André Boileau

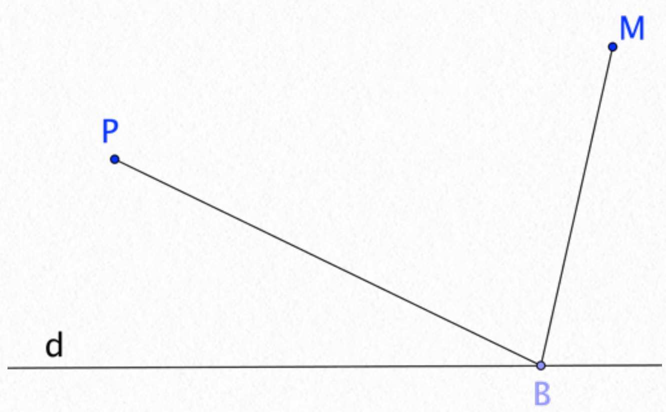
Jouer au pompier avec GeoGebra

1

En classe

Celui qui apprend n'est pas toujours celui qu'on pense

Un jour, un professeur traça le diagramme suivant au tableau

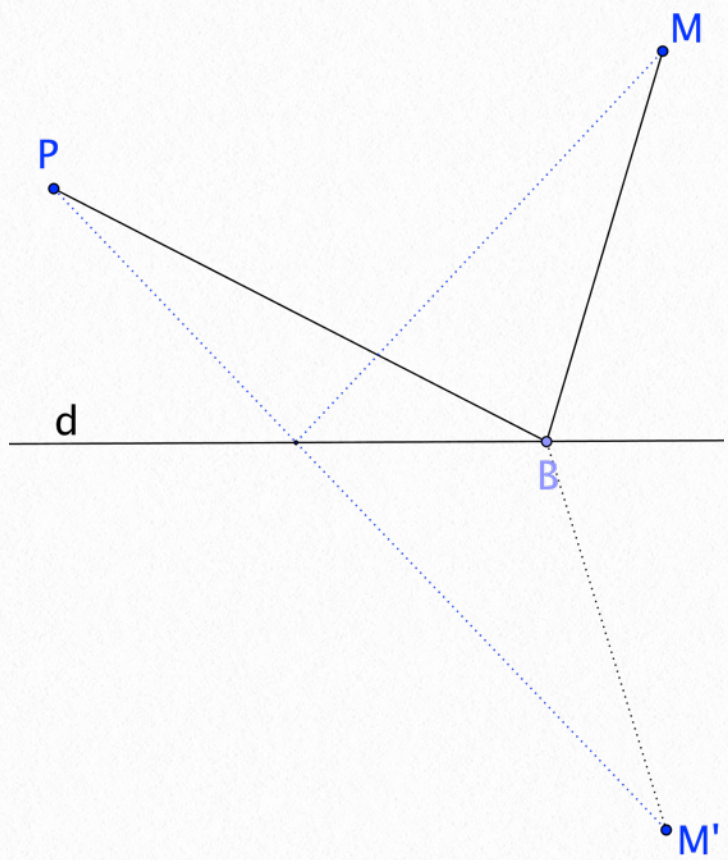


tout en posant la question suivante aux élèves de sa classe :

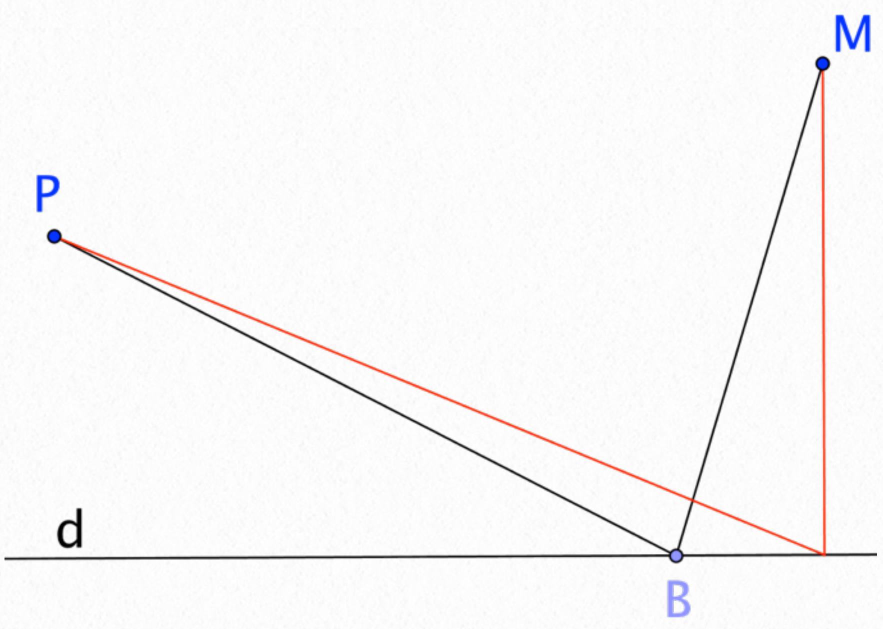
> Une personne *P* se trouve près d'une rivière dont la berge est représentée par la droite *d* du diagramme du tableau. Soudain, il constate que sa maison *M* est en feu. Heureusement, il a déjà un seau en main, mais malheureusement celui-ci est vide. Il doit donc aller puiser de l'eau avant de pouvoir courir éteindre le feu. La question est la suivante : à quel point *B* de la berge doit-il aller puiser de l'eau pour être le plus efficace dans son combat contre l'incendie?

