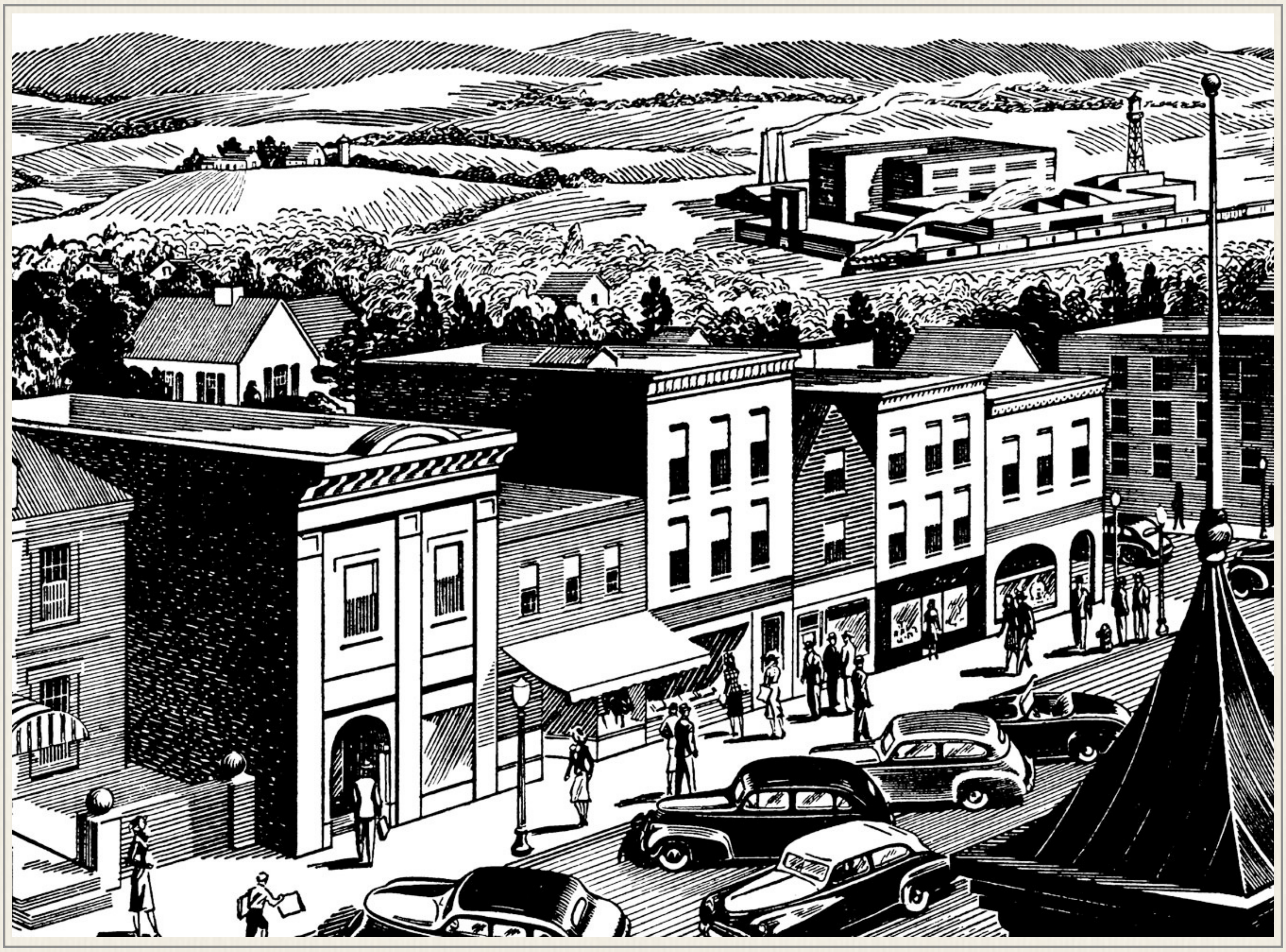
Découverte mathématique à la polyvalente

(Vérifier n'est pas comprendre)

ANDRÉ BOILEAU



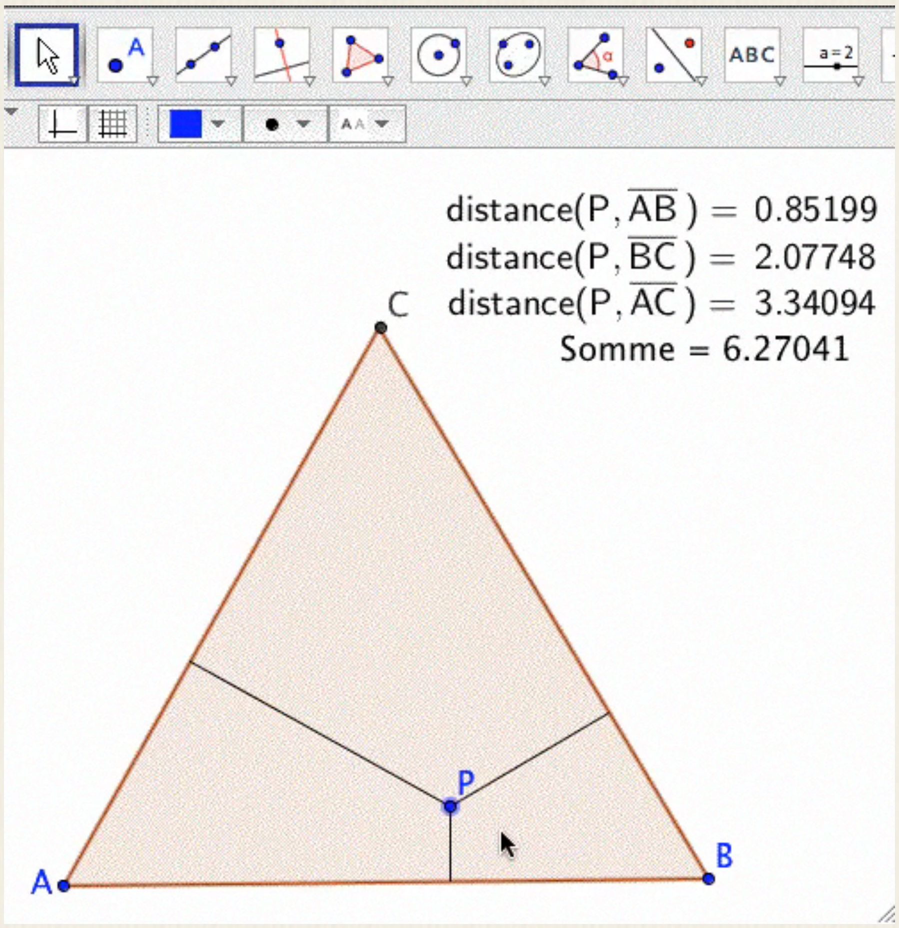
Premier jour

Jérémie - Catherine! Avant qu'on sorte du laboratoire d'info, j'ai quelque chose à te montrer… Imagine-toi donc, je viens de faire une découverte **mathématique**.

Catherine - Tu m'intriques… Montre-moi ça!
Jérémie - J'ai commencé par tracer un triangle équilatéral *ABC*, tu sais avec ses trois côtés de même longueur. Puis j'ai pris un point *P à l'intérieur* du triangle, et j'ai calculé la distance de *P* à chacun des trois côtés de mon triangle.

