La double nature du produit vectoriel

André Boileau
UQÀM

Congrès de l'AMQ, Shawinigan, octobre 2006

http://www.math.uqam.ca/_boileau/AMQ2006.html

Plan de la présentation

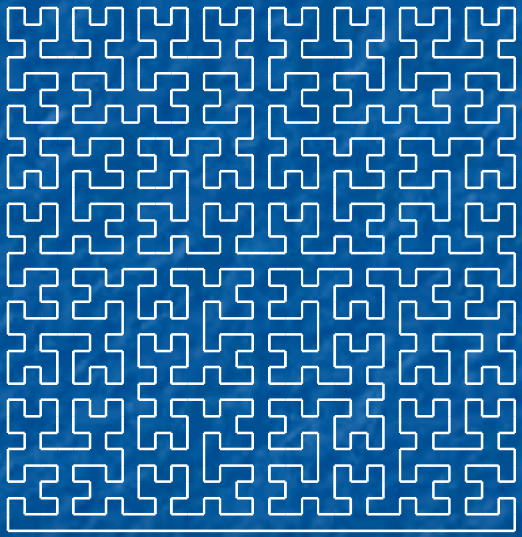
- Un peu de recul: apprivoiser l'intuition
- Le produit vectoriel
  - Immersion et motivation
  - Définitions géométrique et algébrique
  - Coup d'oeil sur certains manuels
  - Ponts entre les deux définitions
  - Applications au graphisme informatique
    - Lignes cachées de polyèdres convexes
    - Vers une tortue 3D
- Discussion

Contexte général : préciser les intuitions en maths

- Fonction continue
  « Traçable sans lever le crayon » (?)
  - Si on peut tracer avec un crayon, la pointe de celui-ci se déplacera avec une certaine vitesse et une certaine accélération
    - La fonction paramétrique décrivant le mouvement sera donc au moins de classe C^2
  - Une définition précise a permis des découvertes
    - Fonctions continues partout mais dérivables nulle part
    - Critère pour qu'une limite de fonctions continues soit continue (notion de convergence uniforme)

Contexte général : préciser les intuitions en maths

- « Une courbe continue, fermée, simple divise le plan en deux régions (l'intérieur et l'extérieur) » (Théorème de Jordan-Brouwer)
  - Peut sembler intuitivement évident
  - Mais on doit tenir compte que notre intuition est limitée
    Exemple: courbe de Hilbert
    - Limite de courbes fermées simples
    - Son image est un carré plein
  - Les techniques développées pour mieux comprendre la situation sont à la base de la topologie algébrique



Contexte général : préciser les intuitions en maths

Revenons à des considérations plus élémentaires

- Orientation: « Sens des aiguilles d'une montre »
  - Et si on se place en 3D ???
  - On précise ce concept en ordonnant un système de deux axes

Anti-horaire?

- Orientation: « Main droite »
  - Et si on se place en 4D ???
  - On précise ce concept en ordonnant un système de trois axes

Le produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$

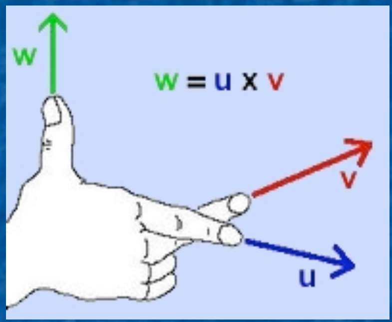
- Expérimentation gestuelle (avant description géométrique et algébrique)

Manipulations

- Motivations pour l'introduire: applications
  - en mathématiques (géométrie 3D)
  - en physique (moments de forces)
  - en informatique (graphisme)

Définition géométrique (en partie intuitive)

- Produit vectoriel des vecteurs **u** et **v**
  - Norme: Norme(**u**)•Norme(**v**)•sin(angle(u,v))
  - Perpendiculaire à la fois à **u** et à **v**
  - Règle de la main droite
    - si index dans direction de **u**
    - et si majeur dans direction de **v**
    - alors pouce dans direction de leur produit vectoriel



- Cette définition ne réfère pas à un système axes

Définition algébrique (« déterminant exotique »)

