

Travail sur la partie I : L'algèbre et l'utilisation de la technologie

Suggestion #3

Pendant le cours, nous avons discuté de l'activité 6 ci-dessous. Cette activité faisait partie d'une séquence de huit activités expérimentées dans trois classes de secondaire IV. Vous pourrez d'ailleurs retrouver toutes ces activités sur le site Web de l'APTE à l'adresse suivante:

<http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html>

Sur cette page, vous pourrez télécharger trois versions de chacune de ces huit activités :

- 1) les feuilles d'activité de l'élève
- 2) le solutionnaire donné à l'élève après qu'il eut remis ses feuilles d'activité
- 3) le guide destiné à aider le professeur à animer les discussions collectives prévues dans le déroulement des activités.

Nous vous proposons maintenant de modifier cette activité dans le but d'en proposer une version plus "avancée" à une clientèle plus expérimentée :

des étudiants du BES (concentration mathématiques).

Dans sa version actuelle, l'activité vise à faire prendre conscience de certains résultats relatifs aux factorisations complètes de $x^n - 1$ (où $n > 1$) :

- La factorisation complète de $x^n - 1$ comporte exactement 2 facteurs **ssi** n est premier
- La factorisation complète de $x^n - 1$ comporte plus de 2 facteurs **ssi** n est composé
- $x + 1$ est un facteur de $x^n - 1$ **ssi** n est pair.

On peut imaginer plusieurs prolongements de cette activités :

- Peut-on prédire le nombre de facteurs de $x^n - 1$ à partir du nombre n ?
- Peut-on trouver des démonstrations de certains de ces résultats, que nous avons obtenu expérimentalement ?
- On peut aussi s'intéresser aux racines de $x^n - 1$, c'est-à-dire aux solutions de l'équation $x^n - 1 = 0$: à part $+1$ (et -1 quand n est pair), ce sont tous des nombres complexes. Quel éclairage ceci peut-il apporter sur les factorisations ?

Ce ne sont là que quelques pistes possibles, et il y en aurait plusieurs autres à explorer. À vous de déterminer celles qui vous paraissent les plus intéressantes pour la clientèle visée.

Quand vous aurez fait vos choix, vous remettrez votre nouvelle activité sous les trois versions décrites ci-dessus.

Nom:

Activité 6: Factorisation

Partie I (papier-crayon et calculatrice): Découverte de régularités parmi les facteurs

1. (a) Avant d'utiliser ta calculatrice, essaie de te rappeler la factorisation de chaque expression algébrique dans la colonne de gauche du tableau:

Factorisation utilisant <u>papier-crayon</u>	Vérification avec la commande FACTOR (montre le résultat affiché par ta <u>calculatrice</u> <i>s'il est différent de ce que tu as obtenu</i>)
$a^2 - b^2 =$	
$a^3 - b^3 =$	
$x^2 - 1 =$	
$x^3 - 1 =$	

Discussion en classe de la partie I, 1a

1. (b) Effectue les opérations indiquées (avec papier-crayon)

$$(x-1)(x+1)=$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=$$

2. (a) Sans faire aucune manipulation algébrique, prévois le résultat du produit suivant:
(Si tu n'y arrives pas, n'écris rien et passe à la question suivante.)

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$$

2. (b) D'abord en utilisant papier-crayon, puis avec ta calculatrice, vérifie le résultat que tu as prévu ci-dessus.

Papier-crayon

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) =$$

Calculatrice

2. (c) Qu'est-ce que les trois expressions suivantes ont en commun? Et comment diffèrent-elles?

$$(x-1)(x+1), (x-1)(x^2+x+1), \text{ et } (x-1)(x^3+x^2+x+1).$$

2. (d) Comment expliques-tu que des produits de facteurs de plus en plus longs donnent un simple binôme:

- $(x-1)(x+1) = x^2-1$
- $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$
- $(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4-1$

Discussion en classe suite à la question 2d

2. (e) En te basant sur les expressions obtenues jusqu'à présent, prédis la factorisation de l'expression $x^5 - 1$.

2. (f) Explique pourquoi le produit $(x-1)(x^{15} + x^{14} + x^{13} + \dots + x^2 + x + 1)$ donne le résultat $x^{16} - 1$?

2. (g) Est-ce que ton explication (en (f), ci-dessus) reste valide pour l'égalité suivante:

$$(x-1)(x^{134} + x^{133} + x^{132} + \dots + x^2 + x + 1) = x^{135} - 1 ?$$

Explique:

Discussion en classe de la partie I, #1, 2

Partie II: Vers une généralisation (activité avec papier-crayon et avec calculatrice)

II (A) 1. Dans cette activité, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

Factorisation avec <u>papier-crayon</u>	Résultat obtenu via la <u>commande</u> <u>FACTOR</u>	Si, à la colonne de gauche, tu n'étais pas arrivé au résultat de la calculatrice (colonne du centre), poursuis tes calculs pour y arriver.
$x^2 - 1 =$		
$x^3 - 1 =$		
$x^4 - 1 =$		
$x^5 - 1 =$		
$x^6 - 1 =$		

II.A.2. Pour quels nombres n a-t-on que la factorisation de $x^n - 1$:

i) comporte exactement deux facteurs?

ii) comporte plus de deux facteurs?

iii) comporte le facteur $(x + 1)$?

Peux-tu prédire ce qui se passera quand n sera supérieur à 6 ?

Discussion en classe de la partie II A

Part II suite (avec papier-crayon et avec calculatrice)

II.(B) 1. Comme dans la partie A ci-dessus, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

Factorisation avec <u>papier-crayon</u>	Résultat obtenu via la <u>commande FACTOR</u>	Si, à la colonne de gauche, tu n'étais pas arrivé au résultat de la calculatrice, poursuis tes calculs pour y arriver.
$x^7 - 1 =$		
$x^8 - 1 =$		
$x^9 - 1 =$		
$x^{10} - 1 =$		

$$x^{11} - I =$$

$$x^{12} - I =$$

$$x^{13} - I =$$

II.B.2. Sur la base des régularités que tu as observées dans le tableau II.(B) ci-dessus, complète (si nécessaire) ta prédiction de la partie A.

C'est-à-dire, pour quels nombres n a-t-on que la factorisation de $x^n - 1$:

- i) comporte exactement deux facteurs?
- ii) comporte plus de deux facteurs?
- iii) comporte le facteur $(x + 1)$?

Tes prédictions se sont-elles avérées justes?

Peux-tu maintenant prédire en général ce qui se passera quand n sera supérieur à 13 ?

Explique STP:

II.(C) Réponds aux questions suivantes sans utiliser ta calculatrice:

1. Est-ce que $x^{2004} - 1$

- i) comporte plus de deux facteurs?
- ii) comporte le facteur $(x + 1)$?

Explique STP:

2. Est-ce que $x^{3003} - 1$
- i) comporte plus de deux facteurs?
 - ii) comporte le facteur $(x + 1)$?

Explique STP:

3. Est-ce que $x^{853} - 1$
- i) comporte plus de deux facteurs?
 - ii) comporte le facteur $(x + 1)$?

Explique STP:

Discussion en classe des parties II B et C

Partie III: Défi

Explique pourquoi $(x + 1)$ est facteur de $x^n - 1$ pour toutes les valeurs paires de $n \geq 2$.