C'est lui qui avait formulé ainsi le problème, et il n'en était pas mécontent. Le problème initial était purement mathématique : trouver la distance minimale pour aller du point *P* au point *M* en passant par la droite *d*. Il avait réussi à trouver un contexte pour l'incarner, pour le rapprocher de la vie courante de ses élèves.

Ce problème avait aussi une solution astucieuse mais simple (voir le diagramme en haut ci-contre), quand on remarque qu'à chaque trajet de *P* à *M* passant par *d* correspond un trajet de même longueur de *P* à *M'* (le symétrique de *M* par rapport à *d*). Dans ce dernier cas, il est clair que le trajet le plus court est le segment reliant *P* à *M'*, et la solution cherchée s'en déduit aisément.



Il réfléchissait encore à tout ceci quand il s'aperçut qu'un élève était allé au tableau pour proposer sa solution (en rouge).



Sa première réaction fut de penser que cet élève avait tenté d'appliquer au problème, sans trop réfléchir, un concept mathématique : la perpendicularité. Mais c'était un bon professeur, et il demanda patiemment à l'élève d'expliquer les raisons de sa solution. La réponse qu'il obtint le pris complètement par surprise : «c'est parce que je cours beaucoup plus vite avec un seau vide qu'avec un seau plein».

L'histoire ne dit pas ce que fit le professeur : donna-t-il raison à l'élève, reformula-t-il le problème de façon à le ramener au problème initialement prévu, ou avoua-t-il candidement qu'il ne connaissait pas la solution? Mais ce qui est sûr, c'est que cette fois-là, c'est un élève qui a montré quelque chose à un professeur...

En effet, le professeur avait réalisé que son emballage du problème dans une situation concrète avait transformé celui-ci : d'un problème de minimisation des distances, il en avait fait un problème de minimisation du temps. Et ce problème ainsi transformé, il ne savait pas comment le résoudre. Car, même s'il se doutait qu'il y avait du vrai dans les dires de son élève, il n'était pas certain que tout avait été dit. Mais il allait se mettre au travail pour éclaircir tout ça...

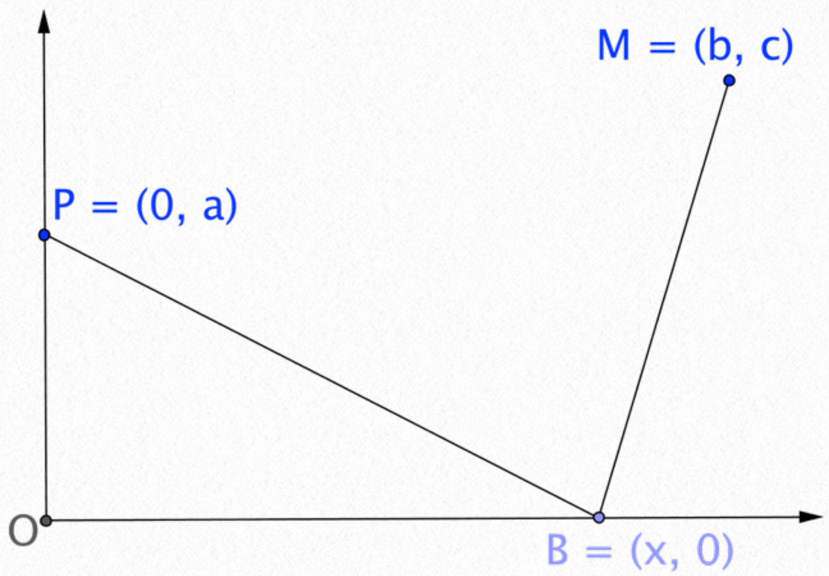
2

Retour sur le problème

Des problèmes semblables peuvent avoir un degré de difficulté différent

Est-ce le jour même ou le lendemain, mais nous retrouvons notre professeur au travail, bien décidé à éclaircir le mystère planant sur le nouveau problème révélé par un de ses élèves. Il est à la recherche d'un «truc» élégant, semblable à celui du problème initial, qui s'appliquerait au nouveau contexte. Mais il a beau chercher, il ne trouve pas.

De guerre lasse, il décide de recourir à une méthode plus générale, mais pas toujours aussi éclairante que la géométrie synthétique : la géométrie analytique et le calcul différentiel . La première étape est de choisir, le plus astucieusement possible, un système d'axes : le but est de simplifier les calculs au maximum. Après mûre réflexion, il décide de choisir la droite *d* comme axe des abscisses, et la projection du point *P* sur celle-ci comme origine, de telle sorte que les coordonnées de tous les points restent positifs.



Conformément à ces choix, il dénote les coordonnées des divers points comme suit : $P = (0,a)$, $M = (b,c)$ et $B = (x,0)$. Il décide aussi de choisir les unités de telle sorte que la vitesse entre *P* et *B* soit de 1: la vitesse de *B* à *M* sera alors *v*, une valeur comprise entre 0 et 1, puisqu'on va moins vite avec un seau remplis.

Il peut alors calculer le temps requis pour aller de *P* à *M* en passant par *B* comme suit :

$$t(x) = \text{temps total} = \frac{dist(P,B)}{1} + \frac{dist(B,M)}{v}$$
$$= \sqrt{x^2+a^2} + \tfrac{1}{v}\sqrt{(x-b)^2+c^2}$$

Il remarque au passage que, si la vitesse *v* est de 1, alors le temps requis correspond à la distance parcourue, et on se ramène au premier problème : le problème tel que reformulé par l'élève apparaît donc comme une généralisation du problème initial.

