La double nature du produit vectoriel

André Boileau, Section didactique, Département de mathématiques, UQAM

Résumé *Le produit vectoriel est habituellement décrit de deux façons fort différentes : géométriquement (en faisant appel au concept intuitif de « main droite ») et algébriquement (en décrivant comment calculer ses coordonnées via un « déterminant exotique »). J'ai toujours été surpris de ce qu'on ne prenne pas la peine, en général, d'établir l'équivalence entre ces deux définitions pourtant très différentes. Est-ce parce que c'est trop difficile? Est-ce parce que ce n'est pas important? Venez comparer vos réponses aux miennes...*
Remarque importante *L'atelier présenté était soutenu de façon essentielle par des outils technologiques qui seront évoqués dans le texte et que vous pourrez retrouver à la page web suivante : http://www.math.uqam.ca/_boileau/AMQ2006.html* .

Un peu de recul

J'ai toujours été intéressé par les situations mathématiques où l'on devait préciser des concepts dont on a une description intuitive. Par exemple, on décrit souvent une fonction *continue* comme « traçable sans lever le crayon ». Quand on essaie de rendre cette intuition plus précise, on se rend compte que, si on peut tracer une courbe avec un crayon, la pointe de celui-ci se déplacera avec une certaine vitesse et une certaine accélération. La fonction paramétrique décrivant le mouvement sera donc au moins de classe $\mathbf{C}^2$. Il serait sans doute fascinant d'explorer comment, à travers l'histoire, on a pu démêler la situation et distinguer entre continuité et degré de différentiabilité, pour finalement arriver à la définition de continuité en un point x usuelle

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall u \in Dom(f) \;\; \left(|u - x| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

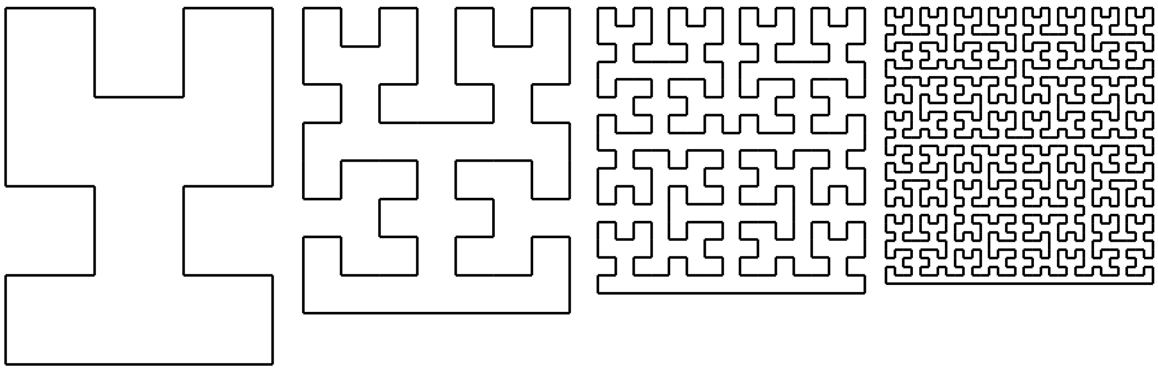
qui a donné des maux de tête à des générations d'étudiants en mathématiques et qui semble bien éloignée de l'intuition originale[1].

Il faut souligner l'intérêt et l'utilité d'une telle définition précise d'un concept intuitif. Dans ce cas précis, on a pu clarifier les rapports entre la continuité et la dérivabilité en montrant d'une part que la seconde entraînait la première, mais d'autre part qu'il pouvait exister des fonctions continues partout mais dérivables nulle part. De plus, une telle définition précise a permis d'étudier dans un contexte général les conditions pour qu'une limite de fonctions continues soit continue, dégageant au passage la notion de convergence uniforme.

Passons maintenant à un autre exemple où l'intuition semble tellement évidente qu'on se demande quel pourrait être l'intérêt de la préciser : le théorème de Jordan-Brouwer. Ce théorème peut s'énoncer comme suit : *Une courbe continue, fermée et simple divise le plan en deux régions*

[1] Cette définition formelle de la continuité en un point correspond cependant à une nouvelle intuition, la *calculabilité*, du moins dans les cas où le domaine de la fonction est un ouvert : la valeur $f(x)$ de la fonction en x peut être approchée (quelle que soit la précision désirée) par les valeurs $f(u)$ de la fonction aux points u voisins de x.

(l'intérieur et l'extérieur). On peut cependant douter que notre intuition puisse tenir compte de tous les cas de courbes possibles, surtout quand on réalise qu'elles peuvent être continues partout mais nulle part dérivables, ou même avoir des propriétés inattendues comme l'illustre la courbe de Hilbert : c'est une courbe fermée et continue, qui peut être obtenue comme limite d'une suite de courbes fermées simples (dont les premières sont représentées ci-dessous), mais dont l'image est un carré plein.



