Les représentations informatiques de situations mathématiques sont parfois surprenantes … et éclairantes

André Boileau

Professeur retraité, UQAM

AMQ, octobre 2016

Résumé

Les mathématiciens ne sont pas toujours capables de se fabriquer des représentations mentales éclairantes sans aucune aide extérieure. Mais ils peuvent parfois bénéficier de l'apport des représentations informatiques: celles-ci peuvent alors grandement contribuer à affiner les intuitions sous-jacentes aux situations mathématiques étudiées. Nous illustrerons ceci par quelques exemples d'intérêt général.

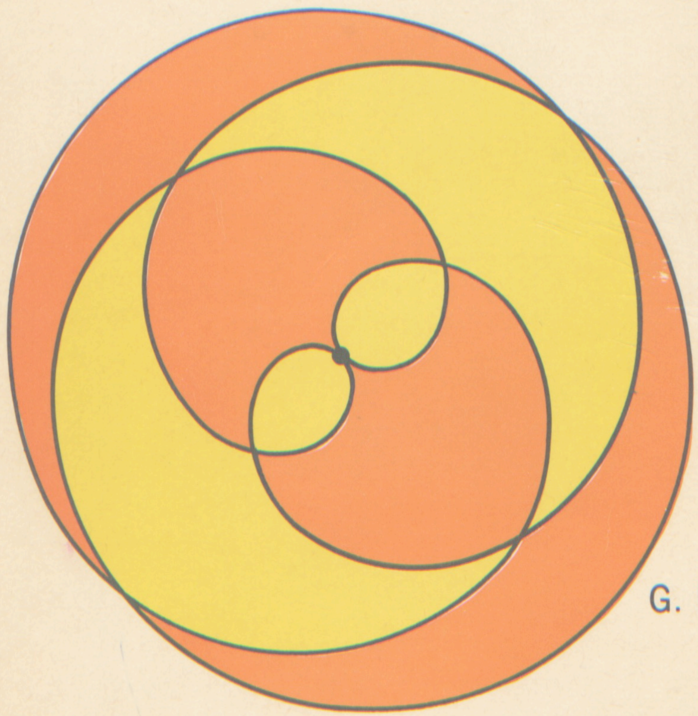
Plan de l'atelier

- Théorème fondamental de l'algèbre :
  de *Gilbert Labelle* à *GeoGebra*
  - Un petit livre remarquable de *Gilbert Labelle*
  - Traitement du *Théorème Fondamental de l'Algèbre* dans ce livre
  - Comment ces graphiques ont été réalisés, à l'époque ?
  - Une version actualisée avec *GeoGebra*
    - Intuition derrière le théorème
    - Recherche approchée des racines
- Petit divertissement avec une vidéo interactive

Plan de l’atelier (suite)