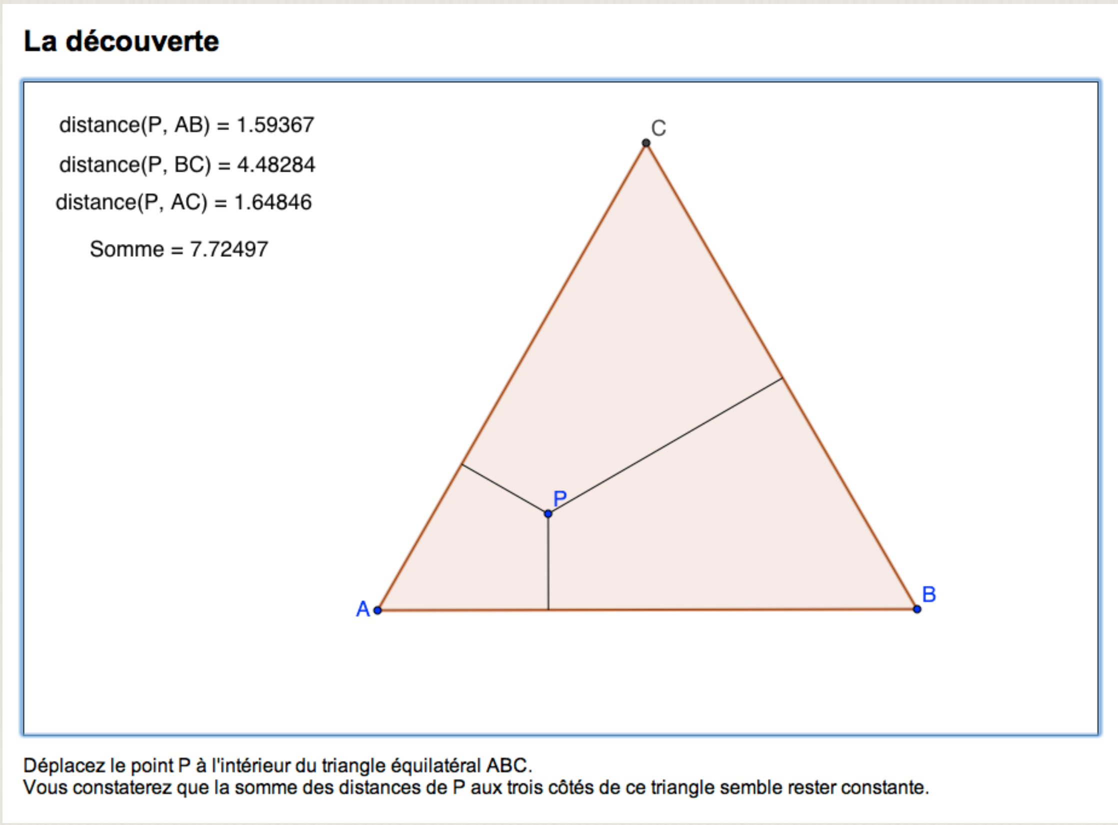
Catherine - Jusque-là, y'a rien de bien sorcier…

Jérémie - Attend! Quand je fais la somme des trois distances, elle ne change pas, même quand je fais bouger le point *P*.



Catherine (déplaçant le point *P* avec la souris) - Tu as bien raison! Même si les trois distances changent comme des folles, leur somme reste impassible. Une minute! La somme change quand le point *P* sort du triangle…

Jérémie - Oui, je l'avais déjà constaté. En fait, en éloignant *P* du triangle, la somme peut devenir aussi grande qu'on veut…



Vous pouvez reproduire vous-même l'expérience de Jérémie et Catherine.

Catherine - C'est bien beau tout ça, mais est-ce que tu as trouvé une preuve que ça fonctionne toujours ?

Jérémie - Pas besoin de preuve ! On voit bien que ça va toujours marcher !

Catherine - Moi aussi, je suis convaincue que le résultat est toujours vrai. Mais en mathématiques, on a besoin de preuves.

Jérémie - Et pourquoi donc ?

Catherine - Parce qu'on veut être **certain** que ç'est vrai.

Jérémie - Dis-moi donc ce qui pourrait clocher dans mon expérience ?

Catherine - Bien, tout d'abord, le logiciel qu'on utilise nous permet de déplacer le point P sur tous les points de l'écran, c'est-à-dire sur tous les **pixels**. Mais c'est bien loin de couvrir tous les cas possibles!

Jérémie - Qu'est-ce que tu veux dire?

Catherine - Tu sais bien que, **mathématiquement parlant**, il y a une infinité de points à l'intérieur de ton triangle. Mais le logiciel ne permet d'en tester qu'un nombre fini. Tu avoueras que c'est bien peu!

Jérémie - C'est vrai! Mais ce serait quand même bien surprenant si la somme des distances n'était pas **toujours** constante, alors qu'elle l'est pour tous les points de l'écran.

Catherine - Je l'admets. Je te l'ai déjà dit : je suis **convaincue** que la somme est toujours constante. Je veux simplement être **certaine** que c'est bien le cas. Laisse-moi jouer à l'avocate du diable pour un instant. Si on explorait, de façon semblable, tous les points de l'écran de l'ordinateur, on pourrait être tenté de conclure que les coordonnées de ces points sont **toujours** des nombres rationnels. Mais on sait très bien qu'en réalité, il y a beaucoup de points pour lesquels ce n'est pas le cas, comme $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ ou $\left(1,\pi\right)$.

Jérémie - J'avoue que tu marques un point.

Catherine - Et, en plus, il y a possiblement un autre problème. Quand le logiciel calcule la somme des distances, il utilise les puces de l'ordinateur, qui travaillent avec une vingtaine de décimales : les calculs ne sont donc pas **rigoureusement exacts**.

Jérémie - Là tu exagères! Si la somme des distances variait, on le verrait forcément!

Catherine - Laisse-moi, encore une fois, jouer à l'avocate du diable.

Jérémie - Décidément, tu aimes ça!

Catherine - Imagine que la somme n'est pas vraiment constante, mais varie plutôt **très légèrement**, avec des écarts de l'ordre de

$$10^{-50} = \frac{1}{10^{50}} = \frac{1}{100000000000000000000000000000000000000000000000000}.$$

Ces différences seraient tout à fait indétectables par l'ordinateur.

Jérémie - Tu as raison, encore une fois! Mais ça me semble bien peu probable.

Catherine - À moi aussi. Mais ce n’est pas complètement impossible...

Jérémie - Ouais... En fin de compte, je n’ai pas découvert grand chose!

Catherine - Au contraire, tu as fait une très belle découverte! Et c’est pour ça qu’elle mérite d’être explorée davantage. On devrait en parler au prof de maths, pour voir ce qu’elle en pense...

