Informatique et enseignement des mathématiques

Les ordinateurs et l'informatique ont connu un développement explosif en cette deuxième moitié du XX^{e} siècle. De la machine de Von Neumann gourmande en énergie à l'ordinateur personnel puissant et maniable, capable de s'intégrer à un réseau, l'évolution semble fantastique. Elle est pourtant très récente.
Les mathématiciens, certains d'entre eux au moins (Von Neumann, Turing,...), ont été des acteurs de cette création, à côté d'autres spécialistes. Aujourd'hui l'impact de l'informatique dans la société s'amplifie encore avec l'Internet. Les enjeux économiques annoncés sont énormes.
Dans le même temps, les mathématiques sont partout présentes dans la vie courante : traitement des données, statistique, codage, compression de données, simulation numérique,... Mais cette présence qui se renforce, est souvent occultée aux yeux du public qui ne voit que le produit fini.
L'enseignement des mathématiques au Lycée et à l'Université peut-il rester à l'écart de ce mouvement ? Tentons d'articuler quelques éléments de réponse autour de trois questions :

1) Pourquoi introduire une part d'informatique dans l'enseignement des sciences mathématiques et dans la formation des maîtres ?
2) Comment faire évoluer les programmes pour accompagner cette évolution ?
3) Quels professeurs ?

Nous n'avons pas abordé dans ce document tous les aspects de l'activité informatique ou mathématique et toutes les interactions possibles. En particulier, nous ne traitons pas de l'utilisation pédagogique de logiciels spécialisés dans l'enseignement des mathématiques.

1 Pourquoi introduire une part d'informatique dans l'enseignement des sciences mathématiques et dans la formation des maîtres ?

L'esprit algorithmique La plupart des machines, ordinateurs ou robots, fonctionnent avec des programmes qui agencent la succession désirée de tâches élémentaires. Ces programmes mettent en jeu des algorithmes traduits en langage compréhensible par la machine.
Programmes et algorithmes sont partout, certains très simples (digicode, répondeur téléphonique), d'autres plus complexes ou invisibles pour l'utilisateur (codage et décodage de l'information numérique, cartes bancaires, réseaux téléphoniques,...). Ces algorithmes, même les plus simples, mettent en jeu des structures de données comme les arbres ou les graphes dont les sommets représentent les différents états du système en fonctionnement. De même que chaque individu est plus ou moins familier avec l'espace qui l'entoure et capable de s'y repérer, de s'y mouvoir, d'en concevoir la globalité et le détail, ce même individu se repère, se déplace, utilise ces structures et rend compte de leur utilisation avec plus ou moins de familiarité.
L'analogie avec la perception de l'espace n'est pas fortuite puisque les graphes, les arbres sont symbolisés par des diagrammes.
Décomposer une tâche complexe en tâches élémentaires, reconnaître les tâches qui se répètent ou qui ont été déjà traitées, estimer la durée du processus, sans oublier de vérifier que la succession d'opérations élémentaires produit bien le résultat escompté : c'est la démarche de celui qui écrit un programme, c'est aussi celle de tout être rationnel.
Dans l'enseignement l'esprit algorithmique se manifeste assez tôt comme objet d'enseignement, par exemple lors de la résolution des premiers problèmes "d'arithmétique élémentaire" comportant plusieurs "calculs" ; par la suite, il accompagne les résolutions et les démonstrations mathématiques à tous les niveaux. Les solutions sont traditionnellement présentées sous forme de "raisonnements" à l'école primaire, mais qui n'ont pas de statut solide par la suite, de sorte que leur formulation tend à disparaître, même aux niveaux supérieurs. Ces solutions pourraient être plus commodément cherchées, étudiées, établies, explicitées, apprises et enseignées grâce à un usage concerté (au moins reconnu tout au long de la scolarité) des instruments de l'algorithmique.

Un raisonnement formalisé dans un univers défini. Pour le public, les mathématiques sont un monde où les assertions sont justes ou fausses. On

sait qu'il n'est pas toujours facile de décider si une démonstration donnée est correcte, ou plus simplement, de convaincre tel élève que le niveau de détail exigé en troisième n'est plus nécessaire en première (cf. le développement sur les divers *niveaux de démonstration* dans le préambule du nouveau programme de première).
Il n'est pas toujours simple de codifier toutes les règles en vigueur, ni de donner la liste exhaustive des règles d'inférence disponibles à un instant donné.
L'écriture d'un programme informatique est l'occasion d'appliquer des règles logiques absolues dans un univers clairement défini et limité. Écrire un "programme qui marche" récompense de ses efforts de réflexion, d'analyse et de synthèse.
Cela ne dispense pas de s'assurer que l'algorithme termine dans tous les cas envisagés et qu'il le fait en temps raisonnable. Cette étape est une démonstration mathématique.

Calculabilité, effectivité. En guise d'introduction à ce paragraphe, citons deux extraits de préfaces d'auteurs à des livres récents :
"Depuis leurs origines, l'algèbre et l'arithmétique mêlent deux traditions théorique et pratique, que l'on peut symboliser par les noms d'Eudoxe et de Diophante, bien que leurs origines soient sûrement bien antérieures. Et de toujours y a été présente de façon confuse la distinction entre calculs théoriquement possibles et calculs effectivement réalisables. Mais ce n'est que récemment, dans le double développement des théories de la complexité et des outils informatiques, que les idées se sont éclaircies, que des énoncés précis ont pu être formulés et que des applications souvent spectaculaires ont été développées. " (Michel Demazure, Préface au *Cours d'algèbre*).
"Résultats effectifs et algorithmes sont aussi anciens que les mathématiques [...]. Point n'est donc besoin d'alléguer l'informatique pour parler d'effectivité. Cependant, en modifiant radicalement le champ des phénomènes accessibles à une approche expérimentale, cette dernière contribue à (re)mettre l'accent sur les résultats mathématiques de nature effective.
Par essence l'informatique est effective, puisqu'un ordinateur ne peut manipuler que des objets complètement explicites. Les liens entre effectivité et informatique sont si essentiels qu'il est aujourd'hui commode de partir de l'intuition informatique pour définir comme effectif tout résultat ou méthode qui puisse se transcrire en un programme informatique. Une telle définition nécessite une élaboration qui la libère des contingences et la pérennise, mais d'ores et déjà, elle permet de proposer comme réponse à la question "quelles

sont les structures mathématiques de l'informatique ?" le principe que les mathématiques de l'informatique sont la ou les théories de l'effectivité et du calcul" (Patrick Dehornoy, Préface à *Mathématiques de l'informatique*).