Comme il cherche un minimum de la fonction t(x), il décide de la dériver par rapport à x

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-b}{v\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$$

puis de chercher les racines :

$$t'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{b-x}{v\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+a^2} = \frac{(x-b)^2}{v^2\left((x-b)^2+c^2\right)}$$
$$\Leftrightarrow x^2v^2\left((x-b)^2+c^2\right) = (x^2+a^2)(x-b)^2$$
$$\Leftrightarrow (1-v^2)x^4 - 2b(1-v^2)x^3$$
$$+\left(a^2+b^2(1-v^2)-c^2\right)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$$

Il obtient donc une équation du quatrième degré: pas facile d'y voir clair. Par contre, dans le cas particulier du premier problème (cas où v = 1), on se ramène à une équation du second degré :

$$(a^2-c^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2a^2b \pm \sqrt{4a^4b^2 - 4(a^2-c^2)a^2b^2}}{2(a^2-c^2)}$$
$$= \frac{2a^2b \pm \sqrt{4a^2b^2c^2}}{2(a^2-c^2)} = \frac{a^2b \pm abc}{(a^2-c^2)}$$
$$= \frac{ab(a \pm c)}{(a+c)(a-c)} = \frac{ab}{(a \pm c)}$$

Il obtient donc deux solutions possibles, alors qu'il sait que la solution est unique. Un moment de réflexion lui fait réaliser que la «solution» supplémentaire a été introduite lorsqu'on a élevé au carré les deux membres de l'équation à résoudre :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{b-x}{v\sqrt{(x-b)^2+c^2}}$$

En fait, il démontre facilement que c'est $\frac{ab}{a-c}$ qui est la fausse solution, puisque la solution doit être «entre» P et M (et donc que x doit être entre 0 et b) :

- si a < c alors $\frac{ab}{a-c} < 0$
- si a > c alors $\frac{ab}{a-c} > b$.

De même, il est en mesure de vérifier géométriquement que $\frac{ab}{a+c}$ est une solution correcte, qui correspond au cas où les points *P, B* et *M'* sont alignés, c'est-à-dire que la pente du segment *PB* est égale à celle du segment *BM'* :

$$\frac{a-0}{0-x} = \frac{0-(-c)}{x-b}$$

$$\Leftrightarrow ax - ab = -cx$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ab}{a+c}$$

Sans grand espoir, il essaie de voir si *Maple* ne pourrait pas l'aider un peu plus dans le cas général, mais il obtient essentiellement le même résultat :

$$\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{v}\sqrt{(x-b)^2+c^2} \xrightarrow{\text{dériver par rapport à x}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{2x-2b}{v\sqrt{(x-b)^2+c^2}} \xrightarrow{\text{résoudre pour x}} [[x = RootOf((v^2-1)\_Z^4 + (-2bv^2+2b)\_Z^3 + (b^2v^2+c^2v^2-a^2-b^2)\_Z^2 + 2a^2b\_Z - a^2b^2)]]$$

Il faudra donc attaquer le problème d'une autre façon...

3

GeoGebra à la rescousse

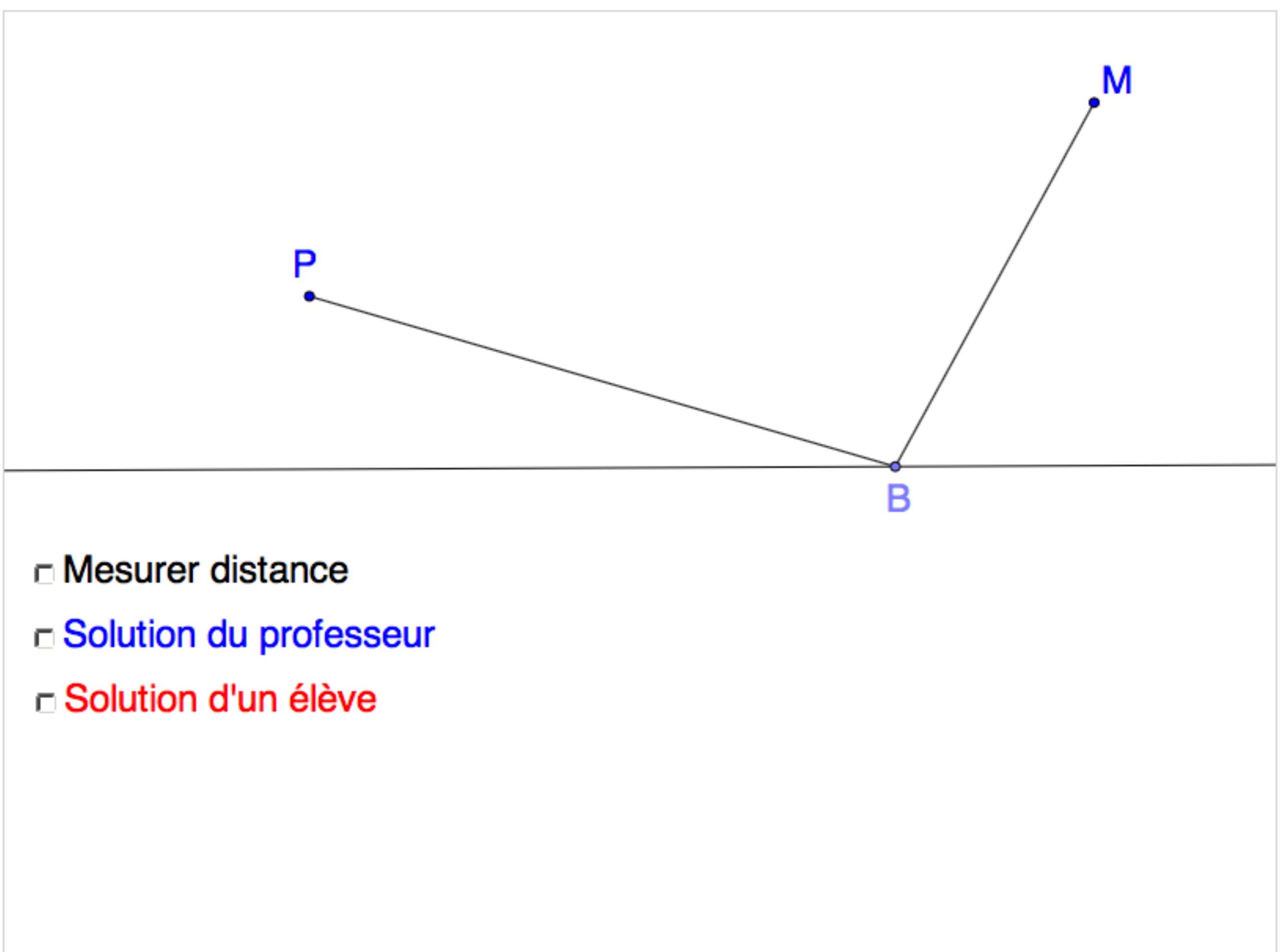
L'expérimentation via la technologie peut aider à développer notre intuition

