L’utilisation de SCF dans l’enseignement secondaire

André Boileau
*Projet **APTE***

Ont aussi contribué à cette recherche

- Carolyn Kieran, Paul Drijvers, Denis Tanguay, José Guzmán, Fernando Hitt, Ana Isabel Sacristán et Luis Saldanha.
- Nos remerciements à:
  - les professeurs et les élèves des écoles participantes,
  - notre consultante, Michèle Artigue,
  - le Conseil de Recherches en Sciences Humaines et Sociales et le Ministère des Relations Internationales

L’utilisation de SCF dans les classes de mathématiques au secondaire

- L’utilisation de SCF par les étudiants dans les cours de mathématiques
  - est considérée comme appropriée au niveau collégial,
  - mais pas tout à fait encore au niveau secondaire.
- Dans le passé, plusieurs professeurs de mathématiques au secondaire ont préféré développer des habiletés papier-crayon en algèbre plutôt que d’utiliser des SCF (NCTM, 1999).
- Mais les attitudes sont en train de changer, notamment à cause :
  - des résultats de la recherche;
  - du leadership de certains éducateurs (et de l’impact sur les curriculum);
  - de la meilleure disponibilité de ressources pour utiliser cette technologie au deuxième cycle du secondaire.

Mais qu'est-ce que certaines recherches ont à nous dire?

- En France, depuis le milieu des années '90:
  - les SCF sont apparus dans les classes au secondaire.
  - Des chercheurs (Artigue et al., 1998) ont noté que les professeurs tendaient à souligner les dimensions conceptuelles tout en négligeant les dimensions techniques dans l'apprentissage de l'algèbre.
  - Pourtant, cette insistance sur l'aspect conceptuel ne menait pas à une réduction du temps nécessaire pour l'apprentissage des techniques, ni à une amélioration des réflexions conceptuelles (Lagrange, 1996).
- À partir de ces observations, l'équipe d'Artigue
  - est arrivée à la conclusion que les techniques sont un lien essentiel entre les tâches et la réflexion conceptuelle
  - et a conclu que l'apprentissage des techniques est essentiel à la pensée théorique .

Tâches-Techniques-Theories

- Notre équipe de recherche
  - fut attirée par la notion théorique que l'apprentissage de l'algèbre au secondaire peut être conçu en termes d'une dynamique entre *tâches, techniques et théories* en environnements technologiques;
  - a donc commencé en 2002 une série d'études qui explorent les relations entre *tâche, technique et théorie* en environnements « SCF » chez les élèves de secondaire 3, 4 et 5.

La technique et la théorie co-émergent en interaction mutuelle : les techniques font surgir la pensée théorique et, vice versa, les réflexions théoriques provoquent le développement et l'utilisation des techniques

(Kieran et Drivers, 2006)

Une compréhension conceptuelle de la technique en algèbre?

Nous pensons que cela inclut d’être capable:

- de voir des **formes** dans les expressions et les équations algébriques, telles que la forme linéaire ou la forme quadratique;
- de voir des **relations**, telles que la relation d’équivalence entre des expressions factorisées et ces mêmes expressions développées;
- de voir **changements de forme** qui résultent des transformations algébriques;
- de pouvoir expliquer/justifier ces changements.

Compréhension conceptuelle de la technique en algèbre

Quelques exemples classiques de compréhension conceptuelle en algèbre:

- la distinction entre
  - variables et paramètres,
  - identités et équations,
  - Variables mathématiques et informatiques,
  - etc.
- la connaissance des objets auxquels se réfère le langage algébrique (en général, nombres et opérations) et le besoin, si nécessaire, d’inclure certains aspects sémantiques du contexte mathématique afin d’interpréter les objets donnés …

Autres exemples

1. Conceptualiser l'équivalence d'expressions sous plusieurs formes (factorisée, développée, etc)

   e.g., la connaissance que la substitution de la même valeur à chaque pas d'une chaîne de développement donnera le même résultat :

   $(x+1)(x+2) = x(x+2) + 1(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

   et donc, en substituant, disons 3, pour x à chaque expression, nous trouvons que le résultat est toujours le même, c.-à-d. 20.

