des calculs. On incite l'élève à compléter cette section en premier, puisqu'elle fournit les données des deux autres sections.
* la section $\boxed{\text{Sorties}}$ contient le nom qu'on retrouve dans la colonne de droite du tableau des essais numériques.
  Plus tard, on pourra y mettre la liste de toutes les variables (dites variables de sortie) qui nous intéressent. En termes mathématiques, on peut donc dire qu'un programme de CARAPACE correspond à un nombre fini de fonctions (ou à une fonction vectorielle).

Avec un élève débutant, on insiste pour que les exécutions soient faites en mode "calculs détaillés". Le logiciel demande d'abord des valeurs pour les variables d'entrées, puis évalue pas à pas les calculs généraux de la deuxième section. Voici un exemple en cours d'exécution:

$\boxed{\text{Entrées}}$
nombre d'abonnements
5
$\boxed{\text{Calculs}}$
nombre d'abonnements × 4 <u>donne</u> bonus total
5 × 4 <u>donne</u> 20
20 + **bonus total** <u>donne</u> salaire total
20 + 20

Ce mode d'exécution est d'une importance primordiale, car il permet à l'élève de vérifier si sa description généralisée des calculs correspond bien à ses intentions. Il contribue aussi à donner un sens numérique au *langage algébrique* communiqué à l'ordinateur, et à faciliter ainsi la transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

CARAPACE permet aussi de visualiser un tableau résumant toutes les exécutions précédentes. L'élève peut aussi commander des exécutions en mode "tableaux" (les calculs intermédiaires ne sont alors pas affichés), mais on l'incite à ne pas le faire avant d'avoir bien vérifié son programme. Voici un exemple de tableau:

ENTREES	SORTIES
nombre d'abonnements	salaire total
2	28
5	40
7	48
8	52
10	60
13	72

Notons qu'au début, on encourage l'élève à reprendre avec CARAPACE les calculs qu'il a fait "à la main", et on lui demande de comparer le tableau fourni par le logiciel à celui qu'il a lui-même fait. Ainsi il vérifie encore que son programme fonctionne correctement, et il cela contribue à rendre plus transparent le fonctionnement de CARAPACE.

Toujours au début, on ne donne pas de problèmes (par exemple: "Combien d'abonnements Carine doit-elle vendre pour gagner 140$?") à résoudre. Comme nous le mentionnions plus haut, l'énoncé de tels problèmes incite les élèves à chercher une façon directe de répondre, souvent en utilisant des opérations inverses qui n'ont pas de sens dans le contexte, et rend plus difficile d'expliciter les relations fonctionnelles directement en présence.

Plus tard cependant, nous introduisons de tels problèmes (qui, dans le contexte traditionnel, consistent à résoudre une ou plusieurs équations). Dans un premier temps, nous laissons l'élève modéliser la situation fonctionnelle par un programme CARAPACE avant de lui poser le problème. Puis, quand il a acquis un peu d'expérience, nous énonçons le problème dès le départ et nous l'incitons à distinguer par lui-même les composantes "situation fonctionnelle" et "problème".

Dans un tel contexte de résolution de problèmes, l'élève devra faire appel à une résolution numérique (utilisant CARAPACE ou faite manuellement) par essais et erreurs plutôt qu'à des manipulations symboliques. Nous reviendrons là-dessus, mais disons tout de suite qu'une telle approche a le mérite de rappeler constamment la signification arithmétique d'une recherche de solutions. Disons enfin par soucis de complétude que, plus tard encore, l'élève pourra aussi faire appel à des méthodes graphiques.

Quelques caractéristiques de CARAPACE

Au départ, le *langage algébrique* reconnu par CARAPACE peut sembler très limité: il s'agit d'une suite d'affectations de la forme

Nom de variable 1 Opération Nom de variable 2 "donne" Nom de variable 3

où les seules opérations possibles sont les quatre opérations arithmétiques de base plus l'exponentiation. En fait, il a formellement le même pouvoir expressif que le symbolisme de l'algèbre élémentaire, si l'on tient compte du fait qu'on peut utiliser une suite de telles affectations ainsi que des variables intermédiaires.