Quand on ne peut résoudre un problème de façon exacte, on peut tenter de le résoudre de façon approchée, que ce soit de façon graphique ou de manière numérique. Notre professeur a tenté d'utiliser la géométrie analytique et le calcul différentiel pour arriver à une solution exacte de son problème, mais il est tombé sur un os : une équation du quatrième degré! Il pourrait, bien sûr, tenter de résoudre numériquement cette équation, mais il craint d'obtenir, de cette façon, une solution éclairant peu les intuitions sous-jacentes.

C'est pourquoi il décide d'utiliser *GeoGebra* pour tenter une approche graphique, plus proche du contexte initial. Après quelques tentatives, il arrive à la figure suivante qui lui semble susceptible non seulement d'éclairer son problème mathématique, mais aussi de servir de ressourcce pédagogique pour présenter le problème en classe.

Pour le reste de ce chapitre, le lecteur est invité à profiter de l'interactivité de ce livre et de réaliser ses propres expérimentations, inspirées ou non par celles de notre professeur, en tapant sur la figure GeoGebra ci-dessous.

Il a voulu modéliser une situation générale, et n'a pas fixé les points *P* et *M*, pas plus que la droite *d*. Mais, la plupart du temps, ces éléments resteront inchangés et seul le point *B* sera déplacé. En cochant la case «Mesurer distance», on commande l'affichage de la distance du trajet allant de *P* à *M* en passant par *B*. En cochant la case «Solution du professeur», on affiche la solution du problème initial ainsi que l'astuce consistant à représenter le trajet «réfléchi» allant vers le point symétrique *M'*.



La figure GeoGebra créée par le professeur.

Mais l’action la plus intéressante consiste à cocher la case «Solution d’un élève», qui fait apparaître non seulement la solution proposée par l’élève mais aussi un curseur permettant de donner à la vitesse v de la seconde partie du trajet une valeur comprise entre 0 et 1. Quand on donne à v une valeur strictement inférieure à 1, une indication qu’on mesure maintenant des temps et non des distances s’affiche en rouge.

En gardant $v = 1$, notre professeur constate que sa solution est correcte, et que celle de l’élève ne l’est pas. Il le savait déjà, mais il se dit que c’est aussi une confirmation du bon fonctionnement de la figure *GeoGebra* qu’il a créée.

Il suppose ensuite que l’on court deux fois moins vite avec un seau plein ($v = 0.5$). Il constate sans surprise que sa solution cesse d’être correcte. Mais il est plus surpris de voir que celle de l’élève ne l’est pas non plus.

En fait, en répétant de telles expériences avec diverses valeurs de v, il constate que la solution se rapproche de plus en plus de la position indiquée par l’élève au fur et à mesure que la vitesse diminue vers 0.