L'informatique et les autres sciences L'utilisation de l'informatique et des ordinateurs est centrée autour des deux aspects constitutifs (et inséparables) de l'informatique : calcul et traitement des données.
Le traitement des données : que ce soit dans les domaines de la météorologie, de l'océanographie, de la géologie, de l'économie, de la médecine..., les capteurs réunissent un flot de données qu'il faut transmettre, trier, visualiser...
À partir d'un modèle mathématique, on tente de simuler le comportement d'un système complexe : c'est le domaine du calcul scientifique (numérique et symbolique). Nous y reviendrons au paragraphe suivant.
On utilise parfois aussi un processeur numérique comme un calculateur analogique.
En biologie, le gène est vu comme le texte d'un programme dont l'exécution réalise, par exemple, la synthèse d'une protéine.
J.-L. Krivine voit dans l'exécution de programmes compilés une métaphore du fonctionnement du cerveau humain (cf. *Mathématique des programmes et programme des mathématiques* dans le colloque *La seconde vie de la logique mathématique*, ENS, 1992).

Étant donné le sujet de réflexion de la commission, nous avons réservé une place particulière à l'examen des interactions entre informatique et mathématique et, plus particulièrement, à l'influence de l'apparition et du développement des ordinateurs sur les mathématiques en train de se faire.

Quels changements dans les mathématiques ?

Il ne s'agit pas ici de donner un tableau exhaustif, mais de mettre en avant quelques exemples.

L'ordinateur a permis, par sa puissance de calcul, d'aborder certains objets sous un jour nouveau

Un exemple célèbre est celui des ensembles fractals, que Julia et Fatou avaient étudiés, mais sur lesquels ils n'avaient pu faire certaines conjectures, faute de les avoir *vus*. Plus généralement, les simulations d'équations différentielles ont permis de découvrir des attracteurs (étranges parfois).
Les simulations numériques du comportement des solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) permettent d'avoir une idée de ces solutions, de

leurs singularités. L'extrême difficulté de l'étude théorique des EDP rend indispensable la simulation numérique qui prend quelquefois la place ou précède l'expérimentation physique.
L'ordinateur rend possible le traitement de données statistiques en vraie grandeur.
En arithmétique l'ordinateur permet de tester certaines conjectures, de calculer la position des zéros de la fonction ζ de Riemann (pas tous, hélas !).
Faut-il également citer la preuve " par ordinateur" du théorème des quatre couleurs ? il s'agissait de vérifier un nombre fini de cas, non couverts par l'argument général, ce qui fut fait avec l'aide d'une machine.
Les systèmes de calcul formel traitent des groupes finis, des anneaux de polynômes, des algèbres différentielles. Peu de domaines des mathématiques échappent à l'expérimentation sur machine, qui permet souvent d'aller un cran plus loin que le papier-crayon, et qui fournit également visualisations et animations.
Les logiciels, comme beaucoup d'outils de la recherche scientifique, ont été souvent créés ou améliorés par les chercheurs. De ce fait, certains d'entre eux sont libres de droits d'auteurs.

Le traitement par ordinateur pose de nouvelles questions et permet de revisiter certains domaines

Les ordinateurs sont-ils des êtres qui parlent mathématique (S. Papert cité par Lynn. A. Steen) ou des mathématiques incarnées (J. Bolter) ?
Une des notions revisitées depuis l'apparition des ordinateurs est celle de calculabilité (ou de récursivité suivant la thèse de Church). Les ordinateurs manipulent des objets finis, ou du moins définissables à partir d'un nombre fini de données.
Les nombres réels n'échappent pas à ce réexamen : pour un exemple récent et significatif (parmi beaucoup d'autres) on pourra lire le texte de Maxime Kontsevich : *Periods*, (Journée SMF, juin 1999). Comment calculer exactement avec des nombres réels ? ou plutôt avec quels nombres réels peut-on faire des calculs exacts ?
Les polynômes semblent faciles à décrire : la liste de leur coefficients y suffit. Cependant, si cette liste comporte de nombreux zéros (on dit que le polynôme est creux ; Hovansky préfère le joli mot de *fewnomials*), il peut être intéressant de ne manipuler que les termes non nuls. Cette remarque d'apparence anodine a conduit au développement d'une théorie riche, qui s'appuie sur des travaux existants, mais en les amplifiant (Gelfand et ses élèves).

Le calcul matriciel devient coûteux dès que la taille des matrices devient importante. On appelle *matrices creuses* des matrices dont beaucoup de coefficients sont nuls. On a développé des algorithmes de calcul rapide spécifiques à ce type de matrices.
Plus généralement on assiste à une vaste entreprise qui touche tous les domaines des mathématiques et pose la question : comment calculer effectivement ? On retrouve des préoccupations antérieures (logiques intuitionnistes ou constructivistes) mais qui se trouvent mises au premier plan par l'usage des machines.
Certains domaines des mathématiques trouvent des applications inattendues jusque là : donnons quelques exemples.
Les codes correcteurs d'erreurs sont très utilisés dans le monde de la communication : on sait que les meilleurs (ceux qui corrigent le plus d'erreurs) sont construits à l'aide de courbes algébriques (sur des corps finis qui plus est). La théorie existait dans ce cas-là, prête à servir, mais construire un bon code demande de trouver des courbes avec de nombreux "points rationnels", ce qui est un problème difficile.
L'image photographique ne conserve pas, en général, les proportions de la scène photographiée. En revanche elle conserve les invariants projectifs comme le birapport de quatre points alignés : les spécialistes de vision par ordinateur (notamment O. Faugeras) ont revisité ce domaine de la géométrie classique.
Les travaux de P.L. Lions et J.M. Morel caractérisent certains opérateurs différentiels utiles en reconstruction d'image à partir de leur invariance sous un groupe de transformations (affines par exemple).
Pour évaluer la complexité moyenne d'un algorithme, on utilise les propriétés des fonctions analytiques d'une variable (cf. P. Flajolet).