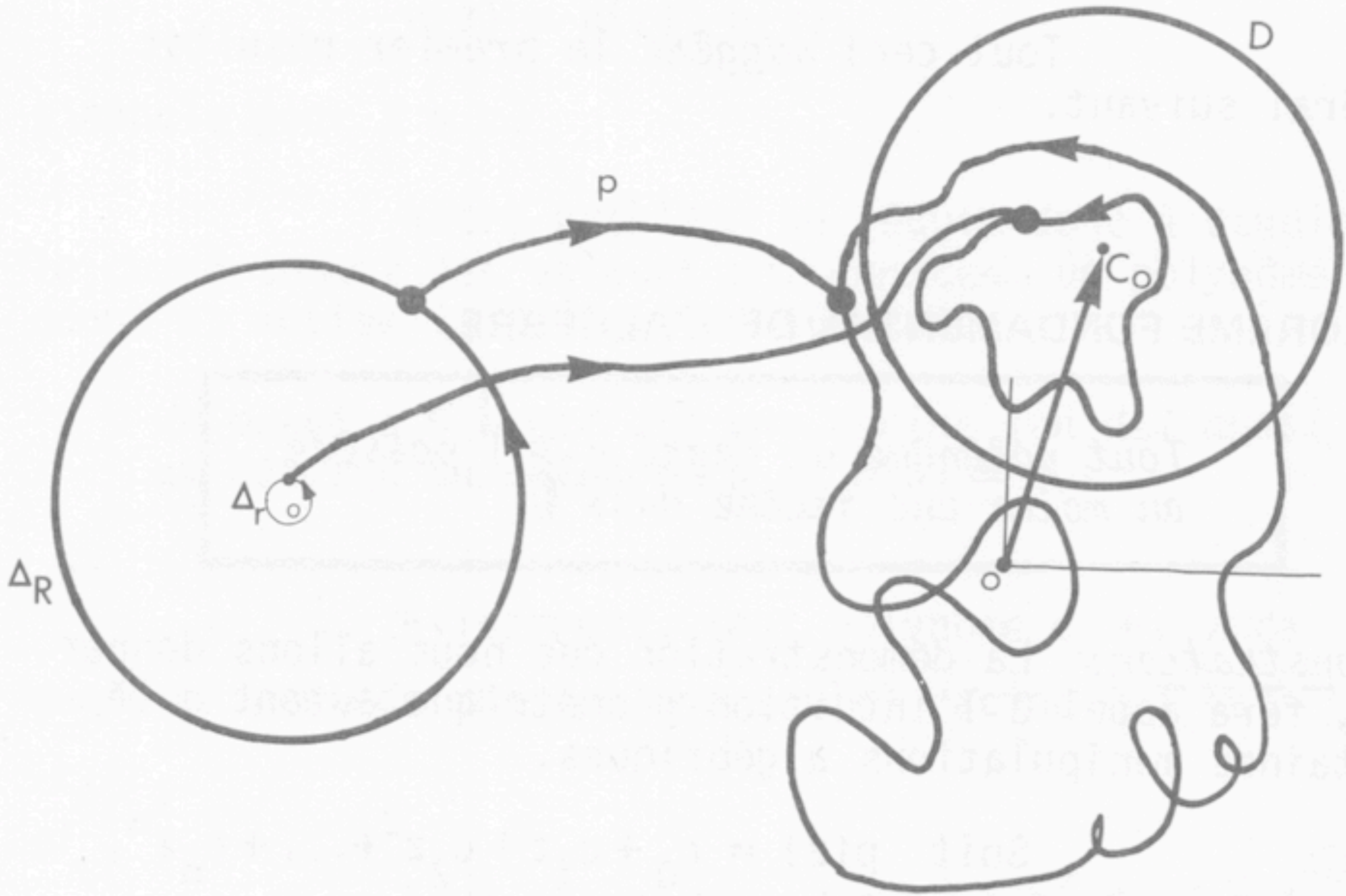
- Le triangle de Sierpinski
  - Un peu d’histoire
  - La description géométrique/topologique “traditionnelle”
  - Première surprise : lien avec le triangle de Pascal
  - Seconde surprise : engendrement avec le jeu du chaos
  - Un mystérieux paradoxe … et sa résolution
- Conclusion / Questions / Discussion