Deuxième jour

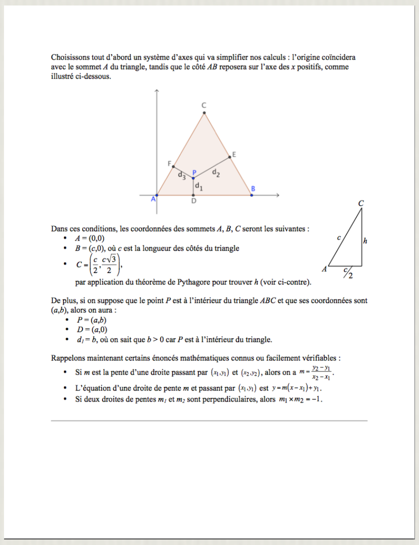
Catherine - Jérémie, j'ai quelque chose à te montrer!

Jérémie - Qu'est-ce que c'est?

Catherine - J'ai réussi à faire une **preuve** de ta découverte d'hier.

Elle lui tend quelques feuilles. Jérémie regarde longuement tout ça, puis...

Jérémie - Ça me semble bien long et bien compliqué! Fais-moi donc un résumé.



Choisissons tout d'abord un système d'axes qui va simplifier nos calculs : l'origine coïncidera avec le sommet A du triangle, tandis que le côté AB reposera sur l'axe des x positifs, comme illustré ci-dessous.

Dans ces conditions, les coordonnées des sommets A, B, C seront les suivantes :

- $A = (0,0)$
- $B = (c,0)$, où c est la longueur des côtés du triangle
- $C = \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$,
  par application du théorème de Pythagore pour trouver h (voir ci-contre).

De plus, si on suppose que le point P est à l'intérieur du triangle ABC et que ses coordonnées sont (a,b), alors on aura :

- $P = (a,b)$
- $D = (a,0)$
- $d_1 = b$, où on sait que $b > 0$ car P est à l'intérieur du triangle.

Rappelons maintenant certains énoncés mathématiques connus ou facilement vérifiables :

- Si m est la pente d'une droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2), alors on a $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- L'équation d'une droite de pente m et passant par (x_1, y_1) est $y = m(x - x_1) + y_1$.
- Si deux droites de pentes m_1 et m_2 sont perpendiculaires, alors $m_1 \times m_2 = -1$.

Les calculs de Catherine

Catherine - J'ai utilisé les coordonnées des sommets du triangle et du point P à l'intérieur de celui-ci pour calculer explicitement la somme des distances. Et j'arrive à la conclusion que celle-ci est toujours égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, où c est la longueur de chacun des côtés du triangle. Et comme cette valeur ne dépend pas des coordonnées du point P, elle reste donc constante peu importe la position de P.

Jérémie - À mon tour de jouer à l'avocat du diable! Qu'est-ce qui me dit qu'il n'y a pas une erreur dans tes calculs?

Catherine - Tu peux vérifier...

Jérémie - Je suis loin d'être un expert en maths, et toi aussi d'ailleurs : on n'est encore qu'au secondaire! Il pourrait très bien avoir une ou plusieurs erreurs sans qu'on les découvre.

Catherine - On pourrait soumettre mes calculs à des experts... D'ailleurs voilà justement Louise, notre chère prof de maths, qui arrive. On va lui demander ce qu'elle pense de tout ceci.

Ils racontent leur démarche à Louise, qui expérimente à l'ordinateur la découverte de Jérémie, pour ensuite examiner les calculs de Catherine.

Louise - Je suis très impressionnée par ce que vous avez fait. C'est vraiment du beau travail!

Jérémie - Est-ce que tout est correct? La découverte **et** les calculs pour le prouver?

Louise - Eh oui!

Catherine - Je dois avouer que je suis soulagée, car Jérémie m'avait fait douter un peu : je n'étais pas absolument **certaine** de ne pas m'être trompée dans mes calculs.

Louise - C'est peut-être signe que votre démarche n'est pas tout à fait terminée. En effet, les expériences de Jérémie sur l'ordinateur lui ont permis de **découvrir** le résultat, et d'acquérir une **certaine confiance** dans son exactitude. Puis, les calculs de Catherine ont amené la **certitude** que ce résultat était bien toujours vérifié. Mais le phénomène n'est pas encore totalement **compris**. Il faut donc continuer l'exploration.

Catherine - Mais comment procéder?

Louise - Comme c'est souvent le cas en mathématiques, il peut s'avérer utile de regarder la situation d'un autre point de vue, d'**adopter un regard neuf**.

Jérémie - Mais comment savoir quel point de vue choisir?

Louise - Il n'y a pas de recette magique pour faire des mathématiques, pas plus que pour écrire des romans ou composer de la musique. Comme on le dit parfois, il faut un peu d'inspiration et beaucoup de transpiration!

Catherine - Et, dans notre cas, ça voudrait dire quoi?

Louise - Vous pourriez essayer de trouver votre propre façon de voir les choses. Mais, comme vous manquez encore d'expérience, et pour vous donner un exemple de « regard neuf », je vais vous donner un coup de pouce. Dans votre situation, une façon alternative de voir les choses est de constater que le point intérieur P peut servir à diviser le triangle en trois triangles plus petits, et que l'aire du grand triangle est égale à la somme des aires des trois petits triangles.

Jérémie - Notre découverte parle de longueurs et nous passons aux aires! Il me semble que ça complique les choses...

Catherine - Mais tu oublies que l'aire d'un triangle peut se calculer en utilisant les longueurs : $\dfrac{base \times hauteur}{2}$.

Jérémie trace la figure suivante, puis semble frappé par une inspiration.