À la lumière de ce dernier exemple, on peut se demander ce qu'il advient de la notion de dimension : une courbe (qui est l'image d'un segment par une fonction continue) devrait être de dimension un, mais il arrive que cette image soit un carré (dont la dimension devrait clairement être deux). Les techniques développées pour mieux comprendre la situation ont fortement contribué au développement de la topologie algébrique.

Venons-en à des considérations plus élémentaires d'orientation. Comment préciser la notion intuitive de « sens des aiguilles d'une montre »? À l'aide du fichier[2] **AntiHoraire.gdf** (dont on voit quelques images ci-dessous), on peut constater expérimentalement que cette notion n'est pas définie de façon absolue puisqu'on peut passer d'un sens anti-horaire à un sens horaire par un simple changement de point de vue dans un espace à trois dimensions.

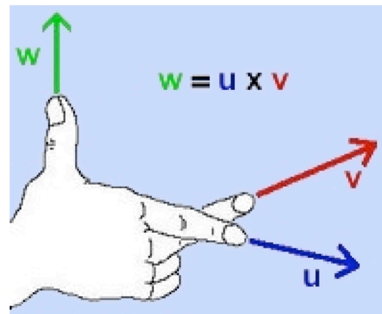
Pour que ce concept soit bien défini, il faudra donc préciser un ordre sur le système des deux axes. De façon analogue, une orientation « main droite » n'est pas définie de façon absolue car elle ne résiste pas à un changement de point de vue dans un espace à quatre dimensions. Ce concept reposera donc ultimement sur la spécification d'un ordre sur le système des trois axes.

[2] Ce fichier est consultable à l'aide du logiciel **Graphing Calculator**, dont une version de type « lecteur » est disponible au http://www.pacifict.com/FreeStuff.html

La double nature du produit vectoriel

Venons-en maintenant au produit vectoriel, pour lequel on donne usuellement deux définitions, l'une géométrique et en partie intuitive, l'autre algébrique et formelle. Rappelons ces deux définitions.

Définition géométrique Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ (aussi désigné par $\vec{u}\times\vec{v}$) vérifiant les propriétés suivantes :



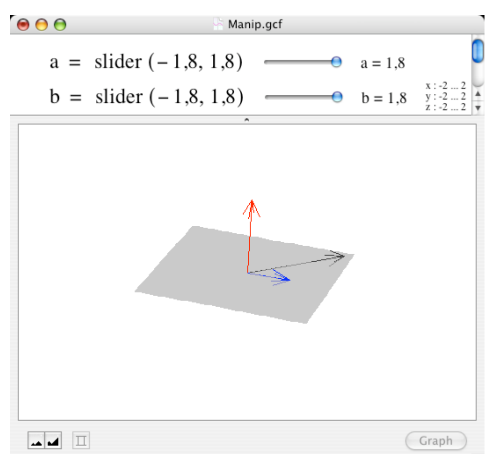
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\left(angle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right)$
- $\vec{w}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
- *Règle de la main droite*
    - si l'index pointe dans la direction de $\vec{u}$
    - et si le majeur pointe dans la direction de $\vec{v}$
    - alors le pouce pointera dans la direction de $\vec{w}$

Définition algébrique Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}=\left(a,b,c\right)$ et $\vec{v}=\left(d,e,f\right)$ est un vecteur $\vec{w}$ (aussi désigné par $\vec{u}\times\vec{v}$) défini comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v} &= (a,b,c)\times(d,e,f)\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}\\ &= (bf-ce)\vec{i}+(cd-af)\vec{j}+(ae-bd)\vec{k}\\ &= (bf-ce, cd-af, ae-bd)\end{aligned}$$

Notez que la définition géométrique repose en partie sur le concept intuitif de « main droite » et semble indépendante du système d'axes. La définition algébrique pour sa part fait référence, de façon non essentielle, à un déterminant « exotique » (certaines entrées sont des vecteurs) et est relative à un système d'axes $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Avant d'entreprendre une analyse comparée de ces deux définitions, prenons quelques instant pour explorer de façon intuitive le produit vectoriel à l'aide du fichier **Manip.gdf**, qui nous permet d'étudier une configuration où l'on fait le produit vectoriel d'un premier vecteur fixe par un second vecteur dont on peut varier interactivement les coordonnées (a, b, 0) à l'aide de deux glissières (voir ci-contre) : on constate qu'une des glissières produit une variation qui laisse le produit vectoriel inchangé. Pouvez-vous décrire à priori de quelle variation il s'agit, ou expliquer à posteriori cette invariance?



Coup d'oeil sur certaines approches

Nous avons examiné dix manuels, dont les dates de publication varient de 1982 à 2006, pour tenter de cerner comment on enseigne cette double nature du produit vectoriel.