INTRODUCTION aux NOMBRES COMPLEXES et applications

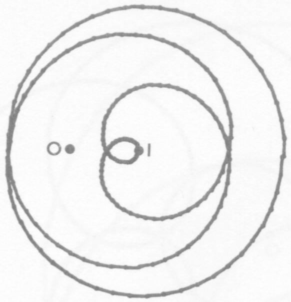


G. Labelle
UQAM

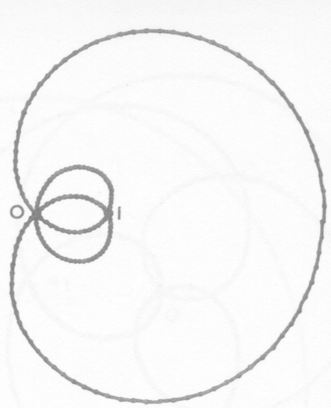
association mathématique du québec



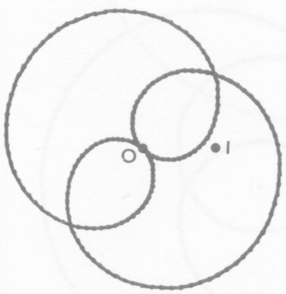
D
p
C_0
Δ_r
o
Δ_R
O



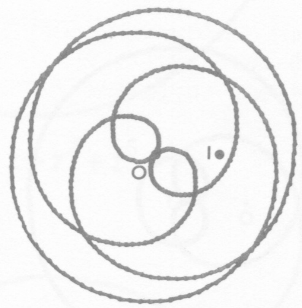
$1 + z^3 + z^4$