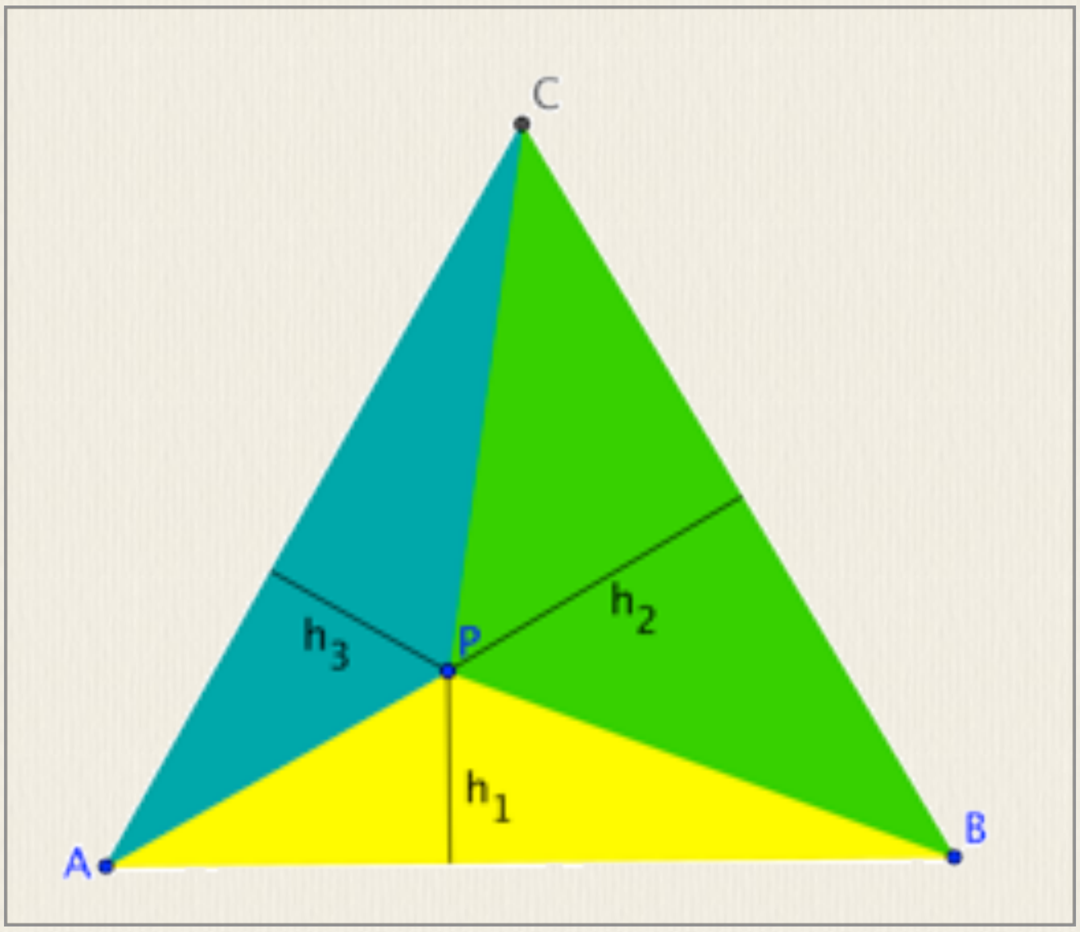


Figure dessinée par Jérémie

Jérémie - Regardez, les hauteurs sont en fait les distances du point *P* aux côtés du triangle.

Catherine - Faisons les calculs

$$\begin{aligned}&Aire\ \ du\ \ triangle\ \ ABC\\&=(Aire\ \ du\ \ triangle\ \ PAB)+(Aire\ \ du\ \ triangle\ \ PBC)+(Aire\ \ du\ \ triangle\ \ PAC)\\&=\tfrac{1}{2}ch_1+\tfrac{1}{2}ch_2+\tfrac{1}{2}ch_3\ \ [\text{où } c \text{ est la la longueur des côtés du triangle } ABC]\end{aligned}$$

Jérémie - Mettons $\frac{1}{2}c$ en évidence!

Catherine (poursuivant les calculs) -

$$=\tfrac{1}{2}c(h_1+h_2+h_3)$$
$$=\tfrac{1}{2}c(la\ \ somme\ \ des\ \ distances\ \ de\ \ P\ \ aux\ \ côtés\ \ du\ \ triangle)$$

Jérémie - Et donc

$$Somme\ \ des\ \ distances\ \ de\ \ P\ \ aux\ \ côtés\ \ du\ \ triangle\ \ ABC$$
$$=\frac{Aire\ \ du\ \ triangle\ \ ABC}{\tfrac{1}{2}c}$$

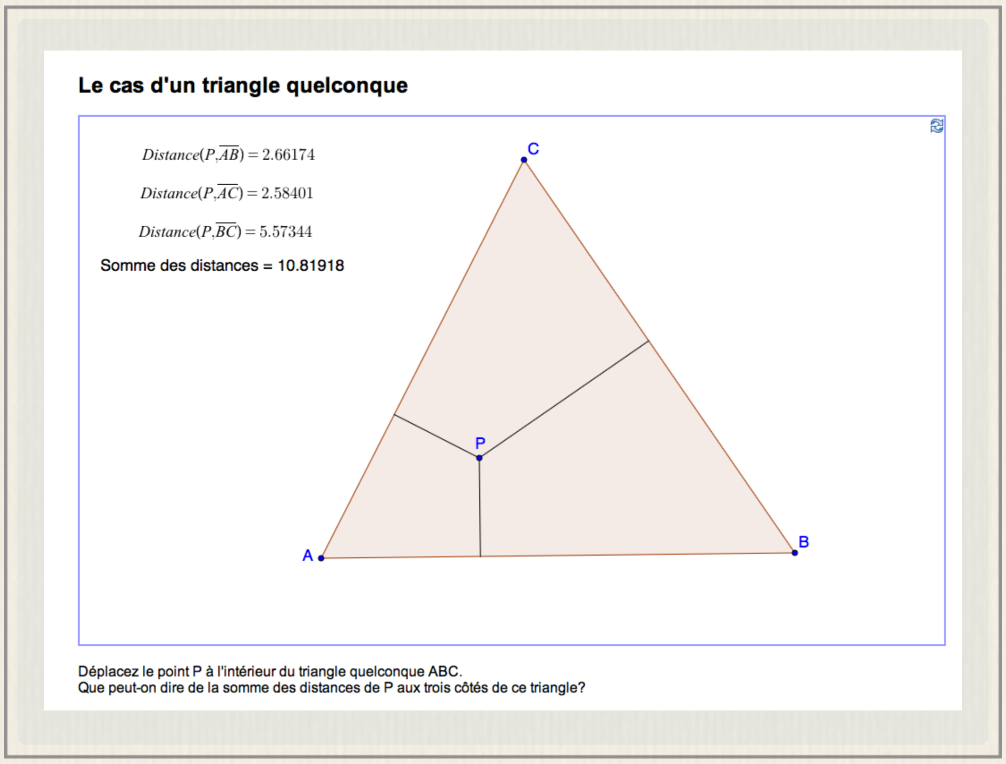
On voit donc que la somme des distances est égale à une expression **qui ne dépend pas de la position du point *P*.** Elle est donc constante!

Catherine - C'est beaucoup plus simple comme ça! En faisant mes calculs, j'ai l'impression que je me suis compliqué la vie pour rien. Tandis que là, je sens que je comprends vraiment!