Mais, en même temps, il est perçu par l'élève comme moins complexe que le symbolisme algébrique usuel. En effet, il permet d'utiliser des noms de variables qui sont significatifs (par rapport au contexte étudié). L'utilisation de variables intermédiaires permet de découper des calculs complexes en étapes, réduisant ainsi la complexité de l'entreprise et identifiant (par des noms significatifs) les résultats de chacune des étapes du calcul.

Notons que le *langage algébrique* reconnu par CARAPACE est paramétrisable et peut être étendu en une série d'étapes, qui correspondent à des points d'achoppement habituels chez les élèves. On peut notamment permettre plusieurs opérations dans une affectation, pourvu que l'ordre dans lequel sera effectué les calculs soit indiqué par un parenthésage complet. On peut encore accepter un parenthésage incomplet, étant entendu que les priorités usuelles des opérations vont déterminer l'ordre des calculs. On peut aussi permettre de sous-entendre les opérations de multiplication (en cas de juxtaposition) et d'exponentiation (en cas d'indice supérieur), mais en limitant les noms de variables à une seule lettre. Soulignons que, dans tous les cas, le mode "calcul détaillé" est là pour illustrer aux élèves les conventions utilisées lors des calculs.

Au niveau syntaxique le plus élevé, CARAPACE accepte toutes les expressions usuelles de l'algèbre élémentaire, comme

$$ax^2+bx+c \text{ \underline{donne} } y,$$

mais n'utilise toujours pas l'égalité. En fait, l'égalité est utilisée de façon implicite lors de la recherche de solutions, lorsque l'élève cherche à obtenir un nombre donné dans une colonne donnée, où lorsqu'il cherche à retrouver le même nombre à la même ligne de deux colonnes données. Par exemple, le problème de résoudre $3x-4 = 2x+3$ prendra la forme suivante avec CARAPACE: étant donné le programme

$\boxed{\text{Entrées}}$
x
$\boxed{\text{Calculs}}$
3x-4 donne y
2x+3 donne z
$\boxed{\text{Sorties}}$
y
z

trouver la (ou les) valeur(s) de x entraînant des valeurs identiques pour y et z.

On voit sur le tableau suivant une suite d'essais numériques menant à une solution:

ENTREES	SORTIES	
x	y	z
3	5	9
5	11	13
9	23	21
7	17	17

En fait, on aimerais peut-être travailler sur cet autre tableau, qui est plus près du problème initial:

ENTREES	SORTIES	
x	3x-4	2x+3
3	5	9
5	11	13
9	23	21
7	17	17

Il existe dans CARAPACE un mécanisme spécial de désignation des variables de sorties qui produit le résultat désiré (afficher dans les tableaux non pas le nom de la variable mais son processus de calcul): il suffit de faire précéder le nom de la variable de l'indicateur résultat, comme dans le programme:

$\boxed{\text{Entrées}}$
x
$\boxed{\text{Calculs}}$
3x-4 donne résultat y
2x+3 donne résultat z
$\boxed{\text{Sorties}}$
résultat y
résultat z

Revenons sur la résolution d'équations par des essais numériques, telle qu'illustrée par les deux tableaux précédents. Il aurait été possible de mettre à la disposition des élèves un mécanisme de recherche automatique de solutions (comme la touche SOLVE de certaines calculatrices), mais nous croyons que nous aurions perdu ainsi une bonne occasion d'ajouter du sens à l'activité de recherche de solutions.

Les élèves qui s'y adonnent trouvent en général[5] l'expérience agréable car elle fait appel à la fois à leurs acquis arithmétiques (qui sont solides) et à des stratégies de recherches heuristiques qu'ils peuvent développer à leur guise.