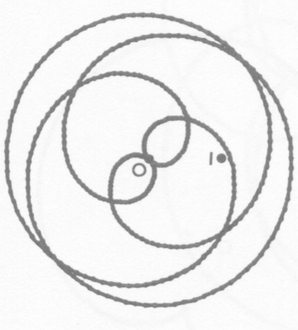
$1 + z + z^2 + z^3$



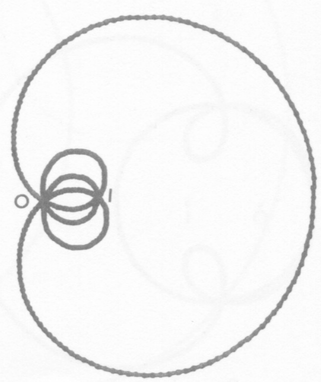
$iz + z^3$



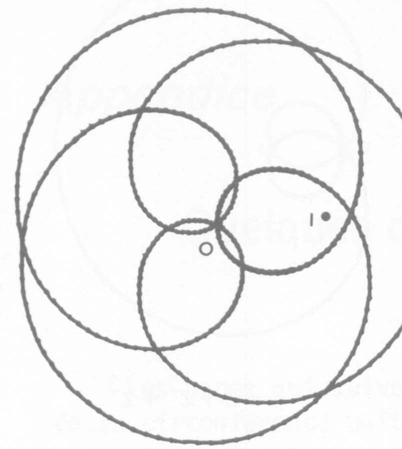
$iz^3 + z^5$



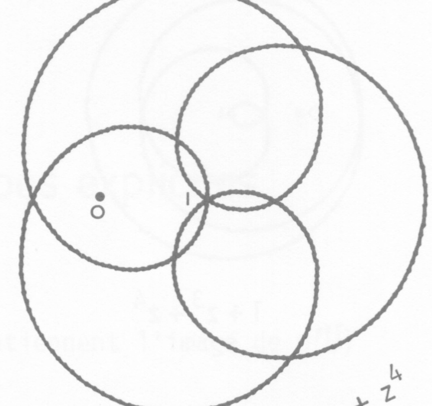
$-iz^3 + z^5$



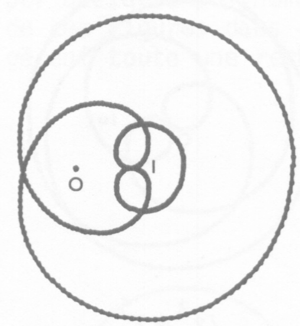
$1 + z + z^2 + z^3 + z^4$



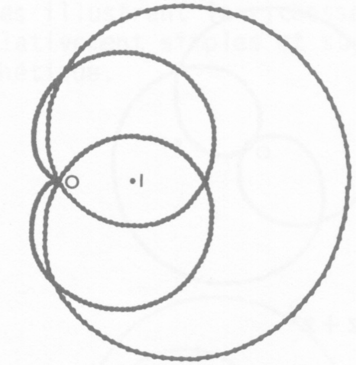