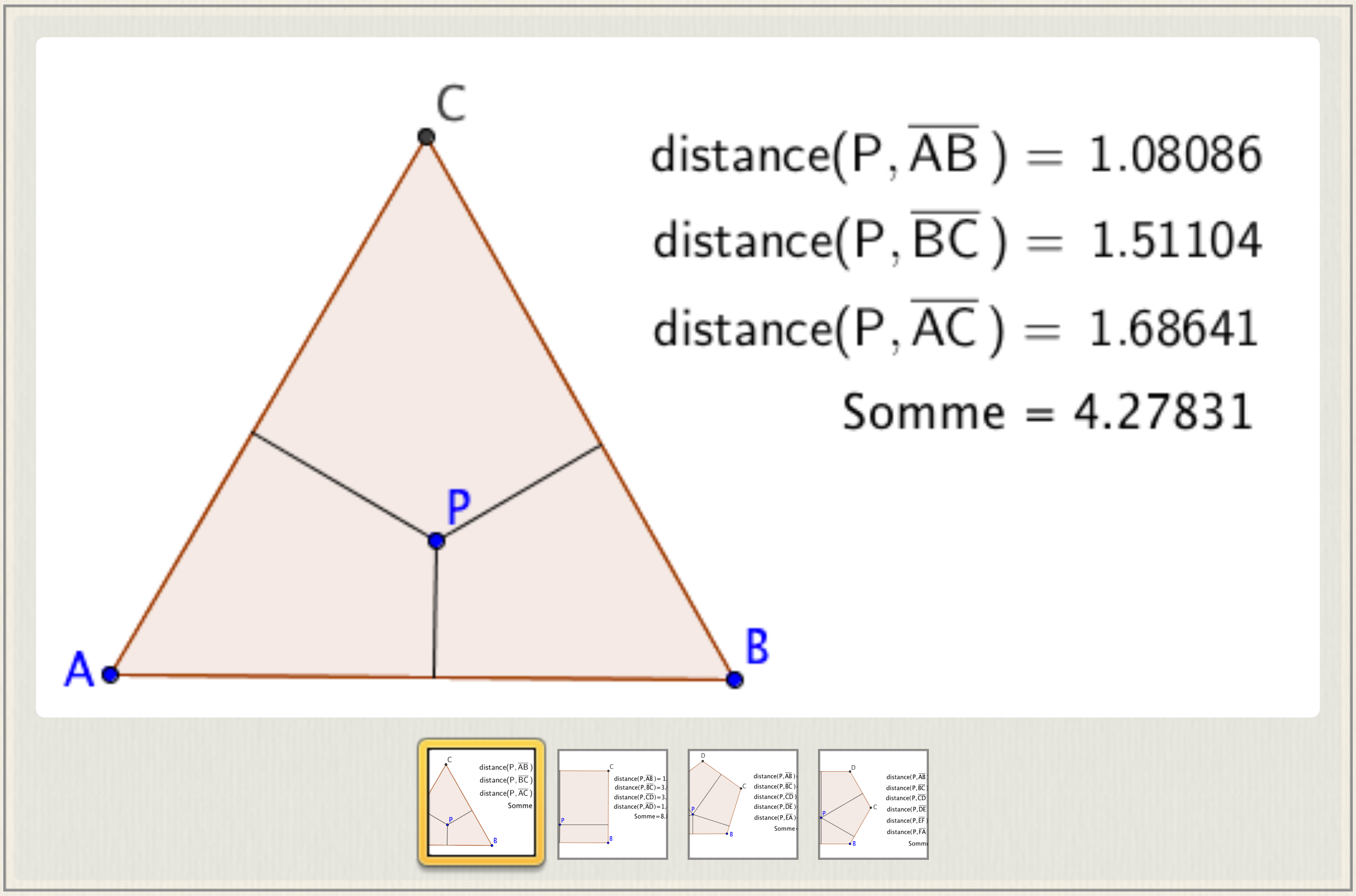
Jérémie - Et maintenant, Louise, peut-on dire que notre exploration est terminée?

Louise - Vous êtes arrivés à une conclusion très satisfaisante, et vous pourriez arrêter là. Mais, comme toujours, une question résolue peut être le point de départ de plusieurs autres explorations :

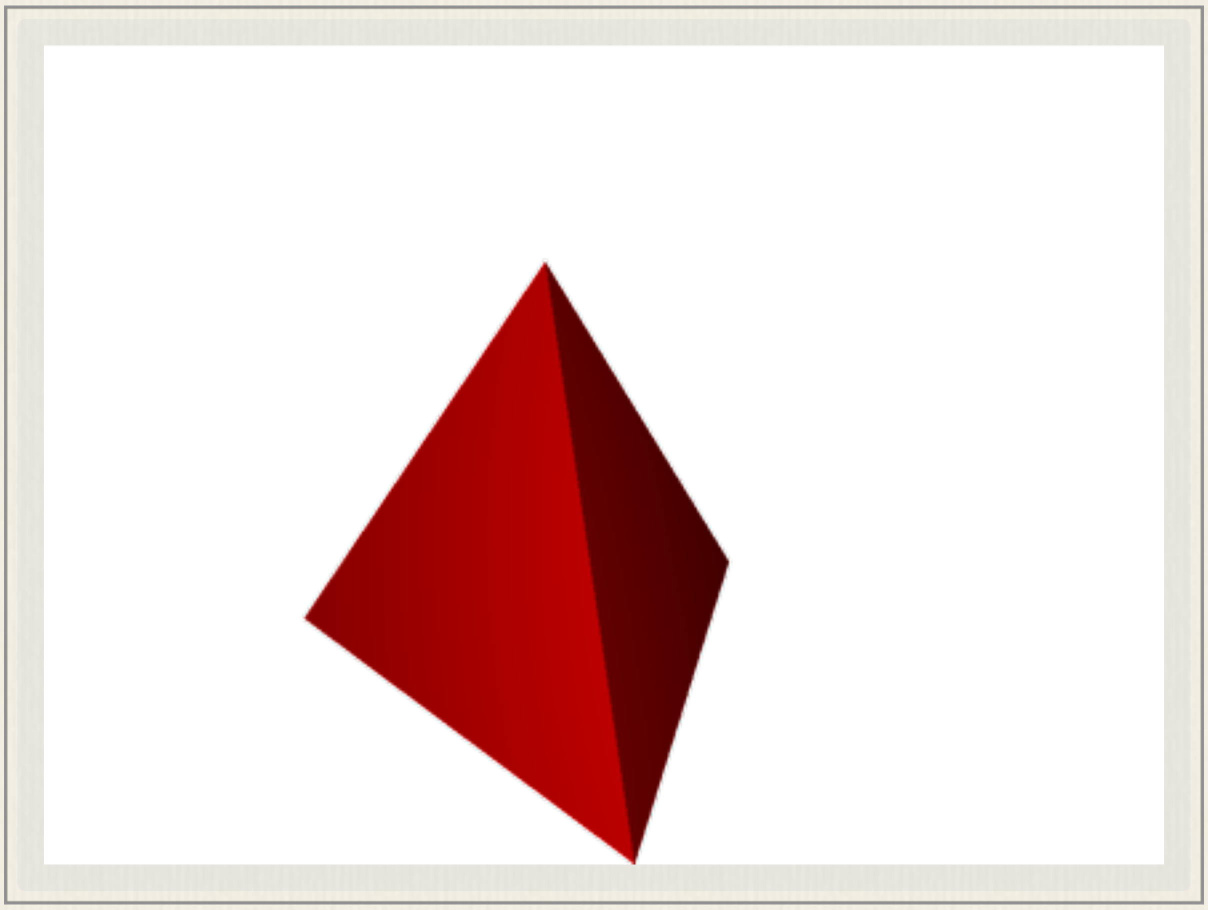
Qu'arrive-t-il si le triangle de départ n'est pas équilatéral?



Est-ce que le même phénomène reste vrai pour un carré? Un pentagone régulier?