Pour illustrer ceci, référons-nous à l'avant-dernier tableau. Un élève peut constater que, lorsqu'on passe de la ligne où x est 5 à la ligne où x est 9, on interchange l'ordre relatif de y et z: d'où l'hypothèse que la solution cherchée est entre 5 et 9. Un autre élève peut constater en regardant les deux premières lignes que, lorsque x augmente de 2, la différence entre z et y diminue de 2: d'où l'hypothèse que la solution cherchée est 7.

Il faut noter que ce type d'activité de recherche numérique, caractérisée par une formulation (souvent non explicite) inductive d'hypothèses qu'on vérifie ensuite par de nouvelles expériences, s'éloigne considérablement des méthodes traditionnelles de résolution d'équations. Dans les cas où elles s'appliquent[6], ces dernières donnent des résultats exacts (même dans le cas de nombres rationnels, irrationnels ou même complexes)[7] et aussi l'assurance que toutes les solutions ont été trouvées. Les premières ne donnent que des solutions approximatives, mais sont d'une applicabilité beaucoup plus grande. Cependant, le problème de savoir si on a trouvé toutes les solutions demeure: on y reviendra lorsqu'on parlera de la partie graphique de CARAPACE.

---

5 Ce n'est pas le cas lorsque la recherche doit se faire dans un contexte posant des difficultés trop grandes pour un élève donné: domaine numérique non suffisamment maîtrisé (par exemple: les nombres décimaux), temps demandé excessif (trop de décimales), variation de la fonction en présence trop complexe (par exemple:fonctions décroissantes, paraboles).

6 Et ces cas sont moins fréquents qu'on le pense. Même un polynôme de degré 3 n'est pas résoluble en général par des radicaux **réels**. On ne se rend pas bien compte de ceci car les manuels traditionnels ne choisissent évidemment que des cas où tout marche bien.

7 Bien que plusieurs élèves aient développé le réflexe de "finir le calcul" à l'aide de leur calculatrice.

Le rôle graphes cartésiens dans l'environnement CARAPACE

Abordons maintenant le traitement des graphes cartésiens dans l'environnement CARAPACE. Comme nous l'avons déjà souligné, les graphes cartésiens occupent une place tout à fait spéciale dans l'approche CARAPACE, puisque ce sont eux qui permettent d'apporter une réponse (à caractère expérimental, faut-il le rappeler) à des questions importantes comme:

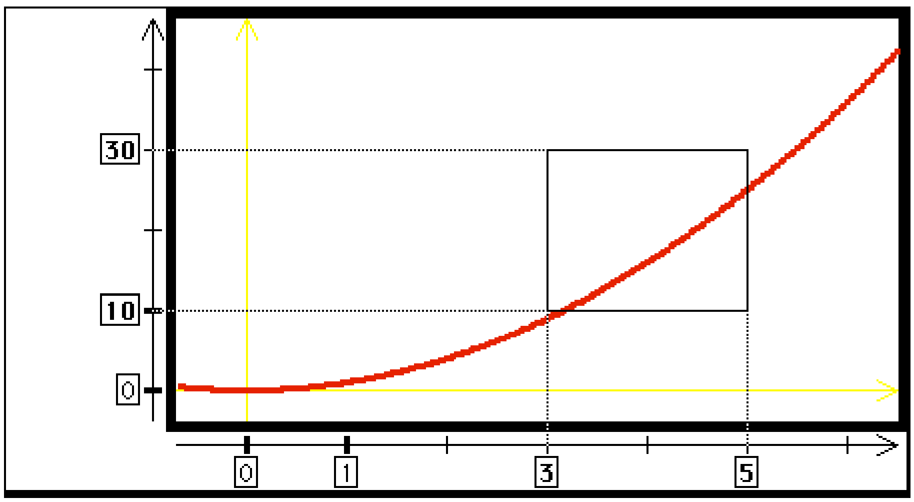
> Un élève a produit un long tableau, comportant de très nombreux essais numériques, sans trouver de solution (peut-être à cause du type de variation non familier de la fonction sous-jacente). Il en vient à se demander si la solution qu'il recherche existe bien.
>
> Très souvent, l'élève qui a trouvé une solution ne cherche pas à savoir s'il en existe d'autres. Ceci est tout à fait défendable si le contexte du problème nous assure intuitivement de l'unicité de la solution. Mais, en général, il y a lieu de susciter chez l'élève une attitude un peu plus critique.