$z^2 + z^5$



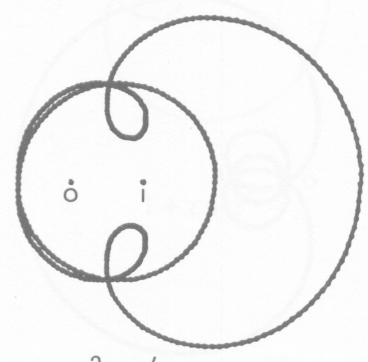
$1 + z + z^4$



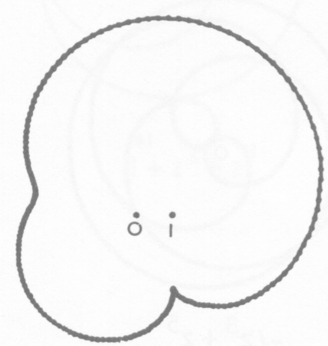
$1 + z^2 + z^3 + z^4$



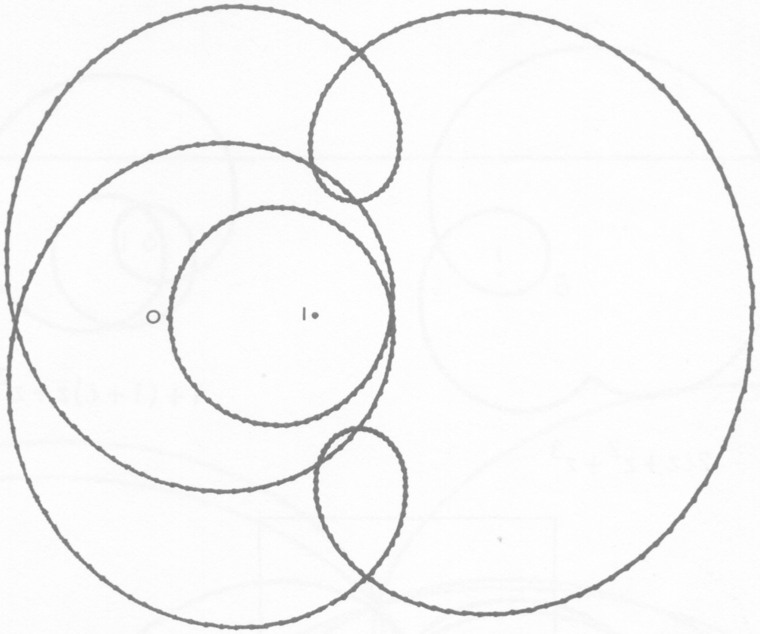
$1 + z + z^3 + z^4$



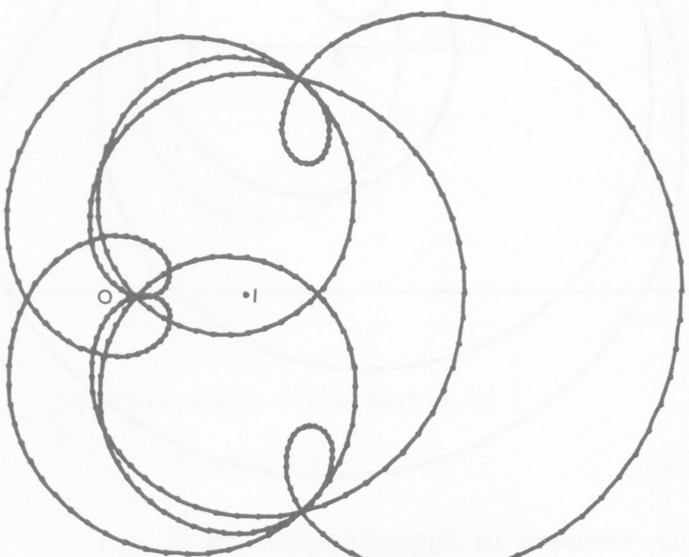
$1 + z + z^2 + z^4$



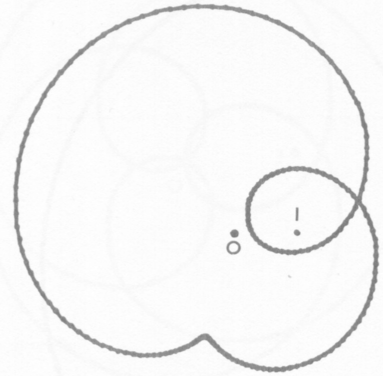
$(2i + 3)z + z^2 + z^3$