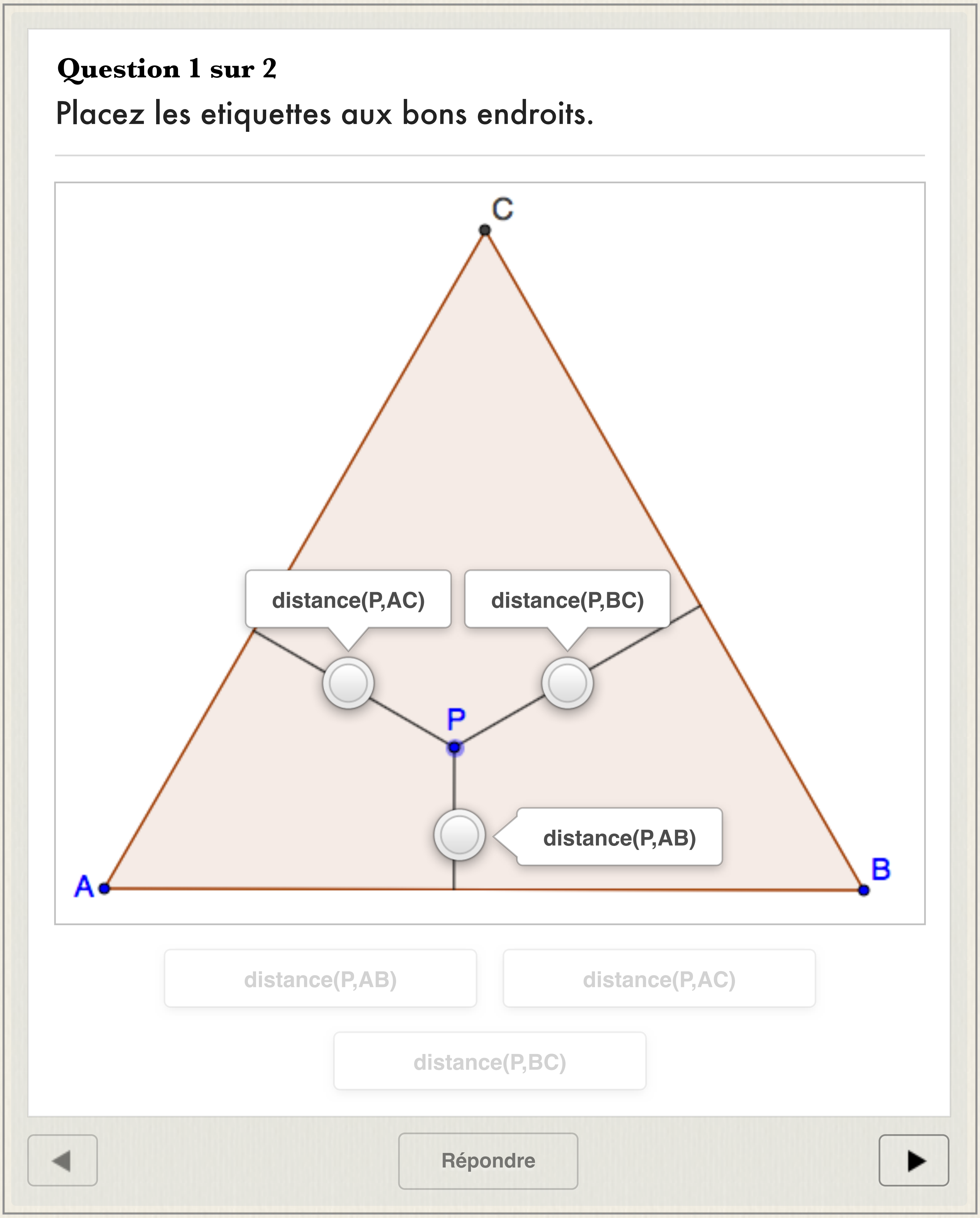
Et que se passe-t-il à trois dimensions, avec des polyèdres réguliers? Etc.



Catherine - J’aimerais aussi trouver le lien entre la somme des distances que nous venons de trouver et celle que j’avais calculée.

Jérémie - Et l’aventure continue...

Quelques questions pour prolonger



Appendice

Le texte de ce livret a été publié initialement dans le volume 4 (Hiver – Printemps 2009) de la revue Accromath. Afin d’ajouter un peu de dynamisme, une page Web a été associée à cet article:

http://www.math.uqam.ca/~boileau/Accromath.html.

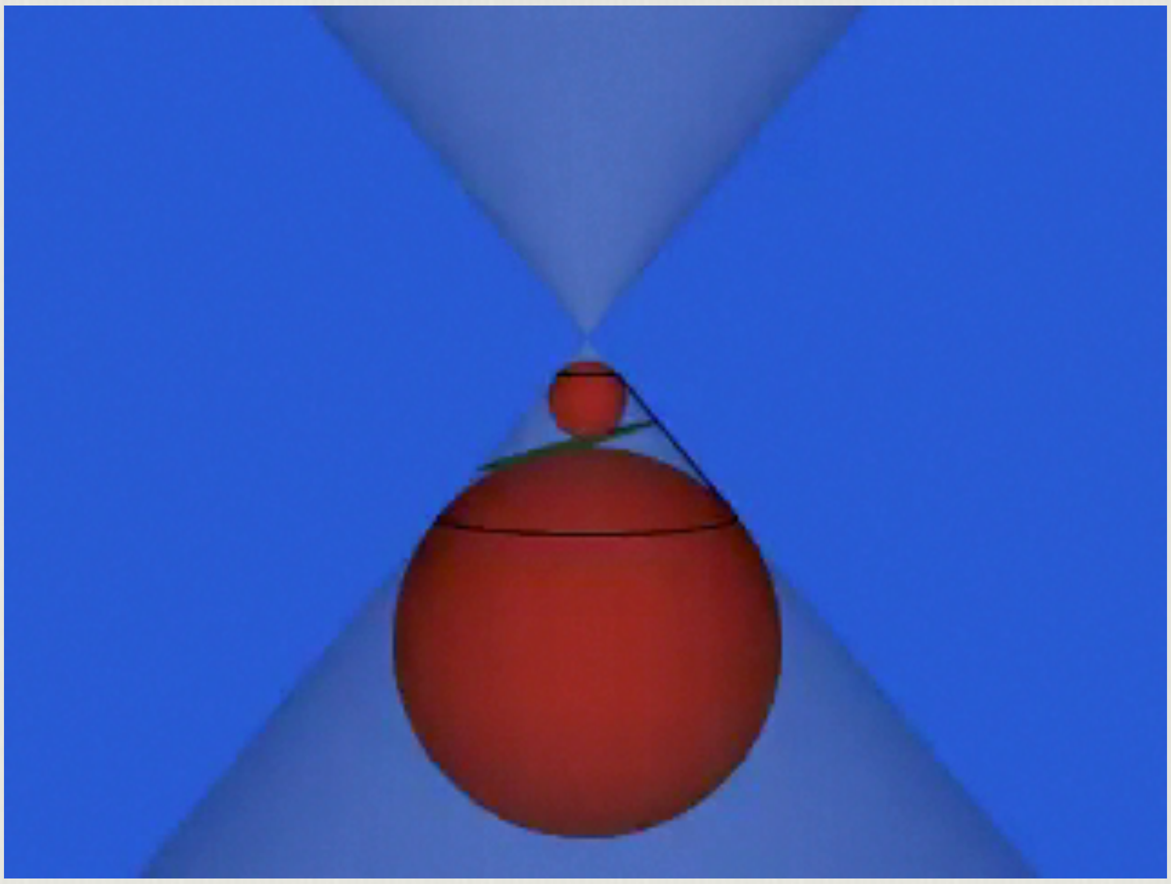
Pour explorer et illustrer les possibilités de création de *iBooks Author*, il m’a semblé intéressant de revisiter l’article en question. J’y ai ajouté quelques éléments tirés de la page web et quelques autres items spécifiques à *iBooks Author* (galerie d’images, figures 3D manipulables, et questions interactives). Au lecteur de juger si c'est une amélioration significative de l'article original...