L'essor des mathématiques discrètes, de la logique appliquée, de l'algorithmique

Il s'agit ici des "mathématiques pour l'informatique". La distinction avec le paragraphe précédent peut sembler artificielle : elle n'a d'autre but que de clarifier l'exposé.
Parler d'essor ne semble pas exagéré : on en veut pour preuve tangible l'existence d'une unité propre du CNRS consacrée à ces thèmes à Marseille et celle de nombreux projets de l'INRIA (PRISME, ALGO,...) pour se limiter à la France.
La vérification et la preuve de programme est un problème dont on connaît l'importance et la difficulté (Ariane 5). Certains logiciens s'y attaquent.

Les mathématiques discrètes :
J.D. Boissonnat nous a montré les beautés de la géométrie algorithmique : manipuler des triangulations ou des maillages, découvrir ceux qui sont optimaux, imaginer des algorithmes rapides pour les construire. La recherche d'un algorithme rapide pour trouver l'enveloppe convexe d'un nuage de points dans l'espace à trois dimensions est un problème d'actualité.
La théorie des graphes et ses applications à l'étude des réseaux d'interconnexion.
L'étude des systèmes dynamiques discrets.
L'utilisation et la conception d'algorithmes est partout.
L'étude de leur complexité est devenue une branche à part entière : il est évidemment crucial de savoir si un algorithme qui termine a une chance de le faire au bout d'un temps raisonnable, au moins pour la plupart des entrées. Mais ce qui peut être une gène dans certains cas peut se révéler utile dans d'autres. C'est une source de recherches originales : pour bien la cerner, donnons l'exemple de la factorisation des entiers. La complexité élevée des algorithmes connus de factorisation d'entiers devient une garantie. Elle permet de préserver un secret (celui de l'existence d'un facteur non trivial). D'où l'activité importante autour de la recherche de grands nombres premiers ou de tests de primalité (applications aux codes RSA).

La vie des mathématiciens change

Les scientifiques utilisent les bases de données bibliographiques à travers le réseau : on peut dire que leur accès rapide transforme l'activité scientifique. Les prépublications sont immédiatement disponibles. La communication se fait en temps réel avec le courrier électronique. Les mathématiciens (avec les physiciens théoriciens) ont souvent été parmi les précurseurs en la matière. Les traitements de texte et les éditeurs de formules raccourcissent la chaîne de l'édition scientifique.
La banalisation des outils graphiques rend accessible le résultat de simulations complexes. L'utilisation de systèmes de calcul symbolique et scientifique est courante.
En bref, l'ordinateur est devenu un outil indispensable sur le bureau d'un mathématicien.

2 Comment faire évoluer les programmes ?

2.1 État des lieux

Dans son exposé devant la commission, Hélène Gispert a bien montré comment les réformes successives de l'enseignement des mathématiques ont été sous-tendues par la question fondamentale suivante, source de beaucoup de tensions : les mathématiques que l'on veut enseigner relèvent-elles d'un enseignement de culture ou d'un enseignement pratique ?
Elle a aussi montré que souvent, l'impréparation des acteurs du système scolaire (enseignants, parents, ingénieurs,...) avait fait capoter les réformes ou les avait vidées de leur contenu. Par impréparation il ne faut pas entendre incompétence ; mais y voir plutôt la traduction d'une action volontariste des gouvernants souhaitant - souvent à juste titre - changer le système éducatif. Par exemple, la réforme proposée par la commission Lichnérowicz était la première réforme de fond des programmes de mathématiques depuis 1905-06. On peut penser que s'était établie, dans l'ensemble de la société, l'idée que les mathématiques enseignées à l'école et au lycée formaient un corpus immuable. On a pu alors mesurer l'incompréhension, les résistances, les décalages chez les parents d'élèves, les enseignants de tous les niveaux, les formateurs, les ingénieurs, le public... On a vu fleurir des qualificatifs étonnants accolés aux mathématiques : traditionnelles, modernes (ils ont encore aujourd'hui une grande charge émotionnelle).
On a ensuite assisté à des corrections successives de la réforme initiée dans les années 60, corrections dont l'ampleur cumulée est énorme même si on a parfois du mal à en percevoir le projet global. S'agit-il de réduire la part des mathématiques et de promouvoir les sciences expérimentales ? S'agit-il de tempérer une formalisation excessive ? S'agit-il de renforcer le côté pratique de l'enseignement des mathématiques ?

Le champ de l'enseignement des mathématiques s'est rétréci : S'il est difficile de percevoir le projet ou les intentions réelles de ces corrections et de les isoler de l'évolution générale du système éducatif, on peut cependant constater que le champ couvert par l'enseignement des mathématiques est - paradoxalement - plus étroit qu'il ne l'était au début du siècle et qu'il ne l'est ailleurs en Europe. En Angleterre, par exemple : le chapitre *Mechanics, (A level)* du cours de mathématiques est considéré en France comme une partie du cours de physique : lois de Newton, forces, moments, énergie... Sans doute Isaac Newton était-il anglais !
Les physiciens et plus généralement les enseignants de sciences expérimenta-