De ces 10 manuels, 7 privilégient la **définition algébrique**. Mais comment retrouve-t-on alors la définition géométrique? Les deux premières propriétés ne posant pas de problème particulier, voyons comment on justifie la *règle de la main droite* :

- Dans 1 cas, la *règle de la main droite* n'est même pas mentionnée.
- Dans 2 cas, la définition géométrique est ajoutée sans souligner qu'il faudrait vérifier l'équivalence des deux définitions.
- Dans 2 cas, l'équivalence des deux définitions est énoncée sans aucune justification de la *règle de la main droite.*
- Dans 2 cas, la *règle de la main droite* est illustrée à l'aide des vecteurs correspondant aux 3 axes.

En ce qui concerne les 3 manuels qui choisissent la **définition géométrique**, tous arrivent à la définition algébrique en énonçant un certain nombre de propriétés du produit vectoriel

$$\begin{array}{ll} \vec{u}\times\vec{u}=\vec{0} & \vec{v}\times\vec{u}=-\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \left(a\vec{u}\right)\times\left(b\vec{v}\right)=\left(ab\right)\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) \\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\times\vec{w}\right) \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \end{array}$$

et en les utilisant ensuite pour démontrer que

$$\left(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right)\times\left(d\vec{i}+e\vec{j}+f\vec{k}\right)=\left(bf-ce\right)\vec{i}+\left(cd-af\right)\vec{j}+\left(ae-bd\right)\vec{k}.$$

La seule propriété vraiment délicate à établir est la distributivité $\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)$.

Voici comment procèdent les trois manuels :

- Dans un cas, on se contente de l'illustrer par un dessin.
- Dans un cas, on l'énonce sans apporter aucune justification.
- Dans un cas, on la « justifie » en évoquant la combinaison de moments de forces. Toujours dans ce cas, on donne une référence externe où l'on peut trouver une preuve.

Une remarque en passant : il me semble à tout le moins délicat de tenter de justifier une propriété mathématique en faisant appel à une intuition physique. Quelle confiance peut-on avoir dans un énoncé comme « Le moment résultant de la somme de deux forces appliquées à un même levier ... est la somme des moments attribuables à chacune de ces forces »? Notre intuition physique face à cet énoncé semble évidemment moins grande que face à un énoncé comme « les vitesses sont additives ». Pourtant, on sait depuis Einstein que ce dernier énoncé n'est pas exact...

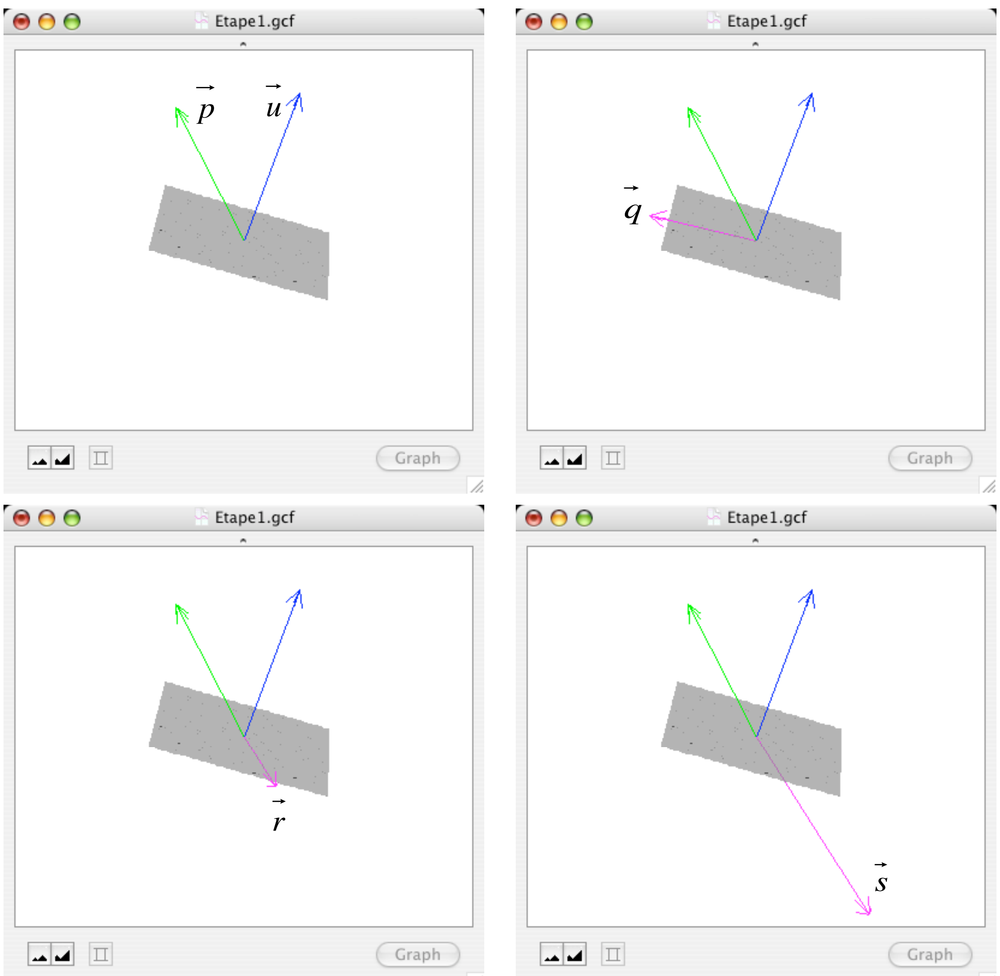
Comme on le voit, aucun des manuels examinés ne donne une preuve complètement satisfaisante de l'équivalence des définitions géométrique et algébrique du produit vectoriel, et l'on peut se demander pourquoi. Est-ce parce que c'est trop difficile? Est-ce parce que ce n'est pas important? Commençons par examiner la difficulté de l'entreprise.