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a,b,c) \times (d,e,f)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$= (bf - ce)\vec{i} + (cd - af)\vec{j} + (ae - bd)\vec{k}$$

$$= (bf - ce, cd - af, ae - bd)$$

Coup d’oeil sur certaines approches (10 manuels - de 1982 à 2006)

- Définition algébrique (7) → forme géométrique
  - « Règle de la main droite » non mentionnée (1)
  - Définition géométrique ajoutée sans vérifications (2)
  - « Règle de la main droite » illustrée avec les vecteurs de la base standard (2)
  - Énoncé sans preuve (2)

- Définition géométrique (3) → forme algébrique
  Le point crucial est d’établir la distributivité
  - Dessin illustrant la distributivité (1)
  - Distributivité énoncée sans preuve (1)
  - Distributivité justifiée via un argument physique (combiner moments de forces) + Référence (1)

Caractérisation algébrique à partir de la définition géométrique

- On peut montrer que

$$\left(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right)\times\left(d\vec{i}+e\vec{j}+f\vec{k}\right)$$

$$=\left(bf-ce\right)\vec{i}+\left(cd-af\right)\vec{j}+\left(ae-bd\right)\vec{k}$$

en utilisant les propriétés suivantes

$$\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=-\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$$

$$\left(a\vec{u}\right)\times\left(b\vec{v}\right)=\left(ab\right)\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$$

$$\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)$$

- Preuve de la dernière propriété

$$\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \times \vec{w}\right)$$

  - voir le produit vectoriel par le vecteur de gauche comme une composée de 3 transformations
  - étudier comment la somme de 2 vecteurs se comporte sous ces 3 transformations

Étape 1

Étape 2

Caractérisation géométrique à partir de la définition algébrique

- Si **w** est le produit vectoriel de **u** et **v** (défini algébriquement), on montre que
  - $||\mathbf{w}|| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \sin(\text{angle}(\mathbf{u},\mathbf{v}))$
    via le calcul $||\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})^2$
    en utilisant $(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos(\text{angle}(\mathbf{u},\mathbf{v}))$
  - **w** est perpendiculaire à **u** et **v**
    via le calcul $\mathbf{w}\bullet\mathbf{u} = \mathbf{w}\bullet\mathbf{v} = 0$

- Et la « règle de la main droite »?
  - Si **w** est le produit vectoriel de **u** et **v** (défini algébriquement), et si R est une rotation autour d'un des 3 axes standards, on montre (par des calculs longs mais faciles) que

$$T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) \times T(\mathbf{v})$$

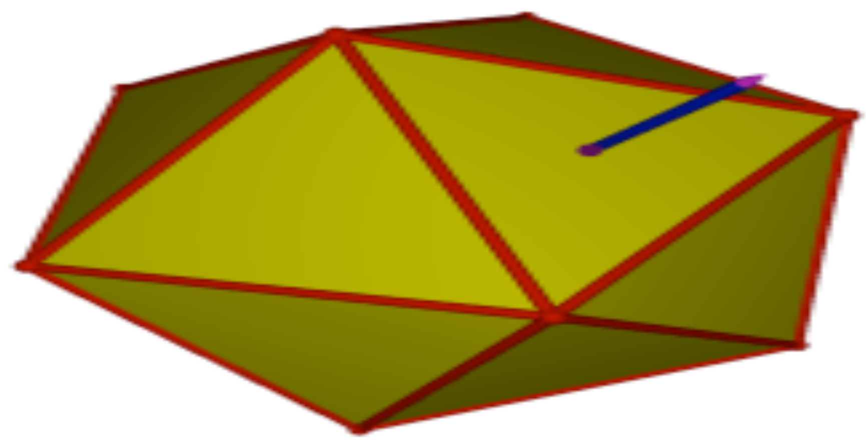
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Et la « règle de la main droite »? (suite)
  - Par ailleurs, on sait intuitivement que toute rotation préserve la « règle de la main droite »
  - Par une suite de rotations, on amène nos trois vecteurs dans une position standard où l’on peut vérifier directement la « règle de la main droite » à partir des coordonnées