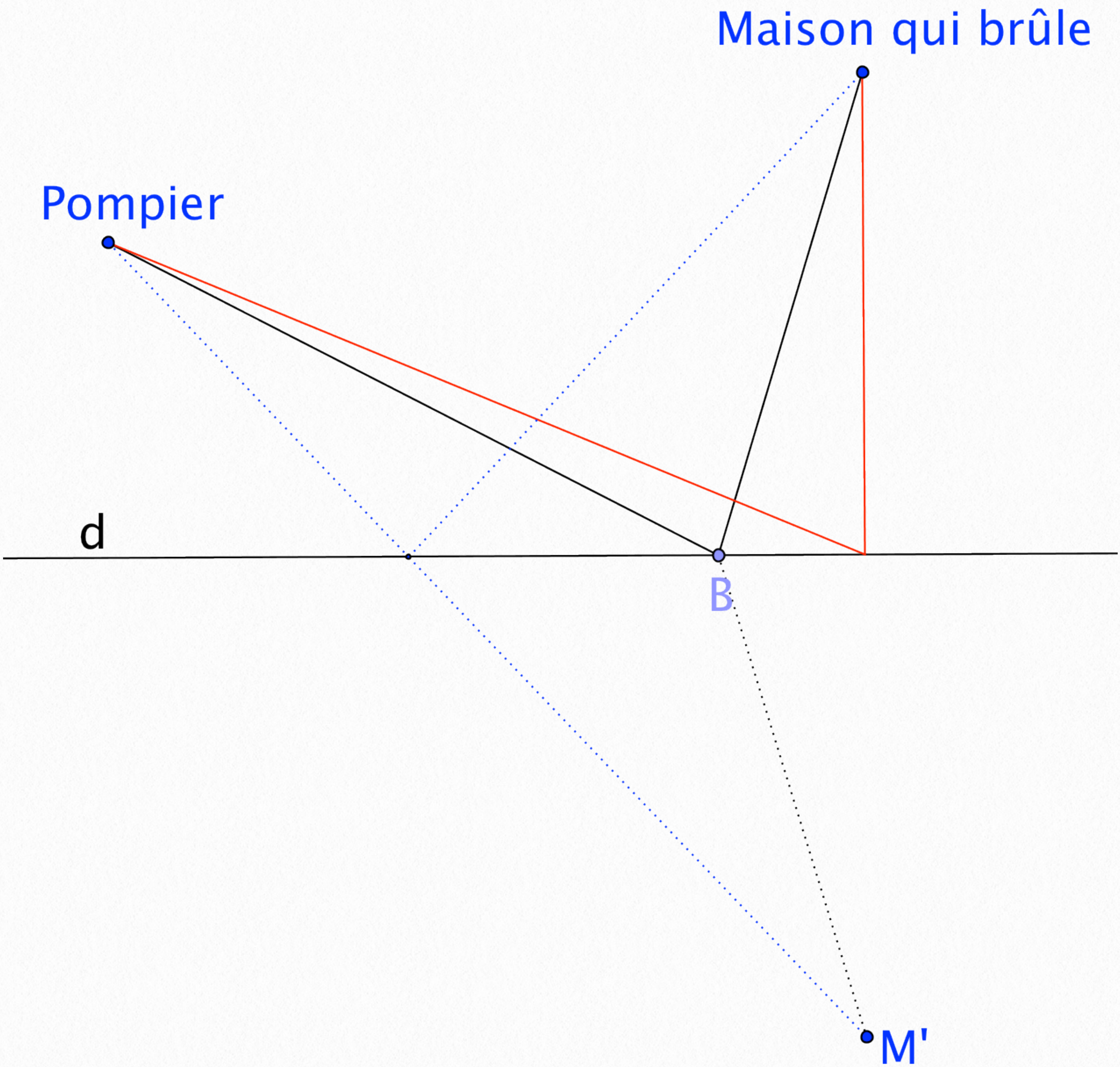
Il voudrait continuer d’étudier cette situation pleine de richesse, mais pour l’heure, il a des cours à préparer et des devoirs à corriger...

Nous laissons au lecteur le plaisir de poursuivre cette exploration. Il pourra y découvrir des faits nouveaux et des liens intéressants, en particulier en relation avec la loi de Snell-Descartes.

APPENDICE

Insertion de figures GeoGebra dans nos livres

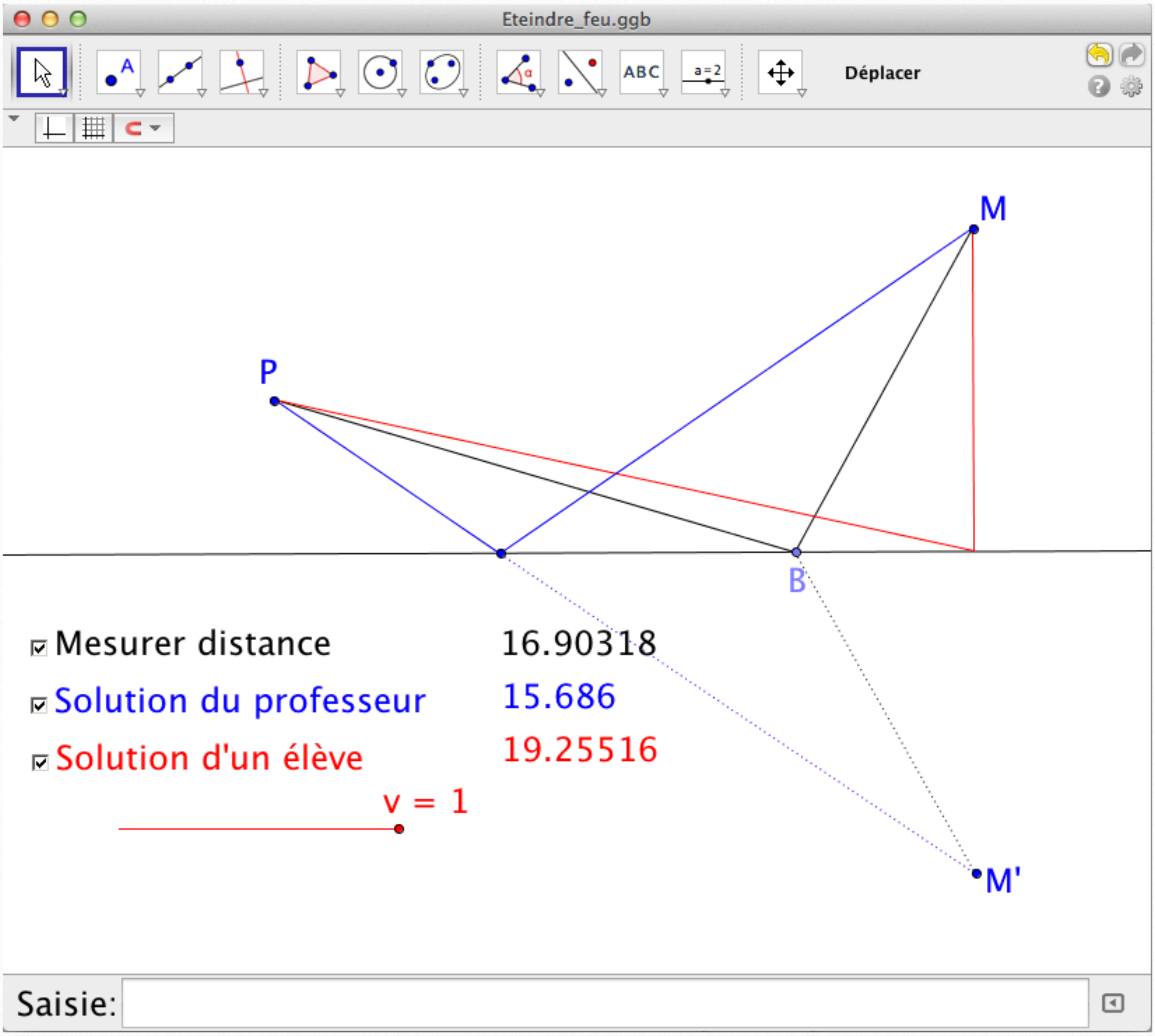
Un peu de bidouillage en attendant une solution officielle