les au Lycée ou à l'Université qui fustigent volontiers le formalisme excessif dont font preuve, selon eux, les mathématiciens “coupeurs d'epsilon en quatre”, regrettent dans le même temps les lacunes de leurs étudiants dans deux domaines : géométrie et logique élémentaire.
Le lien avec les autres sciences est particulièrement important. D'abord parce que ce lien est essentiel, nécessaire à la fois aux mathématiques et aux sciences de la matière, sciences de la vie ou sciences humaines. Ce lien est aussi un enjeu idéologique puisqu'il est le lieu où se définit l'autonomie de chacune des sciences ou disciplines. Au cours de l'histoire, les périodes de mise au point, de rédaction de grands traités de mathématiques (Euclide, Bourbaki) ont été des moments où l'accent était mis naturellement sur l'autonomie et la dynamique interne des mathématiques. Au contraire, dans les périodes plus foisonnantes, l'interdépendance avec la physique et les autres sciences apparaissait davantage.
Cette dualité est présente à chaque instant : V. Arnol'd parle des mathématiques comme de la partie de la physique où les expériences coûtent le moins cher, tandis que le préambule aux nouveaux programmes de seconde dresse un panorama avec de nombreuses interactions entre géologie, biologie, chimie et physique, et à côté, avec leur développement propre, les mathématiques, sans lien évident avec les sciences expérimentales.
Les cursus du second cycle universitaire à dominante mathématique (ceux que suivent les futurs enseignants de mathématiques) ne comprennent plus d'enseignement de physique. Dans le même temps, les certificats de *Méthodes mathématiques de la physique* ont disparu. Dans plusieurs universités, des formations mixtes mathématiques-informatique ont été créées et des unités d'algorithmique et programmation font partie intégrante des licences de mathématiques. À cet égard, le contenu des épreuves des concours de recrutement n'est pas indifférent. Il incite à la création de filières adaptées.

2.2 Une distinction fondamentale.

Comme le fait Philippe Flajolet dans un texte adressé à la commission, il nous paraît important, à ce stade de distinguer clairement

- l'utilisation des ordinateurs et calculatrices et des logiciels qui y sont implantés, d'une part et
- l'apprentissage des concepts de base de l'algorithmique et de la programmation, d'autre part.

L'usage des ordinateurs et des calculatrices se répand dans l'enseignement. Les principaux types de logiciels utilisés sont les traceurs de courbes et plus généralement les logiciels de visualisation, les logiciels de géométrie dynamique, les systèmes de calcul symbolique, les logiciels de traitement de données statistiques. Ils sont souvent des adaptations de logiciels conçus pour la recherche ou l'industrie. Les fabricants et les éditeurs développent des interfaces destinées à l'enseignement en essayant de répondre aux attentes des enseignants et des élèves. On arrive ainsi à une sophistication élevée : une inflation du nombre de commandes[1] au statut pas toujours explicite (qui fait quoi ?).

L'enseignant peut montrer, faire découvrir, et bien sûr susciter la réflexion sur les objets mathématiques grâce à ces logiciels. L'enseignement des mathématiques trouve là de nouveaux moyens et méthodes, de nouvelles images.

Mais comment raisonnablement penser que l'on peut se dispenser d'un apprentissage et d'une pratique des concepts de base de l'algorithmique et de la programmation ? Les professeurs de mathématiques ont toujours expliqué à leurs élèves des concepts simples, avec des prémisses clairement posés et des règles peu nombreuses. Comme le disait un récent lauréat du prix d'Alembert des lycéens " en mathématiques, on peut prouver au professeur qu'il se trompe ".

Cependant, et alors qu'on pouvait penser que ce sont les notions les plus proches des mathématiques, les concepts fondamentaux et universels à la base de l'informatique ne sont pas enseignés.

Il y a de multiples raisons à cela qu'il faudrait analyser : hésitation devant l'évolution rapide des langages, diversité des implantations, difficulté à dégager ce qui est fondamental et universel.

Pourtant les rapports et avis ne manquent pas : en particulier, celui établi par la Commission internationale pour l'enseignement des mathématiques (CIEM), révisé en 1992 et publié sous l'égide de l'UNESCO, est très clair. Il n'est pas suivi d'effet.

Il nous semble illusoire de penser que la convivialité des logiciels mathématiques rendra un jour inutile l'apprentissage des notions de base d'algorithmique et programmation. Pour que l'élève et l'enseignant aient une attitude active et imaginative, ils ne peuvent s'en remettre pieds et poings liés au fabricant de la machine ou à l'éditeur de logiciels.

Est-ce que les notions en cause sont plus difficiles ? Si elles sont plus fondamentales, elles n'en sont pas plus complexes. Tout système de calcul ou de visualisation a son propre langage de programmation, caché ou apparent.

[1]Un éditeur de logiciels de calcul symbolique pour calculatrices présentait récemment une "nouvelle" fonction permettant d'additionner deux équations linéaires et de multiplier une telle équation linéaire par une constante. Le logiciel avait déjà dans sa bibliothèque les principales fonctions du calcul matriciel et celles du calcul sur les polynômes.

La représentation interne des objets (les structures de données) est importante et pas toujours conforme à la façon dont ils apparaissent dans le cours de l'enseignement (penser par exemple à l'expression $\frac{1}{x}$: pour le système de calcul symbolique, c'est une fraction rationnelle. La question de la division par zéro n'intervient que si on tente d'évaluer l'expression en $x = 0$).
Les commandes elles-mêmes exécutent des algorithmes qui ne sont pas toujours ceux que l'on imagine, par exemple toutes celles qui prétendent "simplifier" une expression. L'enseignant se trouve placé dans une situation qui n'est pas habituelle pour lui : ne pas pouvoir expliquer ce qui se passe réellement (parce que l'explication est inaccessible à l'étudiant, ou parce qu'il ne la connaît pas, ou parce qu'elle dépend de la façon particulière dont fonctionne telle implantation du logiciel).
Une remarque : les programmes de mathématiques des années 90 stipulent que l'élève devra maîtriser l'usage d'une calculatrice scientifique (seconde et première) et d'une calculatrice programmable (terminale). Si cette requête est affichée dans l'introduction du document, il n'en est plus fait mention dans l'évocation des contenus et des activités. Comment le législateur imaginait-il cet apprentissage ? Il est peut-être temps de faire entrer ce souhait dans les faits en s'en donnant les moyens.