Rotations

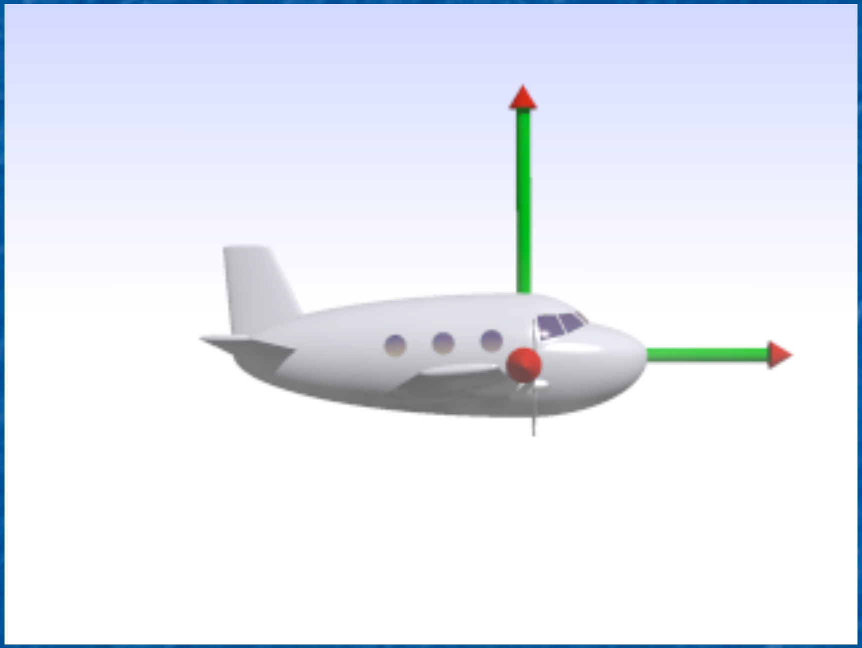
Graphisme informatique: lignes cachées (cas convexe)

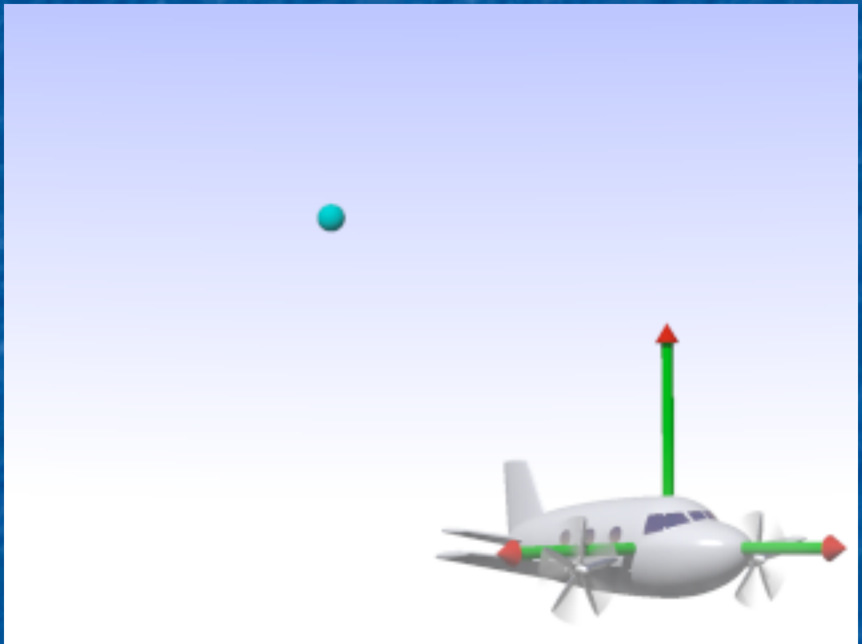
- Tout d'abord, une Démonstration
- Explication



Graphisme informatique: vers une tortue 3D

- Idée d'une « tortue 3D » (avion)





- Comment diriger la « tortue » vers un point donné

Vous pouvez obtenir les fichiers informatiques utilisés sur la page web suivante:

http://www.math.uqam.ca/_boileau/AMQ2006.html

André Boileau
UQÀM

Discussion

- Établir l'équivalence des deux définitions?
  - Est-ce important?
  - Est-ce trop difficile?
    Existe-t-il d'autres approches plus simples?
  - Est-ce souhaitable?
- Comment motiver le concept?
  Via les applications?
- En général, quelles réponses donne-t-on à ces questions?