Passage de la définition géométrique à la définition algébrique

On a vu plus haut que le seul obstacle véritable pour passer de la définition géométrique à la définition algébrique était la démonstration de la distributivité $\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \times \vec{w}\right)$. Nous esquissons ici une démonstration en deux étapes[3], illustrées toutes deux par des fichiers informatiques.

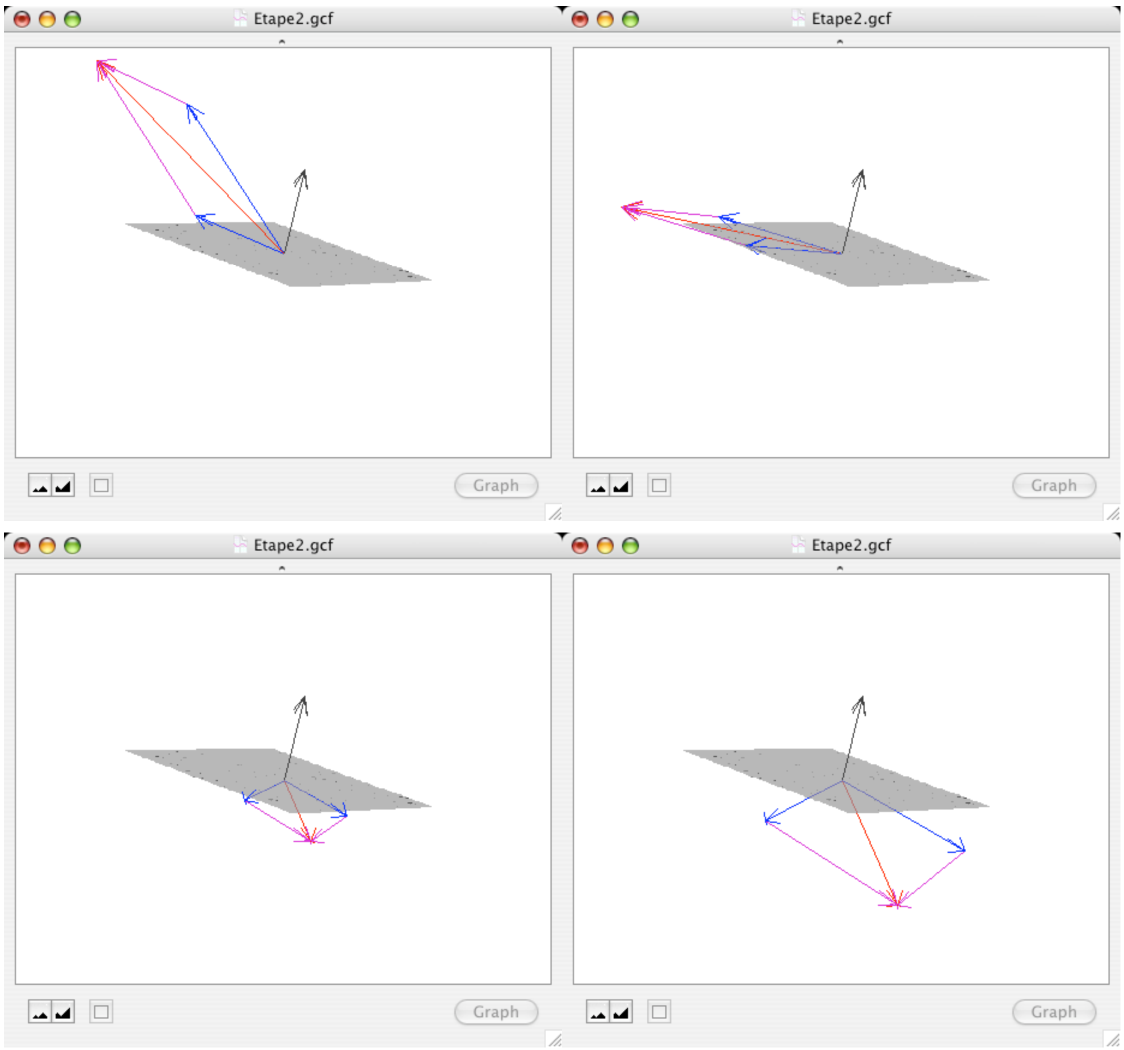
Étape 1 Le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{p}$ peut être obtenu en appliquant successivement les trois transformations suivantes (voir le fichier **Etape1.gcf**)