Compréhension conceptuelle de la technique en algèbre

2. Coordonner les solutions d'une équation, et leur nombre, avec la relation d'équivalence entre les deux expressions qui constituent l'équation initiale, ex., pour la tâche suivante,

   Les 3 expressions suivantes sont données

   $$x(x^2 - 9),\ (x+3)(x^2 - 3x) - 3x - 3,\ (x^2 - 3x)(x+3),$$

   a) Dire lesquelles sont équivalentes;
   b) Construire une équation à l'aide d'une paire d'expressions non-équivalentes données, et trouver sa solution;
   c) Construire une 2e équation à l'aide d'une autre paire d'expressions non-équivalentes (parmi les 3 expressions données) et, par raisonnement mathématique, trouver sa solution.

Compréhension conceptuelle de la technique en algèbre

3. Voir à travers les symboles une forme sous-jacente, par ex.,

   (a) $x^6 - 1$ comme $((x^3)^2 - 1)$ et comme $((x^2)^3 - 1)$,

   et donc être capable de la factoriser de 2 façons.

   (b) x^2+5x+6 and x^4+7x^2+10

   vues toutes les deux comme étant de la forme

   ax^2+bx+c.

Comment des élèves de secondaire 4 ont dégagé et développé des aspects conceptuels de leur travail technique dans un environnement SCF

- L'étude
  - Tâches créées par les chercheurs et proposées aux professeurs
  - Sessions en classe et entrevues vidéos d'élèves et de professeurs
- À propos des tâches
  - Le contenu des tâches a dépassé le niveau purement technique;
  - Les tâches ont fait appel aux processus de raisonnement mathématique, incluant :

    observation, prédiction, réflexion, vérification, explication, faire des conjectures et justification.
- À propos des technologies
  - Les deux, SCF et papier-crayon, ont été utilisées -- souvent avec des demandes de les coordonner.
  - Le SCF a fourni les données pour établir des conjectures et pour arriver à des conclusions provisoires.

Exemple d'une des tâches

- Factorisation d'expressions de la forme $x^n - 1$

(adapté de Mounier & Aldon, 1996)

- But : d'arriver à la forme générale pour la factorisation de $x^n - 1$ et ensuite de relier celle-ci aux factorisations complètes d'exemples particuliers (valeurs entières de n de 2 à 13).

Une des tâches initiales de l'activité

1. Effectue les opérations indiquées (avec papier-crayon) : $(x\text{-}1)(x+1)$; $(x\text{-}1)(x^2+x+1)$.
2. Sans faire aucune manipulation algébrique, prévois le résultat du produit suivant :
   $(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$
3. D'abord en utilisant papier-crayon, puis avec ta calculatrice, vérifie le résultat que tu as prévu ci-dessus.
4. Qu'est-ce que les trois expressions suivantes ont en commun ? Et comment diffèrent-elles ?
   $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x^2+x+1)$, et $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$.
5. Comment expliques-tu que des produits de facteurs de plus en plus longs donnent un simple binôme:
   - $(x-1)(x+1) = x^2\text{-}1$
   - $(x-1)(x^2+x+1) = x^3\text{-}1$
   - $(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4\text{-}1$
6. Est-ce que ton explication reste valide pour l'égalité suivante :
   $(x-1)\,(x^{134}+x^{133}+x^{132}+\ldots+x^2+x+1)=x^{135}-1$? Explique.

$$(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)=x^n-1$$

Factorisation de $x^n - 1$ (cas de n=2 à n=6)

Dans cette activité, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

Factorisation avec papier-crayon	Résultat obtenu via la commande FACTOR	Si, à la colonne de gauche, tu n'étais pas arrivé au résultat de la calculatrice (colonne du centre), poursuis tes calculs pour y arriver.
$x^2 - 1 =$		
$x^3 - 1 =$		
$x^4 - 1 =$		
$x^5 - 1 =$		
$x^6 - 1 =$		

Exemple de travail d’un étudiant

Factorization using paper and pencil	Result produced by FACTOR command	Calculation to reconcile the two, if necessary
$x^2-1=(x-1)(x+1)$	$(x-1)(x+1)$	N/A
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$	$(x-1)(x^2+x+1)$	N/A
$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$$x^4-1=\left(x^2\right)^2-1=\left(\left(x^2\right)-1\right)\left(\left(x^2\right)+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$$