2.3 Quels contenus ?

En nous basant sur ce que nous avons rapidement dégagé à propos de la recherche mathématique et de l'enseignement actuel, tentons de formuler quelques propositions pour une évolution raisonnée de l'enseignement des sciences mathématiques.

La puissance de calcul des machines permet de nouvelles expériences.

Les calculatrices sont dans (presque) tous les cartables et leurs performances sont étonnantes. Elles manient désormais le calcul symbolique. Elles factorisent, dérivent, intègrent, trouvent des développements de Taylor. Elles tracent les graphes, permettent de construire des figures géométriques planes. Elles peuvent simuler sans effort le comportement de systèmes dynamiques discrets simples. Elles traitent les données statistiques, simulent des marches aléatoires.
L'enseignement des mathématiques ne peut pas ne pas en tenir compte. Cet état de fait est déjà en soi une raison d'évoluer.

Des notions classiques revisitées après l'utilisation des ordinateurs.

Les objets de l'informatique sont finis. Il en est ainsi des *nombres* manipulés par les logiciels de calcul, qu'ils fonctionnent sur un ordinateur ou une calculatrice.
Les opérations élémentaires sur les entiers sont déjà source de questions intéressantes. La meilleure façon de calculer a^n est-elle de faire n multiplications successives ? S'interroger sur les coûts respectifs des différentes méthodes permet d'aborder la fonction logarithme.
Supposons par exemple que les entiers soient représentés en binaire. La plus grande puissance de 2 qui divise un entier donné est alors en évidence. Comment en tenir compte pour écrire un algorithme de division euclidienne ou de recherche du pgcd ? (voir M. Demazure, *Cours d'algèbre*).
On entrevoit par ce biais un moyen pour l'enseignement de réinvestir le calcul élémentaire sur les entiers (ou les rationnels,...) et les algorithmes qu'il met en œuvre.
En calculant avec des nombres, on est parfois contraint (ou induit) à utiliser des approximations. Comment les exprimer ? Sont-elles fiables ? La première démarche est un examen critique des résultats donnés par le système. La deuxième est active : comment parvenir à un résultat utilisable et correctement exprimé ?
On voit le lien avec la définition du format des données et de celui des résultats, avec *l'estimation des erreurs* commises, avec la maîtrise des *ordres de grandeur.*
On voit aussi que l'ordre des opérations n'est pas indifférent sur la précision du résultat, compte tenu de l'ordre de grandeur des termes. Il ne revient pas toujours au même de calculer $(a + b) - c$ ou $a + (b - c)$. S'introduit ainsi l'idée de l'interaction fondamentale entre choix de la structure de données et choix de l'algorithme de calcul.
Si l'on ne peut se résoudre à faire un calcul approché, on peut tenter de faire malgré tout un calcul exact. Tout de suite va se poser la question de savoir avec quel type de nombres : sont-ils entiers et limités ? entiers et grands ? rationnels ? quadratiques,... ? Il faudra se demander sous quelle forme il convient de les représenter. Un exemple classique, déjà abordé au lycée, est la représentation de $\sqrt{2}$: choisira-t-on la racine positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$? la racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$ contenue dans l'intervalle $]1,414, 1,415[$? le point fixe de la fonction $x \to 1 + \frac{1}{1+x}$? ou encore l'algorithme de développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue ?... Chacun de ces objets est fini, et recèle une propriété du nombre $\sqrt{2}$. Choisir l'un d'entre eux induit différents algorithmes de calcul d'une approximation, de calcul

algébrique impliquant d'autres nombres,...

On a vu plusieurs exemples d'objets manipulés par les logiciels de calcul. Il en est qui sont parmi les algorithmes fondamentaux du calcul numérique : méthode de Newton (ou des tangentes), méthodes d'intégration approchée des équations différentielles ordinaires,... C'est l'occasion d'observer des systèmes dynamiques discrets, de s'interroger sur les rapidités de convergence, de découvrir de nouveaux aspects des objets étudiés (par exemple, la méthode d'Euler éclaire le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle du premier ordre).

On utilise la touche `random` de la calculatrice pour produire une *suite aléatoire* de nombres. L'écriture d'un programme (qui produit une suite de longueur donnée, qui calcule la fréquence d'une occurrence donnée...) permet d'introduire un aléa dans la création de telles suites et de ne pas se limiter à l'observation d'un tableau de nombres élaboré une fois pour toutes et figé dans une page de manuel.
C'est l'occasion d'introduire les structures utiles : listes, arbres, graphes... Ces structures servent aussi à représenter et manipuler des *objets géométriques* : points, polygones, polyèdres,... ou algébriques : nombres premiers compris dans un intervalle donné... Préciser ces structures permet d'avancer dans la compréhension de certains mécanismes : construction d'enveloppes convexes, mise en œuvre du crible d'Ératosthène... et permet d'envisager une expérimentation possible avec des objets de taille vraisemblable.

Concepts de base de la programmation et de l'algorithmique.

Quels sont-ils ? Pour la programmation : les structures de contrôle (*boucles* et *branchements*) et la *récursivité*. À propos d'algorithmes, même simples, il est important de réfléchir à la *structure des données* et de se poser la question de leur *complexité*.
Pourquoi les enseigner dans le cadre des sciences mathématiques ?

1. À cause de leur caractère fondamental et universel : ils sont le domaine d'interaction entre logique, algorithmique et informatique.
2. Pour permettre une meilleure compréhension et appréhension des ordinateurs et calculatrices comme aides à l'enseignement des mathématiques : si l'élève est encouragé à représenter une suite récurrente "en colimaçon" ou "en escalier" en appuyant sur quelques touches de sa calculatrice, il ne peut sans écrire quelques lignes de programme comportant au moins une boucle et un branchement, contempler par exem-

ple l'évolution de la suite (de Syracuse) donnée par un premier terme u_0 et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ pair et } u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2} \text{ si } u_n \text{ impair}$$

De même, il est agréable d'écrire la ligne de programme, fort simple, qui applique N fois une fonction donnée, par exemple pour dresser une table de nombres aléatoires.