- Projection orthogonale de $\vec{p}$ dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}$, obtenant ainsi un vecteur $\vec{q}$. Notez que la longueur de $\vec{q}$ est $\left\|\vec{p}\right\| \sin(\mathit{angle}(\vec{u}, \vec{p}))$.
- Rotation de 90° de $\vec{q}$ autour de $\vec{u}$, dans un sens compatible avec la règle de la main droite, obtenant ainsi un vecteur $\vec{r}$. Notez que $\vec{r}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{p}$.
- Homothétie centrée à l'origine et de rapport $\left\|\vec{u}\right\|$ appliquée à $\vec{r}$ pour obtenir un vecteur $\vec{s}$. Le vecteur $\vec{s}$ est le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{p}$ cherché.



3 Voir, par exemple, Thomas et Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, 1992.

Étape 2 Chacune des trois transformations de l'étape 1 préserve les sommes vectorielles (voir le fichier **Etape2.gcf**). D'où la conclusion désirée.



On sait donc maintenant que si un vecteur donné est le produit vectoriel de deux autres vecteurs, au sens de la définition géométrique, alors il est aussi leur produit vectoriel au sens de la définition algébrique.

Passage de la définition algébrique à la définition géométrique

Faisons maintenant la démarche inverse et de montrons qu'un produit vectoriel au sens de la définition algébrique est aussi un produit vectoriel au sens de la définition géométrique. Le point crucial, le seul point qui ne se règle pas avec des manipulations algébriques usuelles, est de vérifier la règle de la main droite.

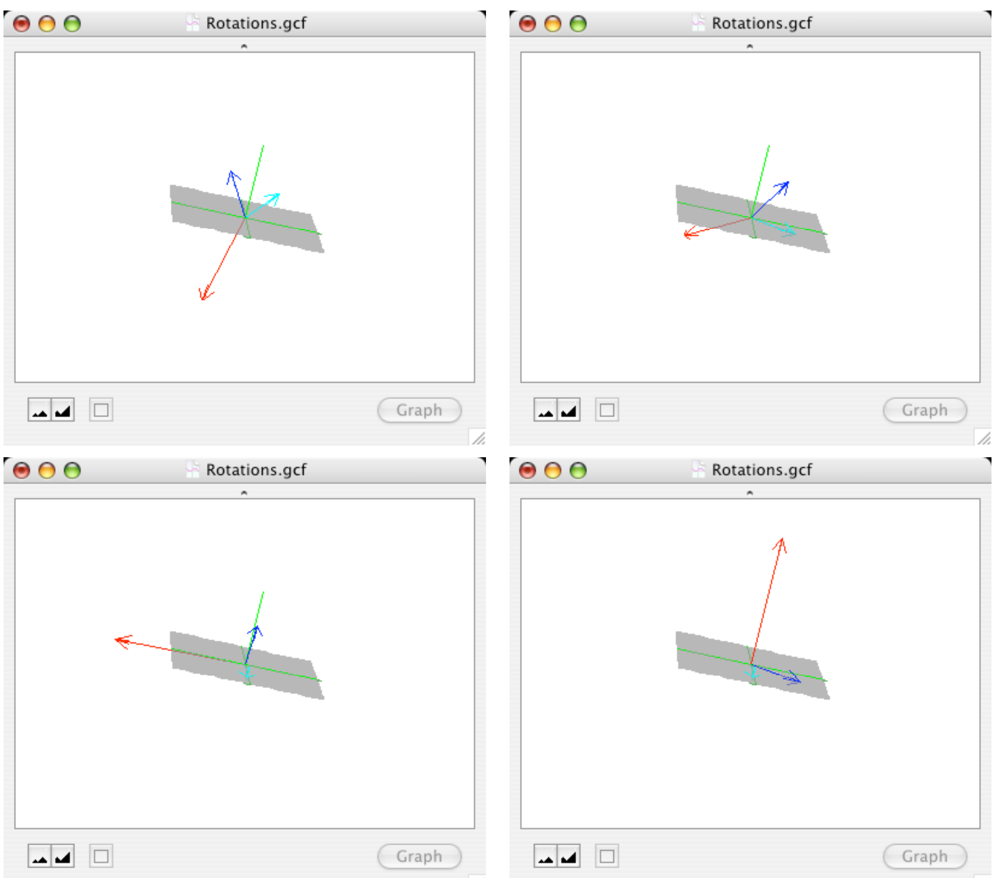
Soient donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconque. On calcule $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ à l'aide de la définition algébrique. Dans un premier temps, on va s'intéresser à l'effet sur ces trois vecteurs d'une rotation d'un angle θ quelconque autour d'un des trois axes. Rappelons qu'appliquer une telle rotation à un vecteur revient à multiplier le vecteur colonne par une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement (à l'aide de calculs longs mais sans surprises) que, si R est une rotation de ce type, on a $R(\vec{w}) = R(\vec{u}) \times R(\vec{v})$.