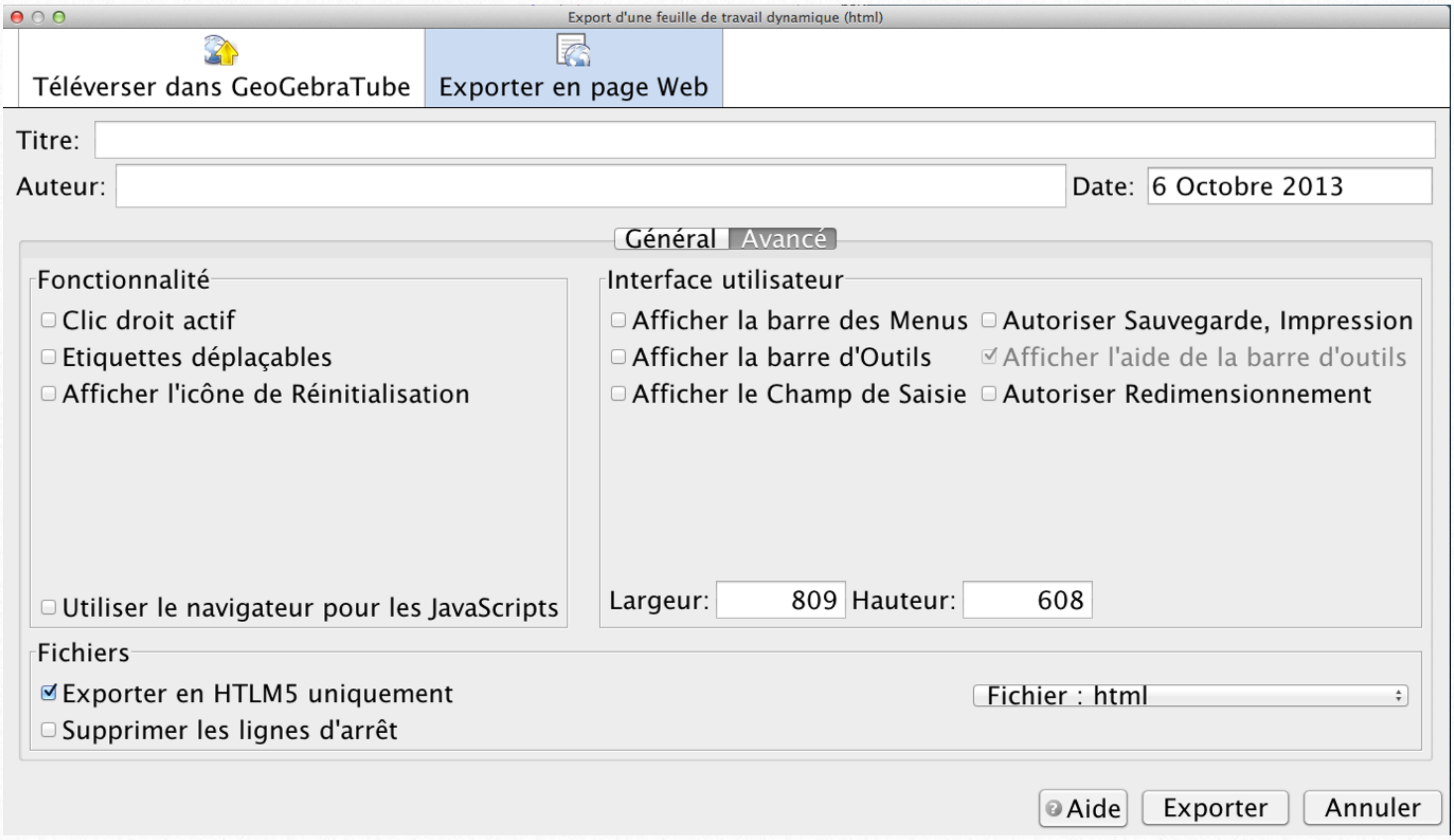


Dans ce court appendice, nous allons expliquer comment insérer une figure *GeoGebra* dans un livre interactif fabriqué avec *iBooks Author*. Notons que la façon de faire que nous allons décrire deviendra un jour obsolète, puisqu'on prévoit que la création automatique de widgets *iBooks Author* fera éventuellement partie des commandes de *GeoGebra*. En attendant, il faut bibouiller un peu...