Dans ces deux cas, on peut utiliser les graphes cartésiens dans le cadre d'une approche rationnelle de ces questions. En effet, lorsqu'on sait les interpréter correctement, les graphes cartésiens sont susceptibles de fournir une vision globale très utile de la situation.

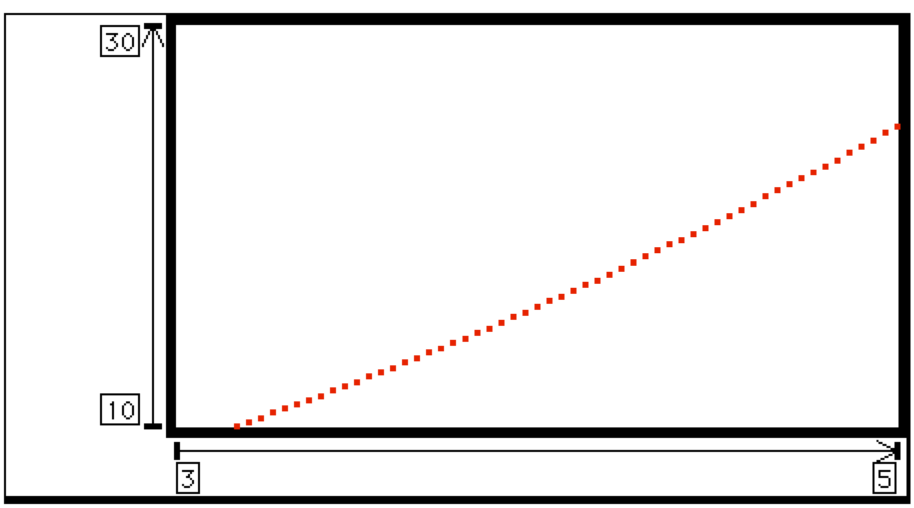
Il y a lieu cependant de trouver une approche plus accessible pour introduire les graphes cartésiens. Du point de vue cognitif, des problèmes difficiles (comme l'infini, la densité des réels) se posent dès qu'on veut envisager le graphe d'une fonction réelle. À preuve les études où l'on demande à de jeunes élèves de compter les points d'un segment donné, et où les réponses obtenues sont plus souvent qu'autrement un nombre fini (souvent intimement lié au dessin fourni).

Dans le cadre du logiciel CARAPACE, nous avons décidé de ne jamais prétendre afficher plus qu'un nombre fini de points appartenant à un graphe cartésien donné. D'ailleurs les points affichés se retrouvent automatiquement dans le tableau des valeurs, et réciproquement chaque ligne du tableau des valeurs donne lieu à un point: la correspondance entre les deux représentations est donc parfaite, ce qui fait qu'on peut s'appuyer sur l'une pour mieux comprendre l'autre.

On peut, bien sûr, afficher un nombre de points suffisamment grand pour qu'on ait l'impression visuelle d'obtenir un graphe continu. Mais à tout moment on peut faire un *zoom in* sur une partie du graphe et voir dynamiquement les points se séparer et s'éloigner les uns des autres (si bien entendu le zoom est assez prononcé). Par la suite, on peut tracer d'autres points et retrouver ainsi un graphe d'apparence continue. C'est donc par une succession de zooms et de tracés en alternance que l'élève pourra construire en lui le concept de graphe continu, un peu comme c'est le cas pour l'égalité (qui est absente du logiciel mais omniprésente dans les activités de résolution de problèmes).
Pour illustrer ceci, voici un exemple où l'on peut voir qu'on a spécifié un rectangle qui va servir de base à un *zoom in*. Noter que le graphe semble continu.