Dans un deuxième temps, nous allons appliquer à nos trois vecteurs une suite de rotations pour les amener en position standard (voir le fichier **Rotations.gcf**):

- Par une rotation convenablement choisie autour de l'axe des x, on transforme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{w_1}$ de telle sorte que $\vec{u_1}$ est dans le plan x-y.
- Par une rotation convenablement choisie autour de l'axe des z, on transforme les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{w_1}$ en des vecteurs $\vec{u_2}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{w_2}$ de telle sorte que $\vec{u_2}$ est sur l'axe de x positifs.
- Par une rotation convenablement choisie autour de l'axe des x, on transforme les vecteurs $\vec{u_2}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{w_2}$ en des vecteurs $\vec{u_3} = \vec{u_2}$, $\vec{v_3}$ et $\vec{w_3}$ de telle sorte que $\vec{u_3}$ reste sur l'axe de x positifs et $\vec{v_3}$ est dans le plan x-y avec une coordonnée y>0.



Dans un troisième temps, on constate que $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{w_3}$ vérifient la règle de la main droite. En effet, puisque $\overrightarrow{u_3}$ est sur l'axe de x positifs, on a $\overrightarrow{u_3} = (a,0,0)$, avec $a > 0$. De même, puisque $\overrightarrow{v_3}$ est dans le plan x-y avec une coordonnée y>0, on aura $\overrightarrow{v_3} = (c,d,0)$ avec $d > 0$. On aura donc

$$\overrightarrow{w_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = (0,0,ad)$$

avec $ad > 0$: $\overrightarrow{w_3}$ vérifie donc bien la règle de la main droite.

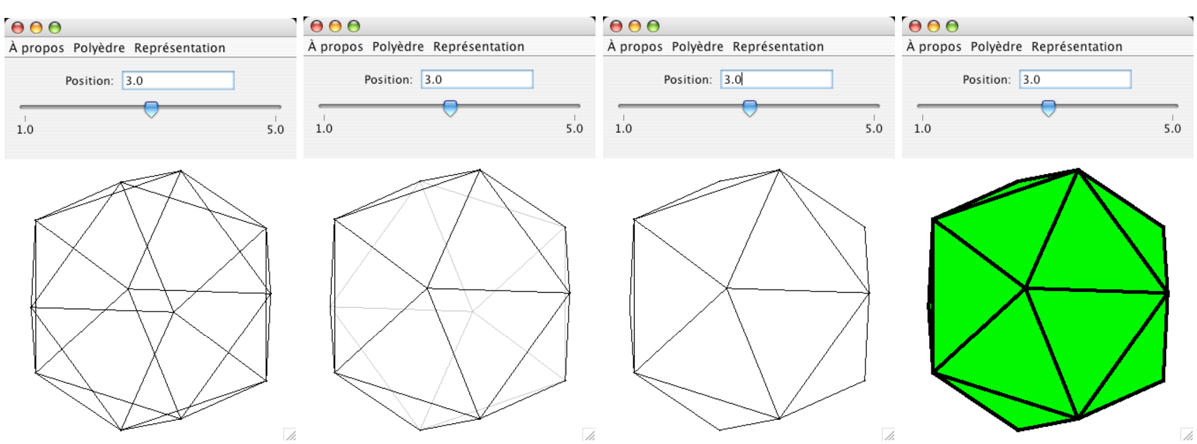
Dans un quatrième temps, on applique une connaissance qui relève de l'intuition géométrique : les rotations préservent la règle de la main droite. Comme nous savons que $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{w_3}$ vérifient la règle de la main droite, il en sera donc de même de $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{w_2}$, puis de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{w_1}$, et enfin de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Importance du produit vectoriel