La première étape est de fabriquer notre figure *GeoGebra*. Nous procédons de la façon habituelle, mais il faut savoir que certaines possibilités ne seront pas prises en compte dans nos livres. Par exemple, à l'heure où j'écris ces lignes, toute la portion relative au calcul formel ne fonctionnera pas dans nos livres interactifs. Il serait vain d'essayer de faire une liste de ce qui fonctionne et qui ne fonctionne pas dans les livres interactifs : les développeurs de *GeoGebraWeb* sont très actifs et produisent de nouvelles versions prenant en compte de nouvelles caractéristiques, à un rythme soutenu.

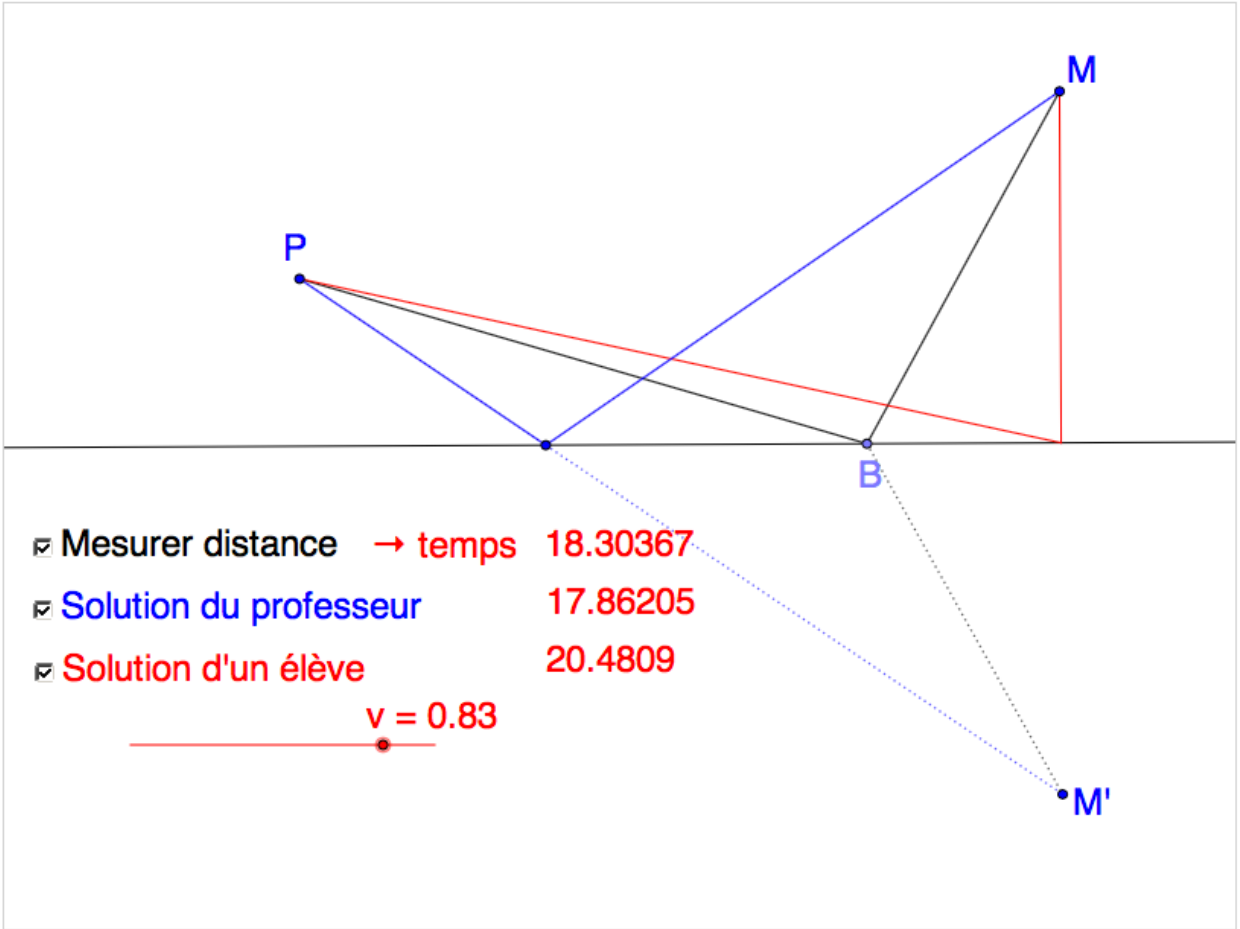
Une fois notre figure complétée, il faut décider des dimensions de la fenêtre qui sera utilisée : sur l'ordinateur, on redimensionne la fenêtre jusqu'à obtenir la vue souhaitée (voir ci-dessous).





Dans *GeoGebra*, on exporte notre figure en tant que page Web, en invoquant le sous-item «Feuille de travail dynamique en page web (html)...» de l'item «Exporter» du menu «Fichier». On choisit alors les caractéristiques désirées (voir ci-dessus), mais il est très important de cocher la case «Exporter en HTML5 uniquement».

Dans le navigateur web, on doit ensuite faire une capture de la portion de l'écran qui sera utilisée dans le livre (voir ci-dessous), que l'on enregistre sous le nom «Default.png». On note ensuite les dimensions de l'image en question : dans notre cas, c'est 893 x 666 pixels.