Voici maintenant le résultat du zoom. En fait, l'utilisateur en pu voir une séquence animée au cours de laquelle simultanément le petit rectangle a grandi jusqu'à remplir toute la région, et les points composant le graphe se sont éloignés les uns des autres.

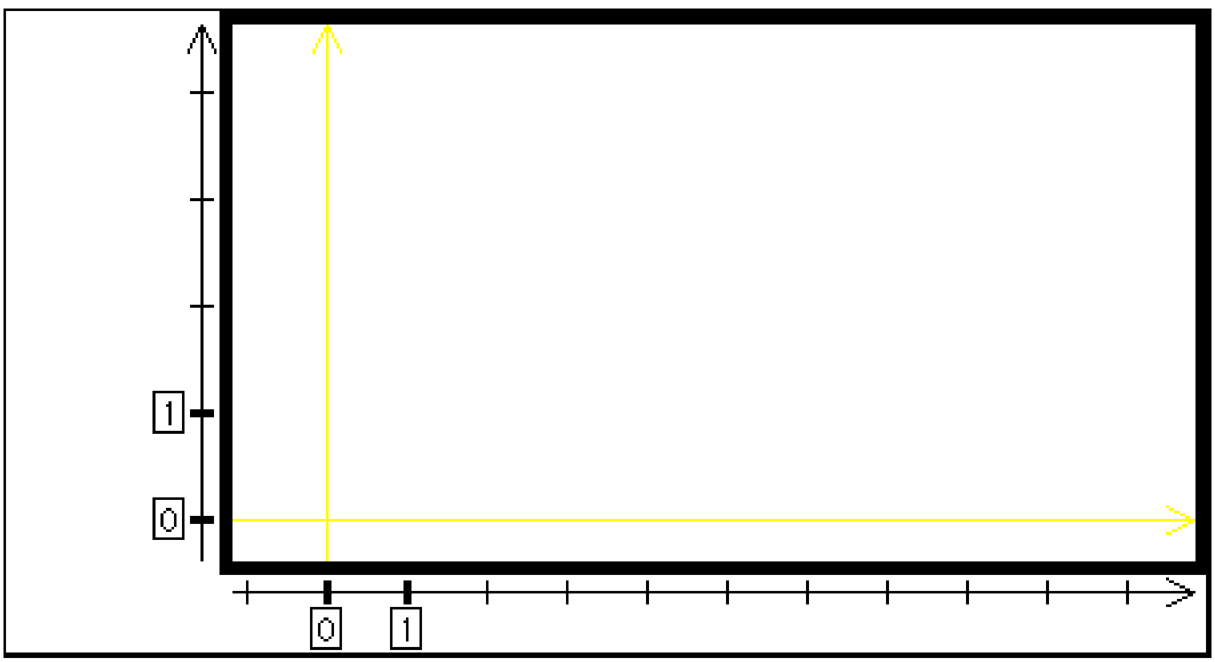


Initiation aux graphes cartésiens dans l'environnement CARAPACE

Nous allons maintenant décrire succinctement comment nous initions aux graphes cartésiens dans l'environnement CARAPACE. Les élèves avec qui nous allons travailler ont déjà une bonne expérience dans l'écriture de programmes et la résolution numérique de problèmes à l'aide du logiciel CARAPACE.