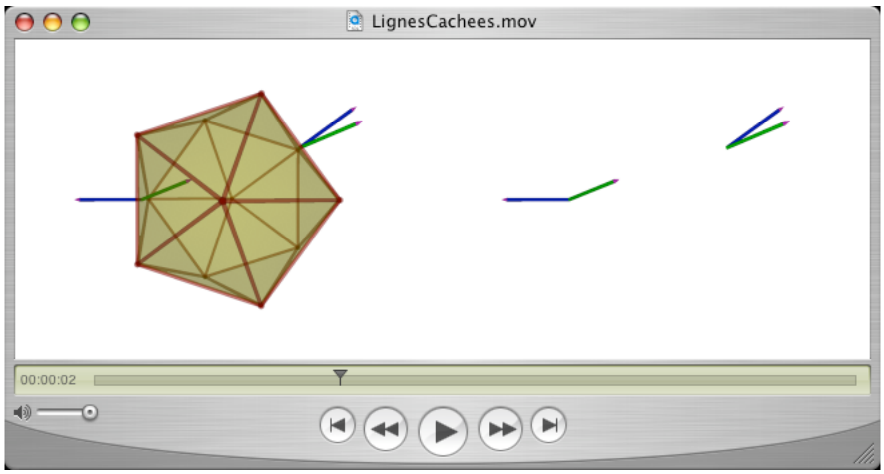
Je vous laisse juger du degré de difficulté des deux démonstrations que je viens d'esquisser, ainsi que de l'intérêt des représentations informatiques utilisées. Je veux juste souligner que, selon moi, on a trop souvent tendance à se cantonner à des preuves essentiellement algébriques, et qu'on présente à nos étudiants trop peu de preuves combinant algèbre et géométrie.

Venons-en à l'importance du produit vectoriel. À priori, on pourrait en douter et se dire qu'il s'agit là d'une curiosité limitée à la dimension trois. Mais les dix manuels examinés fournissent des motivations mathématiques (trouver un vecteur perpendiculaire à deux autres), physiques (moments de forces) et informatiques (représentation 2D de situations 3D), auxquelles on pourrait ajouter plusieurs autres, dont le rotationnel (en analyse vectorielle) et ses applications en physique (en particulier les lois de Maxwell en électromagnétisme).

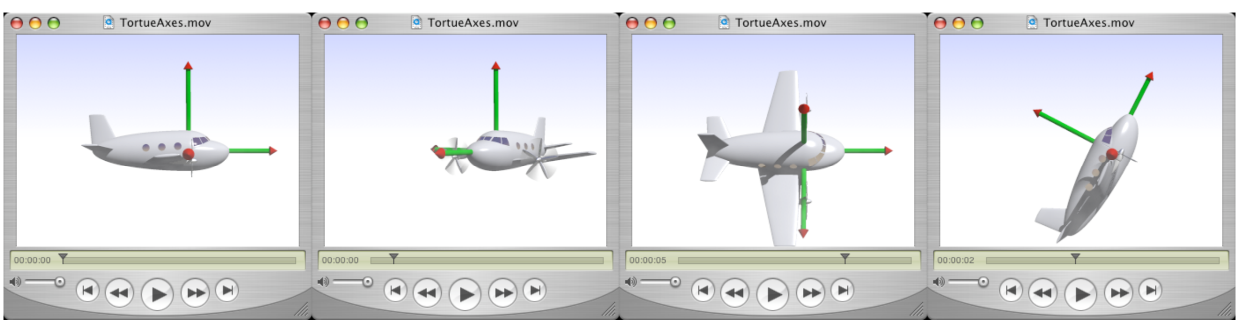
J'aimerais illustrer plus particulièrement l'utilisation du produit vectoriel dans la gestion des lignes cachées de polyèdres convexes. Le programme Java **Platon.jar** (couplé à sa librairie **Expresso.jar**) permet d'expérimenter interactivement diverses représentations des cinq polyèdres réguliers : en fil de fer, avec lignes cachées grisées, avec lignes cachées invisibles, et avec faces colorées.



Comment décider si une face donnée sera cachée ou non? En considérant deux vecteurs : le vecteur perpendiculaire « sortant » de la face en question (qu'on peut obtenir via un produit vectoriel de deux « vecteurs-arêtes ») et le vecteur allant de l'origine à l'oeil de l'observateur. Si l'angle entre ces deux vecteurs est inférieur à 180˚, la face sera visible; si l'angle entre ces deux vecteurs est supérieur à 180˚, la face sera invisible[4]. L'animation **LignesCachees.mov** illustre ce phénomène de façon dynamique.



Une autre illustration de l'intérêt du produit vectoriel est son utilisation dans l'implantation d'une tortue 3D dans POV-Ray[5]. En plus de pouvoir avancer, la tortue 3D (représentée par un avion dans l'animation **TortueAxes.mov**) peut tourner, rouler et tanguer. Pour garder trace de l'état de l'avion, il est utile de conserver sa position et trois vecteurs pointant vers l'avant, la droite et le haut. (Notez qu'on pourrait se contenter de seulement deux de ces vecteurs, le troisième pouvant s'obtenir via ... le produit vectoriel des deux autres.)



Quand on veut demander à notre tortue de mettre le cap vers un point donné (voir l'animation **CapVers.mov),** on peut procéder en plusieurs étapes.