Factorisation de $x^n - 1$ (cas n=2 à n=6)

Dans cette activité, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

Factorisation avec papier-crayon	Résultat obtenu via la commande FACTOR	Si, à la colonne de gauche, tu n'étais pas arrivé au résultat de la calculatrice (colonne du centre), poursuis tes calculs pour y arriver.
$x^2 - 1 =$		
$x^3 - 1 =$		
Nouvelle stratégie après travail avec n=4 ?		
$x^5 - 1 =$		
$x^6 - 1 =$		

Factorisation de $x^n - 1$ (cas n=7 à n=13)

Conjectures (après étude de *n*=2 à *n*=13)

Pour quels nombres n a-t-on que la factorisation de $x^n - 1$:

i) comporte exactement deux facteurs?

ii) comporte plus de deux facteurs?

iii) comporte le facteur $(x+1)$?

Recherche d'une régularité

$$x^{ab} - 1 = (x^a - 1)P_{b-1}(x^a)$$

$$= (x-1)P_{a-1}(x)P_{b-1}(x^a)$$

où $P_k(y) = y^k + y^{k-1} + \cdots + y + 1$

Peux-tu prédire ce qui se passera quand n sera supérieur à 6 ?

(x+1) facteur de (x^n – 1) ssi n est pair

Aarguments possibles

- Utilisation de : (x – a) facteur de P(x) ssi P(a)=0 (via l'algorithme de division de polynômes)
- Utilisation de

$$\begin{aligned} x^{2k}-1 &= \left(x^2\right)^k - 1 \\ &= \left(x^2-1\right)\left(\left(x^2\right)^{k-1}+\left(x^2\right)^{k-2}+\cdots+\left(x^2\right)+1\right) \\ &= \left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\left(x^2\right)^{k-1}+\left(x^2\right)^{k-2}+\cdots+\left(x^2\right)+1\right) \end{aligned}$$

- Autres arguments ?

n = even number

$x^8 - 1$

$(x-1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x +$

$x^6(x+1) + x^4(x+1) + x^2(x+1) + 1(x+1))$

Le rôle du professeur

- Les bonnes tâches et la technologie SCF sont-elles suffisantes pour que l'apprentissage des techniques algébriques accède au niveau conceptuel ?

  Il semble bien que non !

- Un ingrédient crucial est l'orchestration de l'activité par l'enseignant(e). C'est cet ingrédient qui fait émerger la conceptualisation des techniques dans des environnements technologiques.
- Projet de recherche actuel : Caractéristiques de la pratique enseignante dans des environnements technologiques SCF susceptibles de faire ressortir les aspects conceptuels du travail technique en algèbre.

Merci !

Questions?
Discussion?

Références

Voir la page Web du projet APTE:

http://www.math.uqam.ca/APTE/

Références

- Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G., & Lagrange, J.-B. (1998). *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée* [Integration of complex calculators in the teaching of mathematics at the lycée], Paris: Université Denis Diderot Paris 7, Équipe DIDIREM.
- Ball, L., Pierce, R., & Stacey, K. (2003). Recognising equivalent algebraic expressions: An important component of algebraic expectation for working with CAS. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 15-22). Honolulu, USA: PME.
- Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment* (doctoral dissertation). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3,* 195-227.
- Kieran, C., & Drijvers, P., with Boileau, A., Hitt, F., Tanguay, D., Saldanha, L., & Guzman, J. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11(2), 205-263. Also available through:
- http://www.springerlink.com/content/u7t3580294652u37/
- Lagrange, J.-B. (1996). Analyzing actual use of a computer algebra system in the teaching and learning of mathematics. *International DERIVE Journal, 3*, 91-108.
- Lagrange, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4,* 51-81.
- Mounier, G., & Aldon, G. (1996). A problem story: Factorisations of x^n-1. *International DERIVE Journal, 3*, 51-61.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1999). *Dialogues: Calculators – What is their place in mathematics classrooms?* May/June, pp. 1-16.