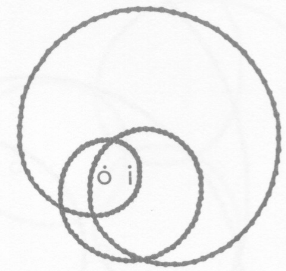
$1+z+z^2+z^5$



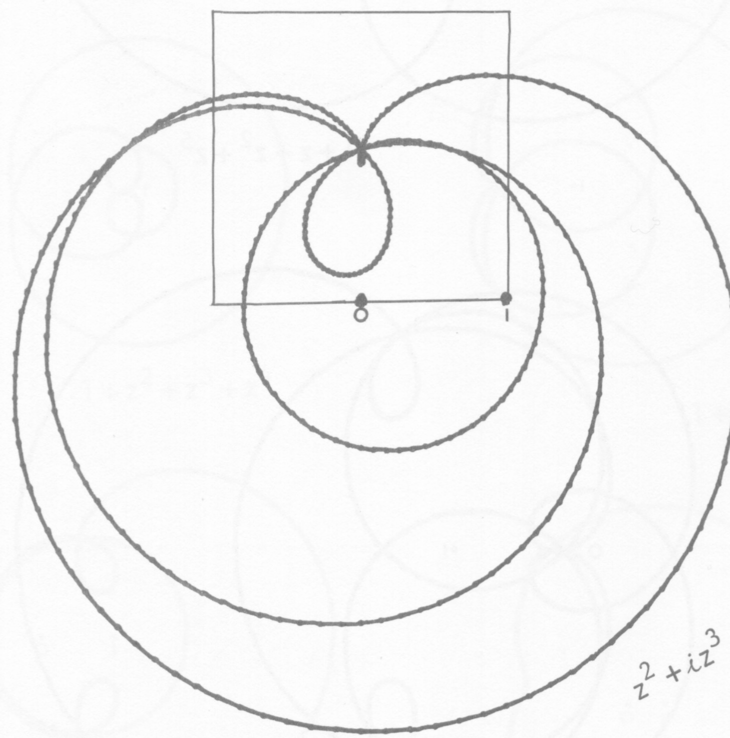
$1+z+z^2+z^4+z^8$



$2iz+z^2+z^3$



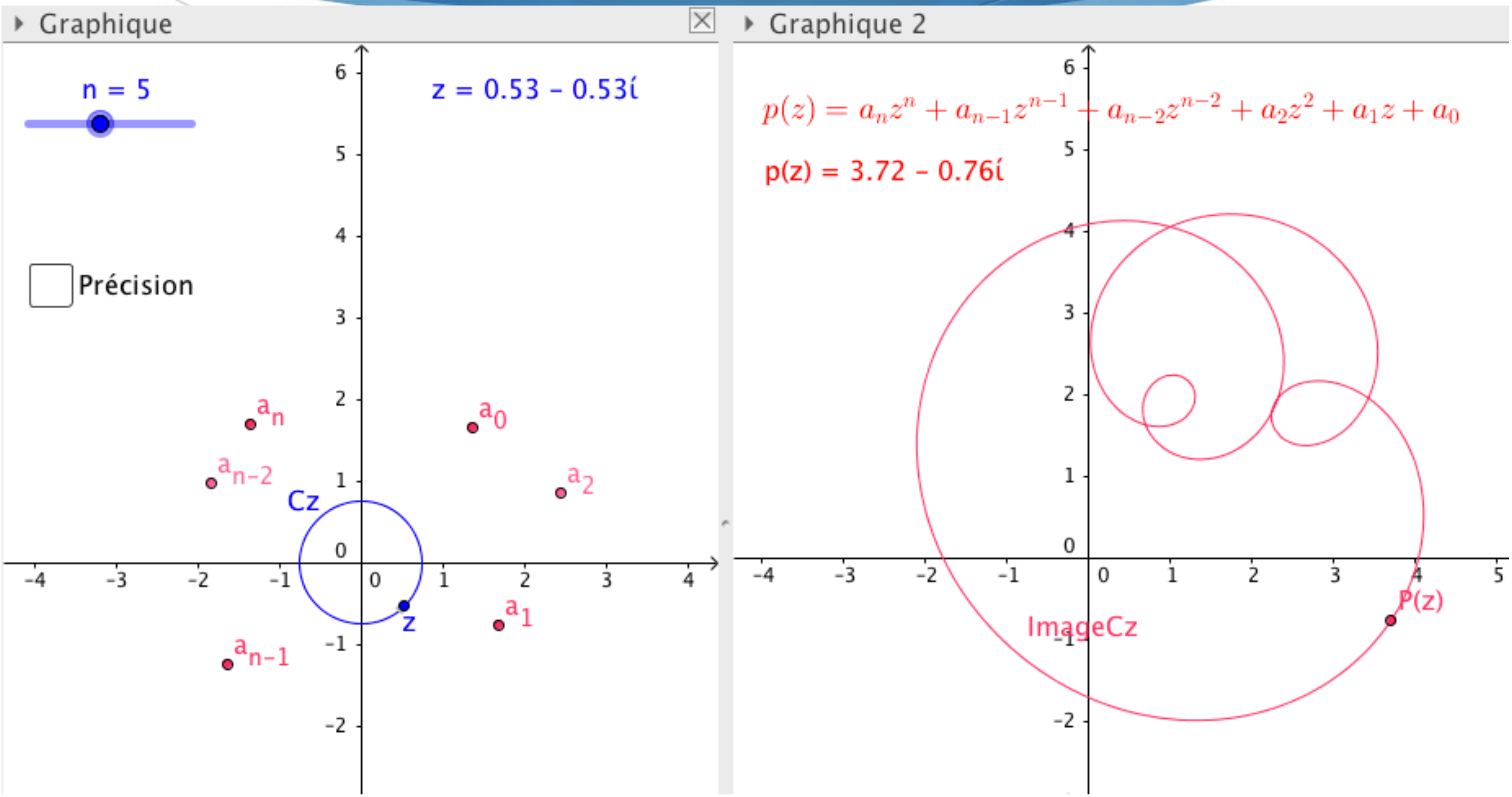
$1+(1+i)z+z^2+2z^3$



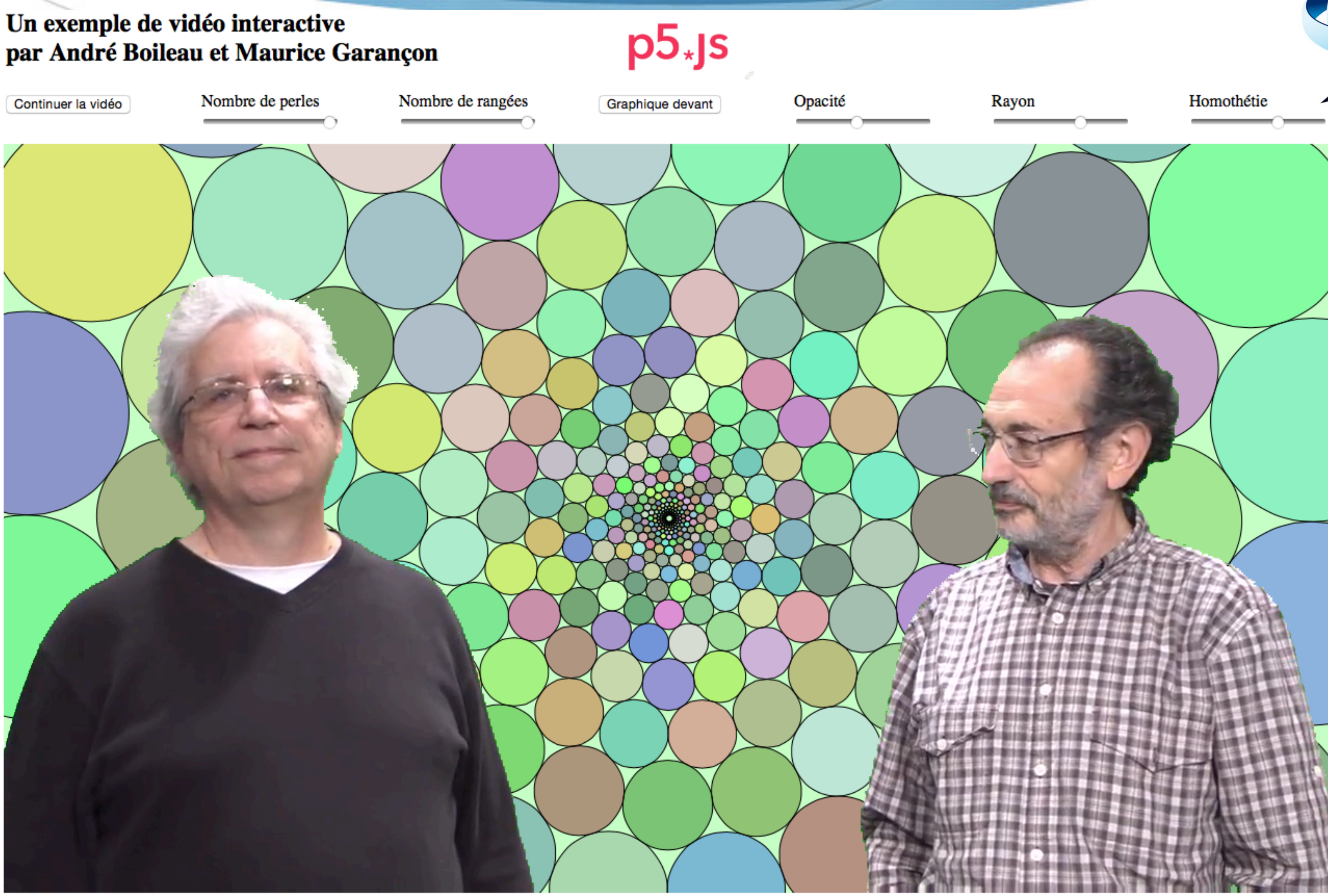
$z^2+iz^3+z^5$

On trouvera un agrandissement de la partie encadrée à la page suivante.