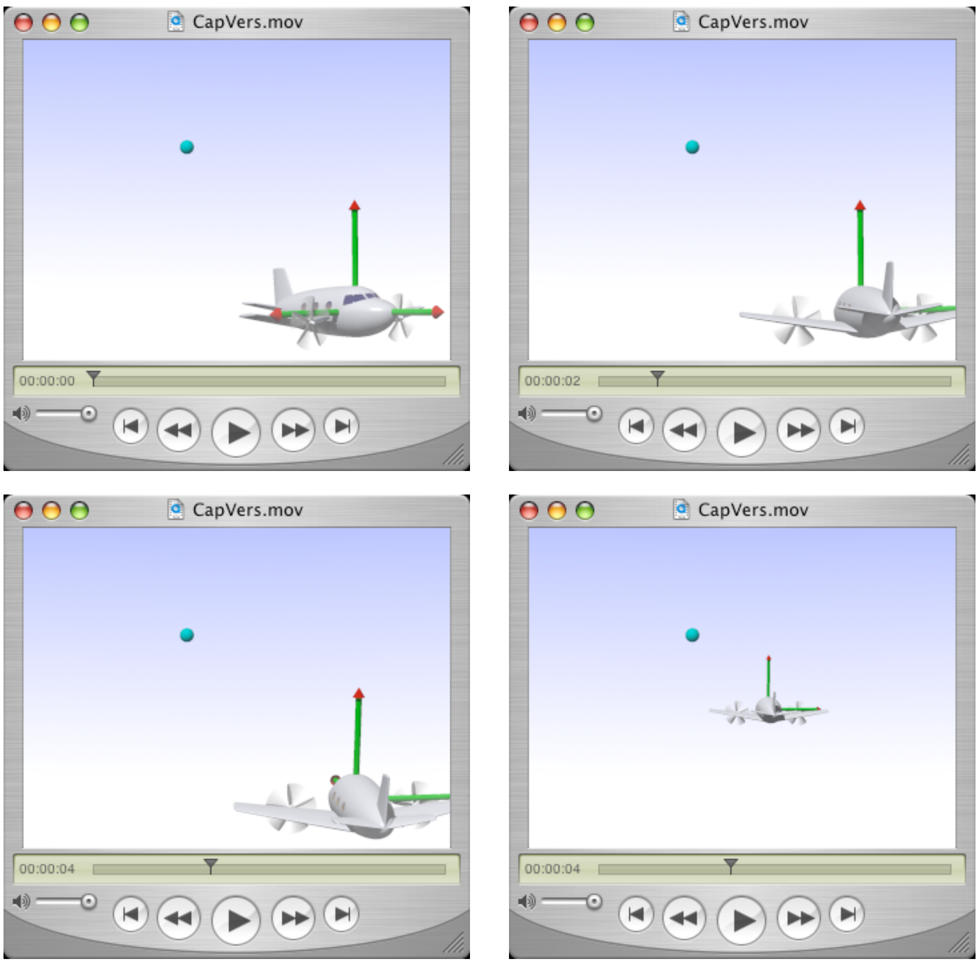
- D'abord tourner la tortue dans la direction de la projection P du point-cible C dans le plan déterminé par les vecteurs *avant* et *droite* de l'avion. Les nouveaux vecteurs *avant* et *haut* de

[4] Notez que ceci ne vaut que pour les polyèdres **convexes**; dans le cas général, il faut faire appel à d'autres techniques (dont le lancer de rayon, voir note suivante).

[5] POV-Ray est un logiciel de lancer de rayons qui nous permet de représenter graphiquement des objets 3D décrits mathématiquement. Il est disponible gratuitement au http://www.povray.org/.

l'avion sont connus : *avant* est le vecteur (normalisé) allant de la position de l'avion vers la position de la projection *P* du point-cible, tandis que *haut* est inchangé. Le nouveau vecteur *droite* de l'avion peut alors être calculé via le produit vectoriel *avant* × *haut*.

- Ensuite faire tanguer la tortue dans la direction du point cible *C*. Les nouveaux vecteurs *avant* et *droite* de l'avion sont connus : *avant* est le vecteur (normalisé) allant de la position de l'avion vers la position du point-cible *C*, tandis que *droite* est inchangé. Le nouveau vecteur *haut* de l'avion peut alors être calculé via le produit vectoriel *droite* × *avant*.
- Si désiré, on peut ensuite déplacer la tortue dans la direction de son vecteur *avant* pour atteindre le point-cible *C*.



En guise de conclusion

Les exemples relatifs au graphisme informatique illustrent très bien l'utilisation de la double nature du produit vectoriel. Comme l'ordinateur n'a ni main droite ni intuition géométrique, il doit procéder exclusivement au moyen de calculs algébriques. Mais le concepteur humain, de son côté, fait appel à son intuition géométrique pour trouver quels calculs il fera exécuter par la machine. Et le concepteur comme l'utilisateur final ont la satisfaction de voir s'afficher des représentations fidèles à l'écran...