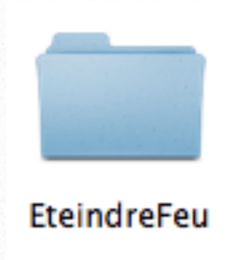
Pour simplifier les choses, il est commode de nommer «main.html» le fichier obtenu par exportation. Veuiller noter que *GeoGebra* a ajouté automatiquement la date et la mention «Créé avec GeoGebra» à la page web, mais nous pouvons éliminer ces mentions ou ajouter de nouveaux éléments (textes, images, liens, etc,) à l'aide d'éditeurs de textes comme *Text Wrangler* ou *Bluefish*, ou d'éditeurs de pages web comme *Blue Griffon*.

Nous avons donc créé une image «Default.png» et une page Web «main.html» à l'aide de notre figure. Il nous reste à créer un dernier ingrédient : un fichier «Info.plist» . Le rôle et le contenu de ce dernier fichier est décrit en suivant le lien suivant. On peut voir ci-dessous le contenu de ce fichier dans notre cas particulier.

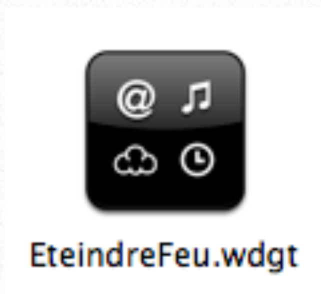
```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<!DOCTYPE plist PUBLIC "-//Apple//DTD PLIST 1.0//EN"
	"http://www.apple.com/DTDs/PropertyList-1.0.dtd">
<plist version="1.0">
<dict>
	<key>Width</key>
	<integer>893</integer>
	<key>Height</key>
	<integer>666</integer>
	<key>MainHTML</key>
	<string>main.html</string>
	<key>CFBundleDevelopmentRegion</key>
	<string>fr_CA</string>
	<key>CFBundleIdentifier</key>
	<string>edu.figure_GeoGebra</string>
	<key>CFBundleName</key>
	<string>iBooks GeoGebra Widget</string>
</dict>
</plist>
```

Soulignons que, si nous avons suivi les conventions ci-dessus pour nommer nos fichiers, nous pourrons à l'avenir conserver le même fichier «Info.plist» pour toutes nos figures GeoGebra, en nous bornant à changer les dimensions de l'image.

La dernière étape est de placer les trois fichiers ci-dessus dans un dossier, que nous nommerons sans utiliser de caractères non-standards, comme des lettres accentuées ou des espaces. Prenons le nom «EteindreFeu», par exemple. Puis, un petit peu de magie : pour créer un widget utilisable dans *iBooks Author* à partir de notre dossier, il suffit d'ajouter le suffixe «.wdgt» à son nom. L'icône initiale



se change alors en



Par la suite, on pourra ouvrir de nouveau ce widget par un clic droit qui affichera un menu local, dans lequel on pourra choisir l'item «Afficher le contenu du paquet».

Finalement, pour placer cette figure interactive dans notre livre, il nous suffira de glisser-déposer le widget correspondant à l'endroit choisi dans *iBooks Author*.

Enfin presque... Tel qu'il est présentement, le widget va chercher sur le web la bibliothèque des programmes nécessaires au bon fonctionnement de la figure *GeoGebra* : il faut donc que le *iPad* sur lequel on consulte notre livre soit relié à internet, ce qui n'est pas toujours le cas.

Comment rendre notre widget autonome du web? Il faudra procéder en deux temps : d'abord aller chercher la bibliothèque des programmes nécessaires et l'ajouter dans notre widget, puis spécifier dans «main.html» d'utiliser cette bibliothèque locale plutôt que celle du web.

La bibliothèque requise se trouve à l'adresse suivante. En fait, il s'agit plutôt de plusieurs versions successives de cette bibliothèque, qui s'enrichit continuellement pour essayer d'implanter pour le Web toutes les possibilités de la version pour ordinateurs de *GeoGebra*. Au moment d'écrire ces lignes, la version la plus récente date du 2 octobre 2013 et est contenue dans «GeoGebraWeb-4.3.43.0.zip». Une fois décompressé, ce fichier nous donne un dossier «GeoGebraWeb-4.3.43.0» contenant un dossier nommé «web» : c'est ce dossier qu'il faudra ajouter au contenu de notre widget. Si nous récapitulons, le dossier/widget «EteindreFeu.wdgt» contient maintenant les fichiers «main.html», «Default.png» et «Info.plist», de même que le dossier «web».

Finalement, pour indiquer d'utiliser la bibliothèque locale, il faut aller changer, dans le code html du fichier «main.html», le fragment src="http://www.geogebra.org/web/4.2/web/web.nocache.js" par le fragment

src="web/web.nocache.js"

Le widget ainsi modifié devrait pouvoir fonctionner correctement même quand le iPad n'a pas accès à l'internet.

Pour aller plus loin ...

La création de widgets HTML fabriqués sans partir de GeoGebra utilise une procédure semblable à celle décrite dans cet appendice.

Il faut alors créer son propre fichier «main.html», auquel peuvent aussi s'ajouter d'autres fichiers (HTML, CSS ou JavaScript).

L'inclusion d'un dossier «web» n'est plus requise car elle est spécifique à *GeoGebra*. Mais il pourra s'avérer nécessaire d'ajouter d'autres bibliothèques de procédures (par exemple, celle de JSXGraph).

Mais ceci est une autre histoire...