Dans cet appendice, je veux discuter du processus d’ajout d’interactivité à un texte, en m’attardant plus spécifiquement au cas où le texte parle de mathématiques. Le logiciel *iBooks Author* rend facile **l’assemblage** d’un tel livre, si l’on dispose des divers éléments qui le constituent (texte, images, animations, et autres éléments interactifs). Il est donc clair que la difficulté principale réside dans la création de ces divers éléments. Je ne reviendrai pas sur les difficultés reliées à la création d’un texte significatif et d’illustrations éclairantes pour l’acompagner: c’est le lot de toutes les publications, électroniques ou papier. Je vais plutôt insister sur les éléments interactifs...

Jetons un coup d’oeil sur la production d’animations qu’on veut inclure dans nos livres. Comme l’illustre le livret *Math Our Way*

https://itunes.apple.com/us/book/math-our-way/id530018829?mt=13 c'est à la portée d'élèves du primaire: il suffit de savoir comment transférer les films de sa caméra numérique vers son ordinateur, ou de pouvoir enregistrer ses interactions avec un ordinateur (doté d'un *tableau blanc interactif* ou non). Par la suite, on doit pouvoir transcoder les films ainsi obtenus au format **«m4v»** exigé par *iBooks Author*. C'est encore une fois affaire de quelques manipulations simples avec un logiciel (ici *QuickTime Player 7 Pro*, *iMovie* ou même *Mac Os X*).

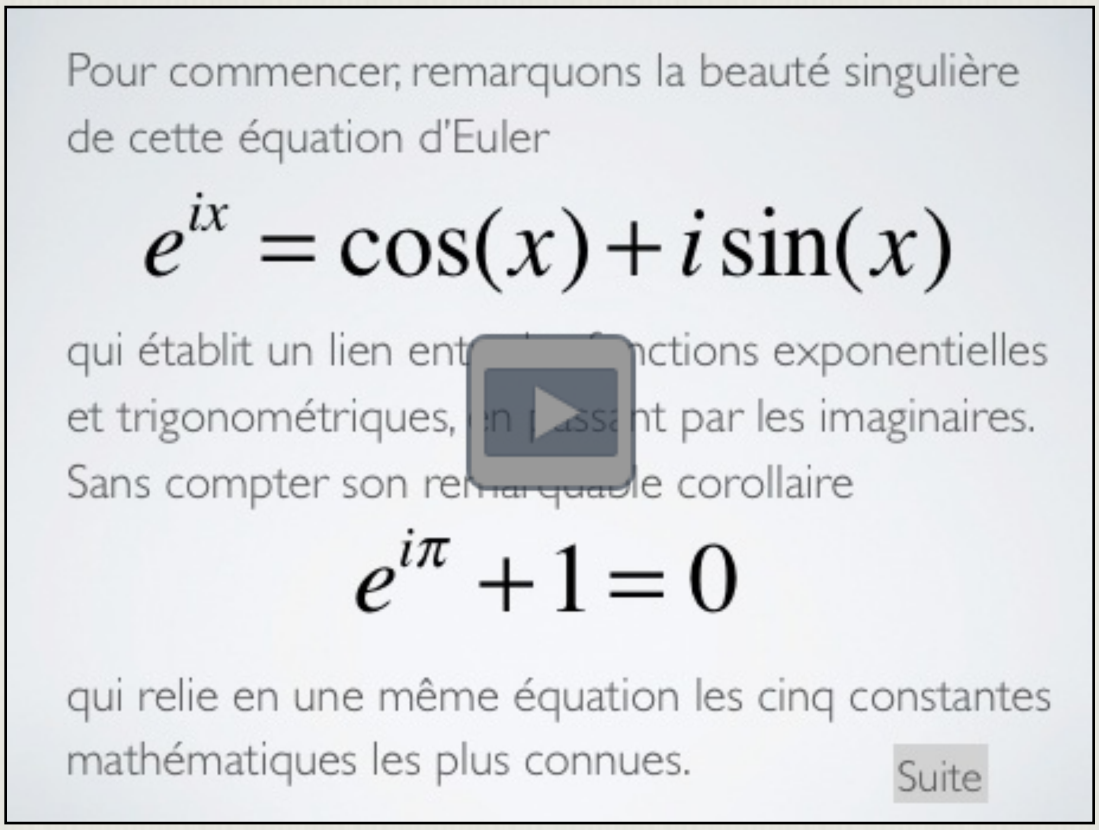
Bien sûr, la situation peut se compliquer considérablement si l'on désire utiliser des animations plus sophistiquées: parlez-en aux spécialistes des effets spéciaux à Hollywood! Plus modestement, pour les mathématiques, cela implique souvent de la programmation dans des logiciels spécialisés comme *MegaPOV*.



Animation utilisant des images créées à l'aide du logiciel *MegaPOV*.

On peut aussi intégrer des objets 3D à nos livres. Tout ce dont nous avons besoin est un logiciel pouvant exporter au format «**collada**». Le logiciel *Sketchup* (anciennement de *Google*, mais passé à *Trimble*) est particulièrement intéressant à cet effet, puisqu'il permet de définir des objets 3D tant par des manipulations avec la souris que par programmation.

Si l'on désire plus d'interactions, on peut aussi insérer des présentations *Keynote* (ou *PowerPoint*, importées dans *Keynote*). Même si certains effets ne sont pas préservés, on a là une façon simple d'intégrer un peu d'interactivité à nos livres.



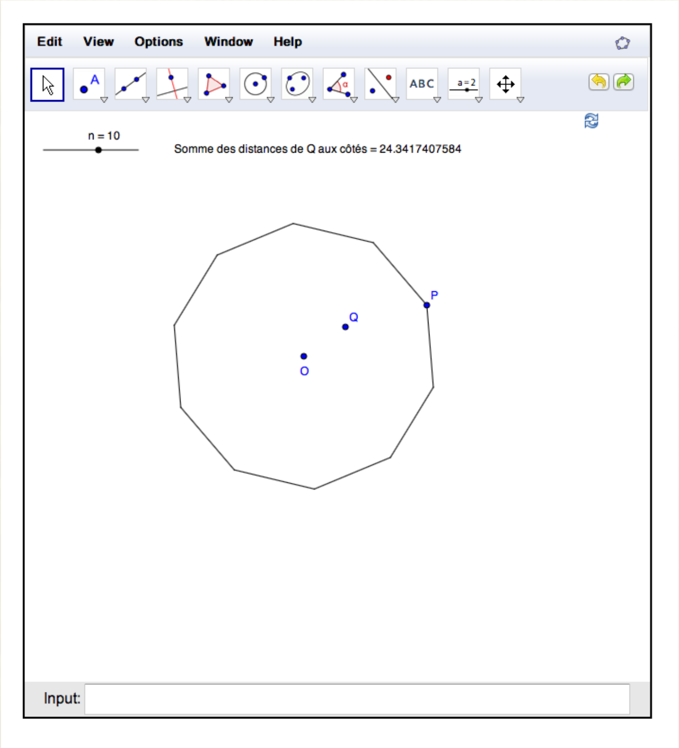
Présentation *Keynote* d'une preuve d'un résultat d'Euler

Mais si on est à la recherche d'une interactivité maximale, on peut avoir recours au **widget** HTML, qui permet d'utiliser des pages web au format HTML, avec des mises en forme CSS et de la programmation JavaScript.