Même si on se cantonne à la résolution de questions simples, on voit que la plupart ne se résolvent pas en appelant une fonction déjà implantée.

3. Pour préciser certains concepts mathématiques dont l'usage a été précisé, codifié, ou revalorisé par l'informatique.

   Exemples : récurrence et récursivité, structures de données et complexité des algorithmes, distinction entre nom et valeur d'une variable...

Remarque : Introduire de nouvelles notions dans les programmes demande d'en retirer certaines. Cependant on voit que, souvent, il s'agit plutôt d'une évolution de la façon de considérer des notions classiques que d'une révolution. Cela dit, cette évolution est plus ou moins entamée chez les enseignants, les utilisateurs de mathématiques, et peut demander plus ou moins d'efforts et de temps.
Pour illustrer cette remarque, on examinera l'exemple de la division euclidienne dans les entiers. On peut choisir de privilégier une présentation des entiers qui prépare l'étude des anneaux principaux. Pour cela on utilisera le moins possible la division euclidienne (juste pour montrer que tout idéal est engendré par son plus petit élément positif) et on démontrera les propriétés suivantes (Bézout,...) en utilisant seulement la principalité. Est-ce toujours justifié pour des élèves de terminale S, voire pour de futurs professeurs ? Ils ne verront peut être pas qu'il est facile de calculer les coefficients d'une identité de Bézout. Ce n'est pas seulement un aspect pédagogique : c'est la finalité même de l'enseignement dans une filière donnée qui est en jeu.

Un exemple : Étude des graphes Un très grand nombre de problèmes ou de situations peuvent être modélisés par des graphes. Un plan de métro ou une carte routière sont des exemples de graphes utilisés quotidiennement, l'ensemble des nombres entiers reliés avec les règles de la suite de Syracuse en est un autre, moins usité.
Les graphes sont sans doute un des exemples les plus simples pour lesquels plusieurs représentations d'un même objet sont naturelles. Un graphe peut

être défini par la liste de ses sommets et de ses arêtes mais aussi par la liste de ses sommets et pour chacun d'eux la liste de ses successeurs ou bien encore par sa matrice d'adjacence.
On peut illustrer l'influence du choix d'une structure de données particulière sur les algorithmes et initier à la notion de complexité en tentant de répondre à des questions simples comme : *deux sommets donnés sont ils voisins ?* ou *combien y a-t-il de chemins de longueur donnée entre deux sommets donnés ?*
Notons qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un langage de programmation réel pour mener à bien une telle démarche, mais que les graphes se prêtent parfaitement bien à une introduction naturelle et progressive des structures de contrôle de base (`si ... alors ... sinon ...`, `tant que ... faire ...`, boucles `pour`) et des types de données (tableaux, listes chaînées) présentes dans tout langage évolué.
Citons quelques exemples de questions ou problèmes :

- Si le graphe modélise un réseau (les sommets représentant les sites et les arêtes les liens de communication),
  - deux sites donnés peuvent-ils communiquer ?
  - quel est le chemin le plus court entre deux sites donnés ?
  - calcul d'un arbre du réseau.
- Si le graphe représente le déroulement d'un jeu,
  - le jeu est-il équitable ?
  - à partir de quand un joueur a-t-il irrémédiablement perdu ?
  - mise au point de stratégies gagnantes.
- Si le graphe modélise un système de contrôle-commande,
  - tout état de danger conduit-il à un état d'alerte ?
  - une alarme ne peut-elle être éteinte qu'après intervention d'un opérateur ?
- Si le graphe est un plan de métro,
  - quel est le nombre minimal de changements entre deux stations données ?
  - quelles sont les stations que l'on peut rejoindre à partir d'une station donnée, avec un changement au plus ?

Un exemple : Enveloppes convexes dans le plan : On traite du problème de la *détermination effective de l'enveloppe convexe* d'un ensemble fini de points du plan (pour plus de détails et plus de généralité, on

pourra consulter l'ouvrage de J.-D. Boissonnat et M. Yvinec : *Géométrie algorithmique*).
Données : Un ensemble fini de points du plan que l'on classe (par exemple) par abscisses croissantes et, pour ceux qui ont même abscisse, par ordonnées croissantes.
But : Le polygone enveloppe convexe de l'ensemble fini de points, que l'on peut décrire (par exemple) par ses sommets rangés dans une liste circulaire.
Les stratégies possibles : incrémentale, division-fusion, enveloppe. Décrivons rapidement la première : on suppose obtenue l'enveloppe convexe des n premiers points et on leur adjoint le $n+1$-ème. On détermine alors l'enveloppe convexe d'un polygone convexe et d'un point, ce qui se traduit par la mise à jour la liste des sommets de l'enveloppe convexe.
On peut comparer cet algorithme avec l'un de ceux qui minimise une (ou plusieurs) forme linéaire sur un ensemble fini de points du plan, et voir que selon le nombre de formes linéaires à minimiser sur un même ensemble, la stratégie à employer est différente.
Un rapide inventaire montre que les notions mises en œuvre sont nombreuses.
Notions de géométrie : point, droite, polygone convexe (sommets et côtés), convexité, coordonnées, ordre, contour apparent,...
Notions d'algorithmique : stratégies classiques : incrémentale et division-fusion.
Réflexion sur les structures de données : ensemble de points du plan, polygone convexe, adjacences, listes, (graphes), tris...
Notions de base de programmation : liste (gestion d'une), branchements, boucles, récursivité.