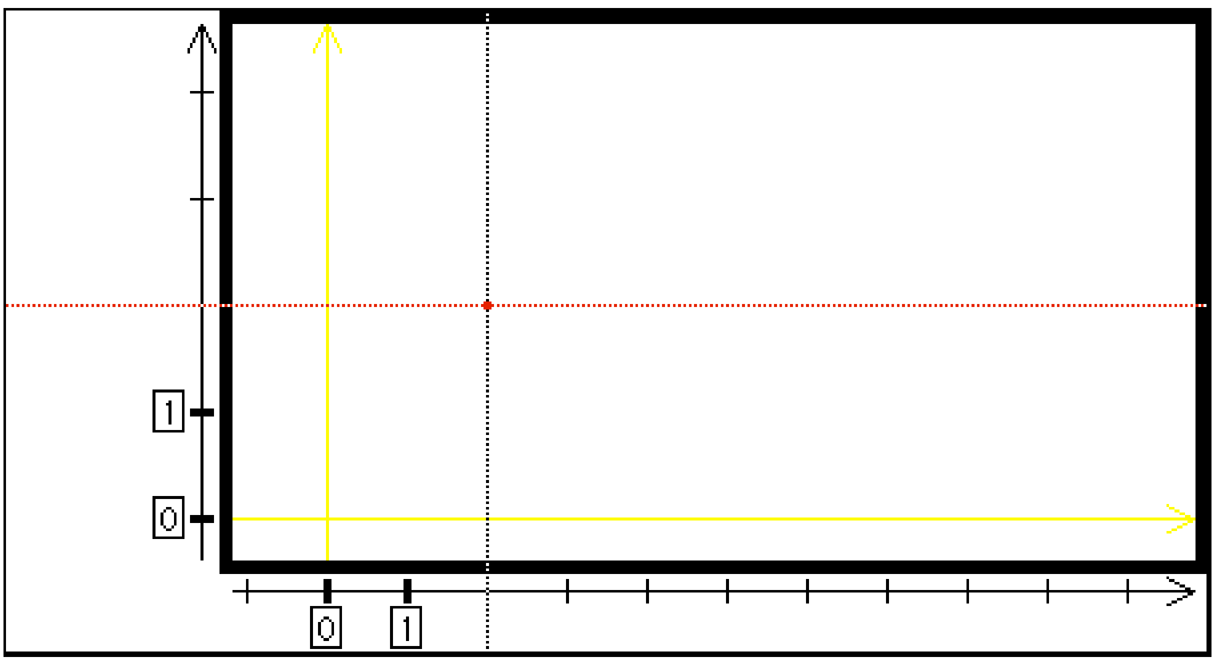
Nous leur proposons alors une situation fonctionnelle très simple pour eux, de façon à ce qu'ils puissent écrire le programme correspondant facilement. Nous leur demandons alors de passer en mode graphique.

Le logiciel leur demande alors de préciser le système de coordonnées à utiliser. Dans un premier temps, nous leur demandons de choisir le système proposé par défaut. Attardons-nous cependant un instant sur la représentation que leur est proposée:



Le cadre épais correspond à la région du plan réel qui est choisie. Notons qu'il y a deux systèmes d'axes. Le premier, à l'intérieur du cadre, apparaît en jaune pâle sur l'écran (pour ne pas trop interférer avec les points tracés) et peut disparaître selon le choix de la région du plan. Le second, à l'extérieur du cadre, est celui sur lequel vont travailler les élèves quand ils seront plus familiers avec le tracé des points. Chacun des axes le composant comporte deux étiquettes, dont on peut changer la valeur et la position, et des graduations dont le nombre est choisi par les élèves.

Mais, lors de leurs premiers contacts, les élèves ne s'attardent pas sur le choix des axes et passent directement au tracé de points. Au départ, le logiciel demande la valeur de la variable d'entrée qui nous intéresse. Puis il demande aux élèves de situer cette valeur sur l'axe horizontal, en l'aidant au besoin. Il trace alors une verticale passant par le point en question. Se déroule alors le calcul détaillé permettant d'obtenir la valeur de la variable de sortie. (Ceci souligne la nature du lien fonctionnel unissant les coordonnées et servant à définir le point.) CARAPACE demande ensuite aux élèves de situer cette valeur sur l'axe vertical, toujours en l'aidant au besoin. Il trace alors une horizontale passant par ce dernier point, puis un point à l'intersection des deux droites (voir figure ci-dessous). Il termine en effaçant les deux droites (mais pas le point).