Il n'est cependant pas toujours nécessaire d'avoir beaucoup de compétences techniques pour avoir recours à ce type de widget: *GeoGebra* en offre un bel exemple. En effet, ce logiciel permet d'exporter une figure sous la forme d'une page web, en choisissant le format HTML5. Pour l'instant, il faut encore bidouiller un peu pour obtenir, par la suite, un widget utilisable dans *iBooks Author*, mais on annonce qu'on travaille sur une façon plus directe et plus transparente d'y arriver.

Dans le cas de *GeoGebra,* comme en général, il faut déterminer si nous voulons intégrer toutes les ressources nécessaires à notre livre (ce qui augmente sa taille mémoire), ou si nous permettons qu'elles soient téléchargées au besoin (ce qui nécessite de disposer d'une connection wifi lors de la lecture du livre).

Pour GeoGebra, on peut aussi déterminer quels outils seront disponibles pour l'utilisateur. Dans les exemples précédents de ce livre, j'ai choisi de ne garder que le minimum requis. Mais on peut aussi choisir de garder le plus d'outils possible, ce qui nous permet d'obtenir une bonne partie de *GeoGebra*. Plusieurs possibilités manquent encore à l'appel (par exemple : la seconde zone graphique, le tableur et les scripts), mais le développement se poursuit activement...

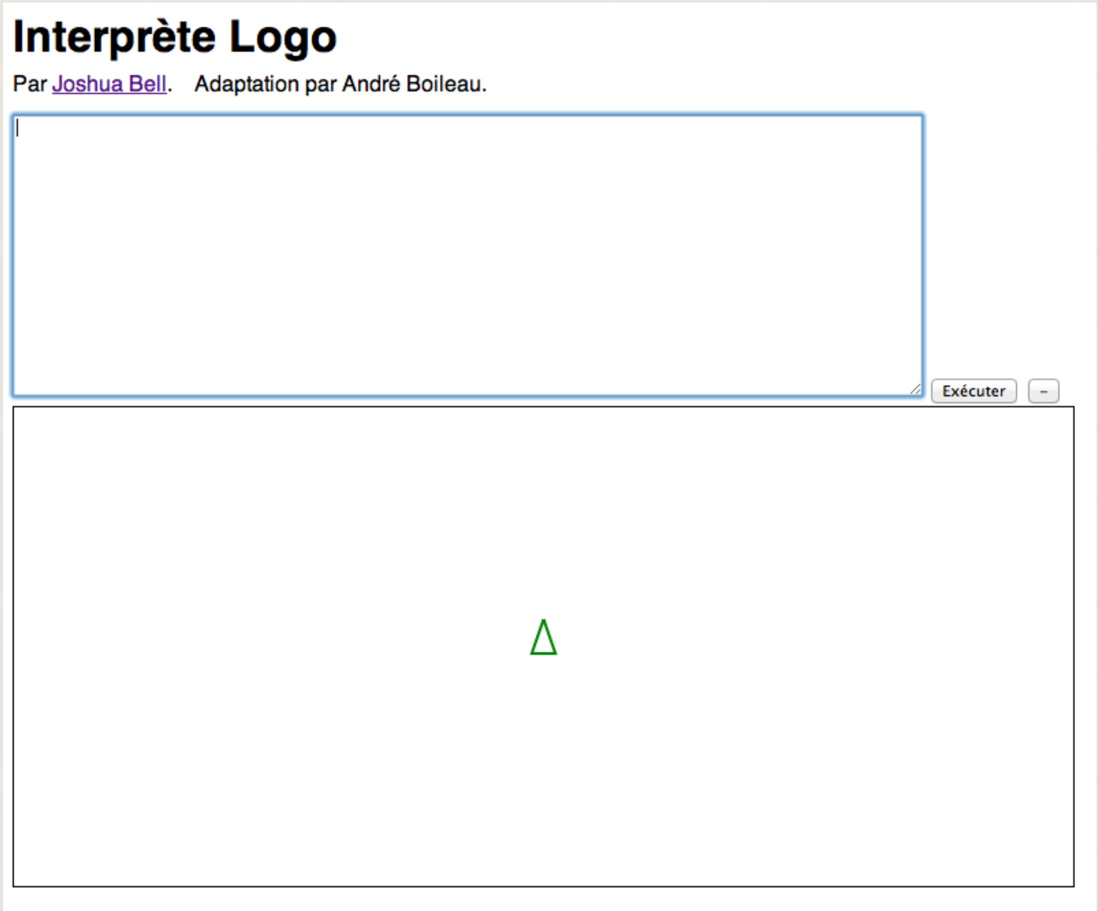


Pour illustrer la puissance et la polyvalence des widgets HTML, mentionnons qu'il permettent même d'ajouter un environnement de programmation dans nos livres. Au départ, je me suis rendu à la page web suivante

http://www.calormen.com/Logo/

où l'on retrouve une implantation libre du langage *Logo* en *JavaScript*. Puis j'ai adapté un peu l'interface à l'environnement *iBooks Author*, et j'ai fait une traduction d'une partie (la géométrie de la tortue) du langage *Logo* proposé. Vous trouverez le widget résultant à la page suivante, et un exemple d'un petit programme ci-dessous (notez que les caractères accentués ne sont pas permis).

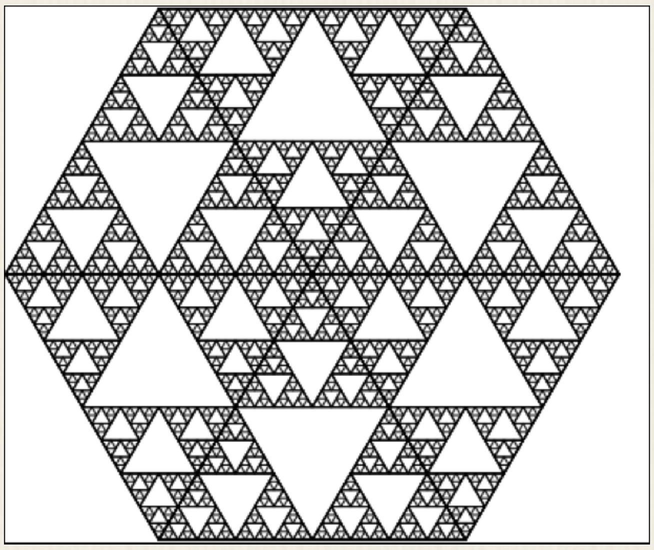
```
pour carre :c
  repete 4 [avance :c droite 90]
fin
repete 36 [carre 100 droite 10]
```



Interprète Logo anglais (et francisé en partie)

Pouvez-vous écrire un programme demandant à la tortue de tracer :

- un polygone régulier à n côtés ?
- des carrés emboîtés ?
- un triangle de Sierpinski ?
- la figure montrée dans l'image ci-contre, formée de six triangles de Sierpinski ?



Widget

C'est le nom donné aux éléments interactifs dans *iBooks Author.* Dans la version 2 de ce logiciel, ils sont au nombre de neuf, comme le mondre l'image ci-contre.

Termes connexes du glossaire

Faire glisser ici les termes connexes

Index Rechercher un terme

Appendice - Appendice