Version GeoGebra



Vidéo interactive avec Maurice Garançon

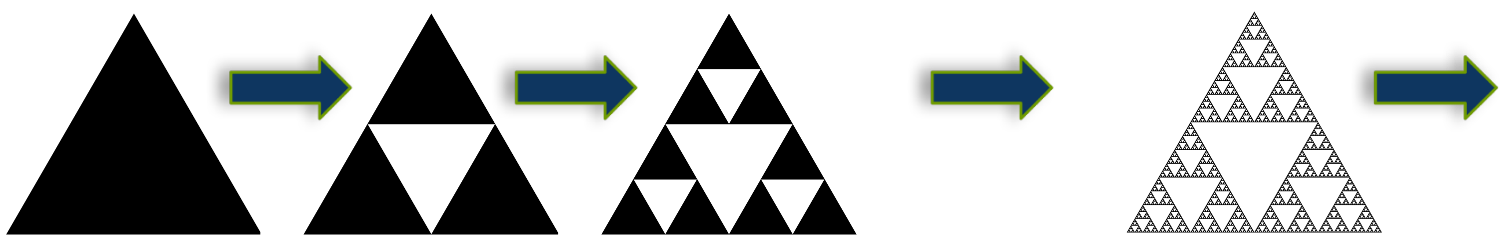


Le triangle de Sierpinski Un peu d'histoire

- Sierpinski voulait donner une caractérisation topologique du continu (l'ensemble des nombres réels, muni de sa topologie habituelle)
- Ce faisant, il a découvert plusieurs exemples d'espaces topologiques avec des propriétés surprenantes, dont le triangle dit "de Sierpinski", en 1915
- Exemple de propriété surprenante (à l'époque) :
sa dimension (de Hausdorff) est de $log_2(3)$

Le triangle de Sierpinski
Description traditionnelle

- Partir d'un triangle équilatéral (en noir)
- Lui enlever l'intérieur du triangle blanc
- Continuer récursivement avec les triangles noirs restants
- Passer à la limite



Le triangle de Sierpinski
Lien avec le triangle de Pascal

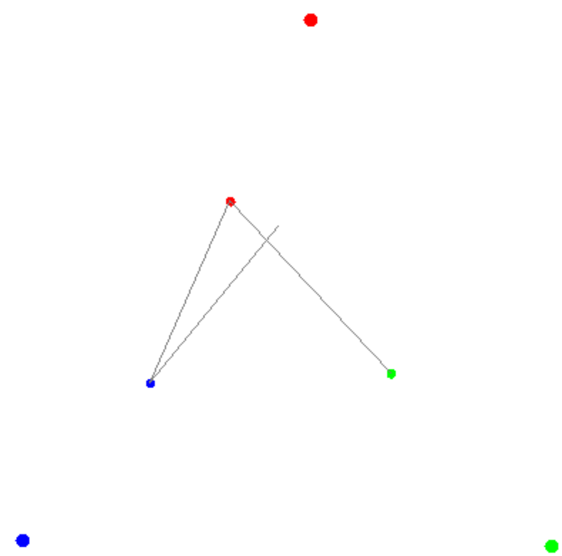
```
    1
   1 1
  1 2 1
 1 3 3 1
1 4 6 4 1
```

```
    1
   1 1
  1 0 1
 1 1 1 1
1 0 0 0 1
```

```
    1
   1 1
  1 0 1
 1 1 1 1
1 0 0 0 1
```

Le triangle de Sierpinski
Le jeu du chaos

- On part d'un point donné, qui devient notre point courant
- On choisit au hasard un sommet du triangle et on va à mi-chemin entre le point courant et le sommet choisi: ceci devient notre nouveau point courant (ici: point bleu)
- On itère le processus (ici: point rouge, puis vert, puis …)



Le triangle de Sierpinski Un paradoxe … et sa clé

- Paradoxe
  - Quand le point initial (gros point noir) du jeu du chaos n’appartient pas au triangle de Sierpinski, alors tous les points engendrés n’appartiennent pas au triangle en question
  - Pourtant, on semble obtenir la figure correcte (approchée)

Le triangle de Sierpinski Un paradoxe … et sa clé

- Solution

Si P_0, P_1, … , P_n, … sont les points engendrés par le « jeu du chaos », et si on définit les ensembles

$$\mathcal{E}_n = \{P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, \ldots\}$$

alors on a que la suite des ensembles $\mathcal{E}_n$ tend vers le triangle de Sierpinski avec une probabilité égale à 1.