Que doit-on connaître du fonctionnement interne de nos outils technologiques ?

Quand nous confions à nos ordinateurs des tâches mathématiques, nous obtenons, la plupart du temps, les résultats escomptés. Mais il arrive parfois que les réponses de la machine soient erronnées, sans qu'aucun signe avant-coureur ne vienne nous signaler le problème. Après avoir examiné quelques exemples de tels phénomènes, nous verrons comment chercher à éviter de tels pièges. Et surtout comment un tandem humain-ordinateur peut arriver à transcender de telles situations.

par André Boileau, UQAM

Plan de la présentation

- Un poisson d'avril datant de 1975
- Les ordinateurs sont imprécis …
- … mais jusqu'à quel point ?
- Certains logiciels sont précis …
- … mais sujets à indécidabilité
- Le mécanisme sous-jacent
- Mais tout n'est pas perdu

Un poisson d'avril datant de 1975

- Martin Gardner, *Scientific American*, avril 1975 :
  $e^{\pi\sqrt{163}}$ est un entier
- Un tableur actuel donne 262537412640768000,00000
- En fait, ce nombre vaut 262537412640768743,99999999999925…
- On sait (thm de Gelfond-Schneider) que ce nombre est transcendant car

$$e^{\pi\sqrt{163}} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i\sqrt{163}} = (-1)^{-i\sqrt{163}}$$

Les ordinateurs sont imprécis...

- Ça (presque) tout le monde le sait
  - Calculs arithmétiques avec précision finie, en format à « virgule flottante »
  - Mais jusqu'où doit-on en connaître les détails ?
- Exemple : comment expliquer le déroulement de cerains calculs avec une calculatrice ?

… mais jusqu'à quel point ?

- Calcul numérique de la limite d'une suite
  - Quelles précautions doit-on prendre quand on calcule en « virgule flottante » ?
- Exemple
  - Tentative de calcul (avec un tableur)
  - En si on change les conditions initiales ?

    $$M_0 = M_1 = 6$$

  - À suivre...

$$M_0 = \frac{11}{2}$$

$$M_1 = \frac{61}{11}$$

$$M_{n+2} = 111 - \frac{1130}{M_{n+1}} + \frac{3000}{M_n M_{n+1}}$$

$$111 - \frac{1130}{6} + \frac{3000}{6 \cdot 6} = \frac{666 - 1130 + 500}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

Certains logiciels sont précis ...

- Systèmes de calcul formel
  (Maple, Mathematica, SAGE, etc.)
  - Calculs symboliques
  - Calcul numérique à précision déterminable
- Le résultat est généralement exact
  (sauf en cas d'erreur de programmation)
- … mais il n'y a pas toujours de réponse

  exemple : $\int \sin\left(e^{x^2} dx\right)$

  [Pourquoi : pas trouvé, ou pas de solution ?]

… mais sujets à indécidabilité

- La plupart des théories mathématiques assez riches sont indécidables : il n'existe pas d'algorithme pour vérifier si un énoncé est vrai ou faux
- Exemple : problème des mots dans le demi-groupe ci-contre (cde=cedb=ecadb=ecdab)
- Les SCF (comme Maple) n'y échappent pas

$$a, b, c, d, e;$$

$$\begin{array}{ll} ac = ca, & ad = da, \\ bc = cb, & bd = db, \\ ce = eca, & de = edb, \\ \multicolumn{2}{c}{cca = ccae} \end{array}$$

Le mécanisme sous-jacent

- Les logiciens ont trouvé une façon systématique de rechercher parmi toutes les preuves possibles
  Théorème de complétude : si l'énoncé est vrai, alors il en existe une preuve formelle
- Mais, si la preuve n'existe pas, il se peut que l'on continue de chercher sans savoir s'arrêter
- Cela s'apparente au *problème de l'arrêt* pour les programmes informatiques : on ne peut dire, pour tout programme, s'il va finir par s'arrêter ou non

Mais tout n'est pas perdu

- De toutes façons, on sait depuis longtemps qu'il n'y a pas de « voie royale » en mathématiques : on doit user d'efforts et de créativité, et le résultat visé n'est pas assuré
- Malgré leurs limitations, les logiciels mathématiques peuvent parfois être très utiles
- Retour sur notre exemple de convergence d'une suite