Un exemple : Fractions continues. (voir aussi J.-P. Kahane, *Enseignement mathématique, ordinateurs et calculettes* Proc. Int. Congress of Math. Berkeley, 1986).
Partant d'un nombre réel, l'algorithme d'Euclide donne les coefficients de son développement en fraction continue, et donc une suite d'approximations rationnelles dont on sait qu'elles sont particulièrement bonnes.
Le développement des rationnels est fini, celui des nombres quadratiques (tels $\sqrt{2}$) est périodique : on peut le constater et le démontrer facilement.
La qualité de l'approximation par les réduites du développement en fraction continue d'un réel positif α a une interprétation géométrique : Si E_α^+ est l'ensemble des points à coordonnées entières et positives situés au dessus de la droite issue de l'origine et de pente α, les droites qui joignent l'origine aux sommets de l'enveloppe convexe de E_α^+ ont pour pentes les réduites (par

excès) du developpement en fraction continue de α. Les pentes des faces de cette même enveloppe convexe ont pour pentes les reduites par défaut.
Cette remarque géométrique (apparemment due à F. Klein) a été le point de départ de la considération par V. Arnol'd des *voiles*, obtenues comme frontière de l'enveloppe convexe des points à coordonnées entières contenus (par exemple) dans un cône convexe de $\mathbf{R}^3$. La statistique des faces (aires, longueurs,...) de ces voiles est un problème actuel.
On sait que les pavages de Penrose (en dimension 1) de la droite de pente α sont également liés aux développements en fraction continue de α.
Les notions mises en œuvre sont diverses et multiples :
nombres rationnels, quadratiques, réels. Approximations (comparaison d'), polygones, convexité,...
Algorithme d'Euclide, recherche de séquences données dans une suite. Représentation exacte d'un nombre quadratique. Listes, graphes, adjacences...

3 Quels professeurs ?

La tradition française en matière d'enseignement des mathématiques est ancienne et importante. C'est un atout à considérer. Les professeurs de mathématiques reçoivent une *formation initiale de qualité*. L'une des caractéristiques de cette formation est qu'elle a une grande constante de temps, ceci étant dû, en grande partie, à la nature des sciences mathématiques. La formation continue, à l'instar de ce qui est fait dans les autres disciplines, n'est pas à la hauteur de la formation initiale. Cependant l'existence des IREM est un point positif. Depuis leur création, ils ont joué un rôle important dans la diffusion des innovations dans le milieu des professeurs.
On peut cependant pointer des lacunes : une trop grande proportion de professeurs d'école ont une formation scientifique insuffisante.
Alors que les horaires de mathématiques au Lycée et à l'Université ont notablement diminué depuis 10 ans, les futurs professeurs certifiés sont toujours recrutés à Bac+4, et ceci alors qu'on attend d'eux des compétences largement aussi étendues qu'auparavant.
Dans le même temps, l'enseignement des mathématiques est morcelé : par le jeu des options, des spécialités, de l'aide individualisée, etc., il n'est pas rare que deux ou trois professeurs de mathématiques interviennent dans une classe. Pour quel profit ?
Enfin, - et ceci n'est pas spécial aux mathématiques - les dix années à venir vont voir la moitié des professeurs actuels partir à la retraite. Le contenu de la formation des futurs professeurs est donc particulièrement important.

Un choix tout aussi important est celui de la structure des enseignements au Collège et au Lycée. Va-t-on vers une multiplication des spécialités et des spécialistes ? Ou verra-t-on des regroupements de disciplines en blocs ou pôles comme l'envisage un projet récent de rénovation des séries technologiques ? Les sciences mathématiques pourraient constituer un tel bloc. Les professeurs de sciences mathématiques, comme leur collègues de sciences physiques, n'auraient pas nécessairement un cursus identique, mais ils pourraient dispenser à leurs élèves un enseignement cohérent dont ils auront perçu la diversité et la richesse au cours de leur formation.

4 Des propositions

4.1 Intégrer une part d'informatique dans l'enseignement des sciences mathématiques au Lycée.

Il faut annoncer cette mesure le plus tôt possible et prendre le temps de l'appliquer, pour y préparer les différents acteurs et donner le temps aux formations de se mettre en place dans les universités.

À court terme : Certaines mesures peuvent en revanche être prises dès maintenant. Les programmes passés et actuels comportent des instructions précises qui sont peu ou pas appliquées, qui restent à l'état de recommandations sans articulation réelle avec le reste du programme. On peut donc commencer par **donner vie** dès maintenant à ces instructions en signalant les utilisations possibles et en les intégrant dans le texte proprement dit et les documents d'accompagnement des programmes. Ceci concerne tout particulièrement **l'utilisation des calculatrices programmables**.

D'autre part les logiciels commencent à être utilisés dans les classes, de manière inégale et diverse, à cause notamment de la différence de formation des professeurs et de la diversité de l'équipement des établissements. Après une période de tâtonnements, il est important d'**indiquer clairement les priorités**. Il n'est pas souhaitable que professeurs et élèves deviennent des spécialistes de tel ou tel logiciel. Au contraire on préferera qu'ils fassent acquérir et acquièrent **les notions fondamentales et universelles**. Aujourd'hui, les calculatrices sont à la fois perfectionnées et largement diffusées. La frontière avec les ordinateurs s'estompe. Leurs langages de programmation se rapprochent d'un langage standard. Pourquoi ne seraient-elles pas le terrain privilégié de l'apprentissage ?

Pour ce qui concerne l'enseignement des sciences mathématiques dans la classe, il nous semble bénéfique pour l'élève de confier systématiquement à un **même enseignant** l'ensemble des heures (cours et travaux dirigés, modules, aide individualisée, enseignement de spécialité...) d'une même classe. C'est là encore une mesure que l'on peut prendre dès maintenant, alors que les habitudes ne sont pas encore établies.

À moyen terme : Faire évoluer progressivement les contenus pour intégrer de nouveaux objets et notions dans la ligne que nous avons tracée au paragraphe 2.3 : **algorithmique et programmation, mathématiques de l'informatique**. Les mathématiques entretiennent avec l'informatique des liens privilégiés que nous avons tenté de dégager dans la première partie. Dans son communiqué n°5, notre commission écrivait : " L'informatique donne des motivations et un champ nouveau à l'enseignement des mathématiques. Elle amène à revisiter des notions anciennes, à introduire de nouveaux points de vue, à donner des éléments nouveaux aux professeurs et aux élèves. " À cet égard, les mathématiques ont une place et un rôle particuliers, différents de ceux des autres disciplines utilisatrices d'informatique.