Nous venons de décrire le mode de tracé de points qui demande le plus de participation aux élèves. Au fur à mesure qu'ils gagnerons de l'expérience, on pourra successivement passer outre les calculs détaillés, leur permettre de choisir le point de départ avec la souris (on leur demande alors la coordonnée approximative du point), jusqu'à les dispenser entièrement d'avoir à répondre aux questions de l'ordinateur. Ils pourront tracer plus d'une fonction à l'écran (les points seront de couleurs différentes pour les distinguer). Ils pourront aussi tracer plusieurs points à la fois, que ce soit en les désignant numériquement (par exemple: de 10 à 180 par sauts de 10) ou via la souris (les points correspondant à tous les pixels de l'intervalle désigné seront tracés).

L'espace nous manque pour décrire les autres fonctionnalités du logiciel CARAPACE (curseur "intelligent", dynamisme et variété dans le choix des axes) et surtout les implications didactiques de ces choix techniques. Nous nous contenterons d'évoquer que nous avons amené des élèves d'une douzaine d'années, travaillant dans l'environnement CARAPACE, à discuter sérieusement de questions difficiles (nombre de solutions, maximisation, etc.) autour de problèmes relativement complexes pour leur âge, comme celui-ci:

> Une équipe de basketball doit participer à une compétition internationale à Paris, et certains supporters voudraient aussi faire le voyage.
> Un agent de voyage propose le marché suivant: pour un groupe de vingt supporters, chaque personne paiera 500$ pour son billet d'avion; pour chaque personne additionnelle, le prix des billets sera réduit de 2$ par personne.
> Combien de supporters font le voyage s'il reçoit 36 400$?

Nous avons aussi pu constater que ces mêmes élèves pouvaient se bâtir des modèles adéquats de phénomènes aussi complexes que la densité des réels, et les relations entre points mathématiques et pixels informatiques.

En guise de conclusion

Nous voulons conclure par deux remarques, l'une sur les environnement informatiques et leur usage pédagogique, et l'autre sur le curriculum scolaire en algèbre.

Il existe à l'heure actuelle plusieurs logiciels mathématiques très sophistiqués (systèmes de calcul symbolique, chiffriers électroniques, solveurs de systèmes d'équations, etc.) et on tend de plus en plus à les introduire dans l'enseignement. Ils utilisent plusieurs types de représentations familières aux mathématiciens et aux scientifiques, mais il ne faut pas en conclure qu'elles sont facilement accessibles aux élèves: souvent, les élèves n'y voient pas les mêmes choses que nous.

Il y a donc place pour des logiciels mathématiques à caractères plus spécifiquement pédagogique, où des représentations intermédiaires plus simples sont proposées, qui peuvent conduire progressivement les élèves aux représentations standards, et peut-être même aider leurs professeurs à mieux prendre conscience de certaines difficultés d'apprentissage ainsi que de certaines stratégies pour y faire face. Nous croyons que le langage algébrique, le mode de calcul détaillé, et les divers niveaux graphiques du logiciel CARAPACE en sont des exemples.

Une grande partie des élèves suivant le curriculum actuel en algèbre n'en retirent pas ou très peu de bénéfice. Il faudra peut-être envisager une approche nouvelle, où tous seraient appelés à acquérir des connaissances algébriques minimales, et où certains pourraient pousser plus loin. Nous pensons que des activités de traduction en langage algébrique suivies d'analyses numérique et graphique (comme celles que l'on retrouve dans l'environnement CARAPACE) peuvent être un candidat intéressant au titre de connaissances algébriques minimales: quand on y réfléchit, les connaissances et habiletés ainsi acquises constituent une base acceptable pour la majorité des besoins personnels et professionnels. La pratique des techniques de calcul symbolique pourrait être laissée aux élèves plus spécifiquement intéressés à une carrière scientifique, étant entendu qu'il faudra tenir compte des systèmes informatisés de calcul symbolique.

C'est dans cette direction que nous entendons faire porter la suite de nos recherches. Nous nous intéresserons plus spécifiquement à l'introduction du calcul symbolique à des élèves ayant fait leur apprentissage de base dans l'environnement CARAPACE.