Il est logique que ce processus commence par une évolution des contenus de la formation des professeurs que nous évoquons au paragraphe suivant.

4.2 Formation des maîtres.

Il est évidemment indispensable que le professeur maîtrise ce qu'il doit enseigner. Mais il est également souhaitable qu'il ait un aperçu du pourquoi et du comment de ce qu'il apprend à ses élèves. On perçoit la contradiction entre des contenus trop étendus et une formation en un temps forcément limité. Il faut éviter les deux écueils d'une formation trop spécialisée et d'une formation pointilliste, en gardant comme objectif essentiel la mission première des professeurs. La solution sera nécessairement un compromis, mais essayons de garder en tête l'intérêt des élèves et celui de la société à venir.

Comment faire évoluer *la formation initiale* des professeurs ? Une première étape, déjà entamée, est la création de **filières universitaires adaptées**. Pour les professeurs des écoles existent quelques **licences scientifiques pluridisciplinaires**. Les multiplier (et les diversifier) permettrait de renforcer le pourcentage de scientifiques dans le corps des professeurs des écoles et la formation de ces enseignants.

Pour les professeurs de collège et lycée, il nous semble nécessaire, au vu de ce que nous avons esquissé plus haut, de développer la mise en place de licences comprenant un **enseignement d'informatique**. Cet enseignement devrait comprendre une partie obligatoire (par exemple algorithmique et programmation) et pourrait comporter une partie optionnelle avec d'autres aspects informatiques. Sans présager de ce qui constituera le rapport final, on peut imaginer que le besoin de renforcer la formation des professeurs de sciences mathématiques dans certains domaines "oubliés" (mécanique et astronomie, optique, probabilités et statistiques...) se fera jour. Il faut donc pouvoir ménager des **options possibles** pour les futurs professeurs, autour d'un socle commun, aussi bien dans le cursus universitaire que dans celui de la préparation aux concours de recrutement. Cependant, le bloc *algorithmique et programmation* nous paraît devoir faire partie de ce socle commun.

Il nous semble également que **la formation de base ne doit pas s'arrêter trop tôt** : nous avons évoqué plus haut la possibilité de repousser d'un an (jusqu'à Bac+5) le concours de recrutement des professeurs certifiés. En attendant, l'année de préparation au concours doit rester une année de formation de la culture de base du futur professeur.

Ces mesures, concernant la formation initiale, peuvent être prises très rapidement : les universités ont le potentiel d'enseignants nécessaire (informaticiens et mathématiciens pour le sujet qui nous occupe ici). Les concours de recrutement doivent évoluer également en laissant le temps aux licences et aux maîtrises de s'installer. Là encore un système d'options est sans doute nécessaire pour maintenir à la fois un socle commun et des spécialisations diversifiées.

Formation continue : Une fois en fonction, le professeur doit pouvoir trouver facilement les moyens le temps et les conditions **d'actualiser ses connaissances**. Il pourrait disposer d'un **capital de temps** à repartir au cours de sa carrière (à l'image du temps dégagé actuellement pour la préparation d'un concours). Les universités pourraient être plus largement associées à ces actions de formation. Le potentiel et la tradition reconnue des institutions (IUFM, IREM,...) qui abritent aujourd'hui la formation continue doivent être utilisés également en les redynamisant. Un lieu privilégié pour cette formation pourrait être le laboratoire de sciences mathématiques du lycée (nous y revenons au paragraphe suivant).

Les professeurs de classes préparatoires pourraient disposer de la possibilité de faire des **séjours de longue durée** (un an) dans un laboratoire universitaire pour renouer ou maintenir le contact avec le monde de la recherche que certains ont établi pendant leurs études universitaires.

Un des objectifs essentiels de ces propositions est que la formation continue touche davantage de professeurs qu'aujourd'hui. Ce n'est évidemment pas la seule affaire des sciences mathématiques et des mesures générales de gestion des ressources humaines de l'Éducation nationale seront nécessaires. Que ces mesures soient profondes et parfois coûteuses (en apparence) ne doit pas être une raison de renoncer. Au contraire, il semble possible, dès maintenant, de mieux utiliser les moyens consacrés à la formation continue.

4.3 Établissements.

Les lycées pourraient abriter des **laboratoires de sciences mathématiques** à côté de ceux de sciences physiques. Élèves et professeurs y trouveraient documentation, matériels informatiques, logiciels,... Ils pourraient s'y réunir, constituer des ateliers, inviter des conférenciers ou des consultants. Des créneaux horaires spécifiques pourraient être réservés aux professeurs, pour leur formation continue.

Il est parfois difficile de faire des choix en matière d'ouvrages et de logiciels. Les IREM pourraient être chargés de collecter et de publier des **critiques** des logiciels que l'on pourrait trouver dans ces laboratoires ou sur le bureau du professeur.

Les propositions qui précèdent tiennent en peu de lignes. Elles nous semblent cependant à la fois ambitieuses et raisonnables. Ambitieuses parce qu'elles impliquent des évolutions à l'université, à l'École, au Collège, au Lycée et chez les acteurs du système éducatif. Ambitieuses parce que les enjeux sont urgents et importants. Raisonnables parce que les enseignants de mathématiques d'aujourd'hui sont ouverts au changement, et prêts à relever ce défi que leur lance le siècle. Raisonnables enfin parce qu'il ne s'agit pas de bâtir à partir de rien, mais de faire évoluer la formation en sciences mathématiques de notre pays vers un projet cohérent.
Comme le souligne un article récent, " il y a entre mathématique et informatique une solidarité fondamentale qui repose sur l'histoire (Turing, Von Neumann) et sur les pratiques actuelles, mais cette solidarité ne va pas sans contradictions. "
Un des objectifs de ce rapport est de mettre en valeur cette solidarité sans nier les contradictions.