Quand la technologie influence les mathématiques (et son enseignement)

André Boileau

Avril 2014

Résumé

La technologie est en train de transformer en profondeur les pratiques mathématiques : importance accrue des mathématiques expérimentales, preuves assistées par ordinateur mais trop complexes pour être entièrement saisies par des êtres humains, etc. Dans cet atelier, on se demandera quels impacts durables auront ces changements fondamentaux sur les mathématiques, et leur enseignement.

Plan de la présentation

- Les outils du mathématicien
- Apport des ordinateurs
  - pour les mathématiciens
  - dans l'enseignement des mathématiques
- L'autre côté de la médaille
- Un peu de « mathématiques-fiction »
- En guise de conclusion

Les outils du mathématicien

- Traditionnellement :
  crayon, papier et … poubelle
- Arrivée d'innovations technologiques
  - Ordinateurs (et calculatrices)
    - Programmation (utilisant des bibliothèques maths)
  - Logiciels puissants et variés
    - Systèmes de calcul formel
    - Logiciels de géométrie dynamique
    - Tableurs
    - Etc.

Apports des ordinateurs

- Calcul de π par Shanks
- Calculs de Delauney
- Gauss et la distribution des nombres premiers
- Fractals, chaos, etc.
- Projet BOINC

Calcul de π par Shanks

- En 1873, prend 28 ans pour calculer 707 décimales de π via la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

- Malheureusement, seules les 527 premières décimales sont correctes
- De nos jours…

Calculs de Delaunay

- *La théorie du mouvement de la lune* (2 volumes, 1860 et 1867): 10 ans de calculs $\rightarrow$ formule de 138 pages
- Avec un SCF (Système de Calcul Formel), en quelques minutes, on découvre trois erreurs (les deux dernières découlant de la première)

Gauss et distribution des nombres premiers

- En 1793, Gauss (à 15 ans) trouve expérimentalement (consultation de *tables de nombres premiers* $\leq 3 \times 10^6$) et énonce le résultat suivant :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} \right) = 1$$

- De nos jours, l'établissement de telles tables est rendu facile via l'ordinateur

Fractals, chaos, etc.

- Il y a eu des précurseurs avant l'arrivée de l'ordinateur :
  Sierpinski, Poincaré, Julia
- Mais l'arrivée de l'ordinateur a permis un développement fulgurant de la visualisation et des intuitions associées

IFS homothéties IFS Chaos Pendule double

Projet BOINC

- Berkeley Open Infrastructure for Network Computing
- Calculs répartis sur plus de 650 000 ordinateurs (octobre 2013)
- Exemples de projets
  - SETI
  - Syracuse
  - Sudoku
  - etc.

Apport de l'ordinateur dans l'enseignement des maths

- Possibilités pour le professeurs
  - Représentations informatiques d'objets mathématiques (dynamisme)
  - Explorations numériques et graphiques
  - Mathématiques appliquées à l'informatique
  - Simulations et jeux pédagogiques

Dandelin

TFAlgèbre

Segment pixels

Billard

Apport de l'ordinateur dans l'enseignement des maths

- Possibilités pour les étudiants
  - Occasions d'appliquer leurs apprentissages ou d'en acquérir de nouveaux
  - Occasions de multidisciplinarité
  - Occasions de motivation
  - Occasions d'explorations et de découvertes

Régression

Solaire

Dualité polyèdres

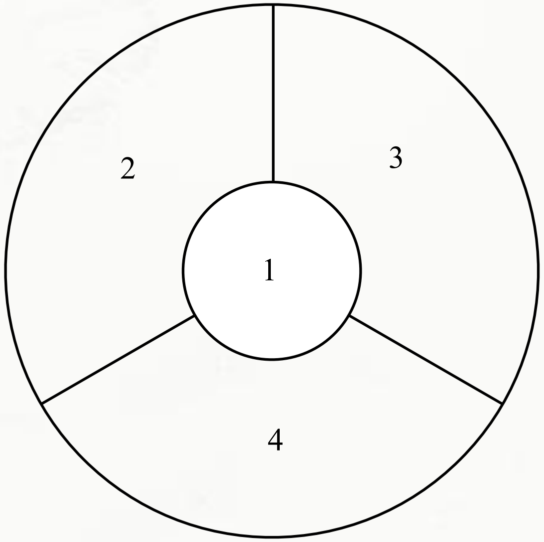
Mandelbrot

L’autre côté de la médaille

- Théorème des 4 couleurs
  Prouver versus comprendre
- Classification des groupes finis simples
- Problème d’empilement de Kepler
- Etc.
- Un peu de théorie…

Théorème des 4 couleurs

- Coloration des cartes planes
  - 4 couleurs parfois nécessaires
  - 4 couleurs suffisent



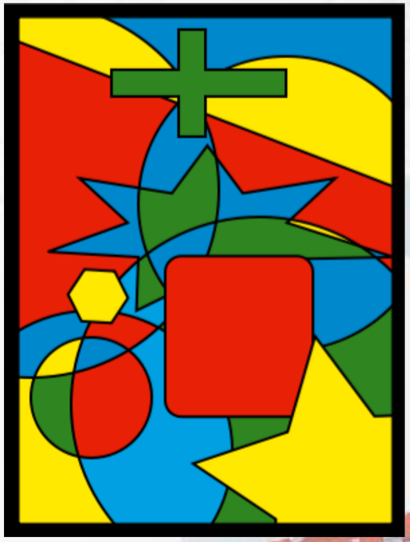


Illustration tirée deWikipedia

Théorème des 4 couleurs

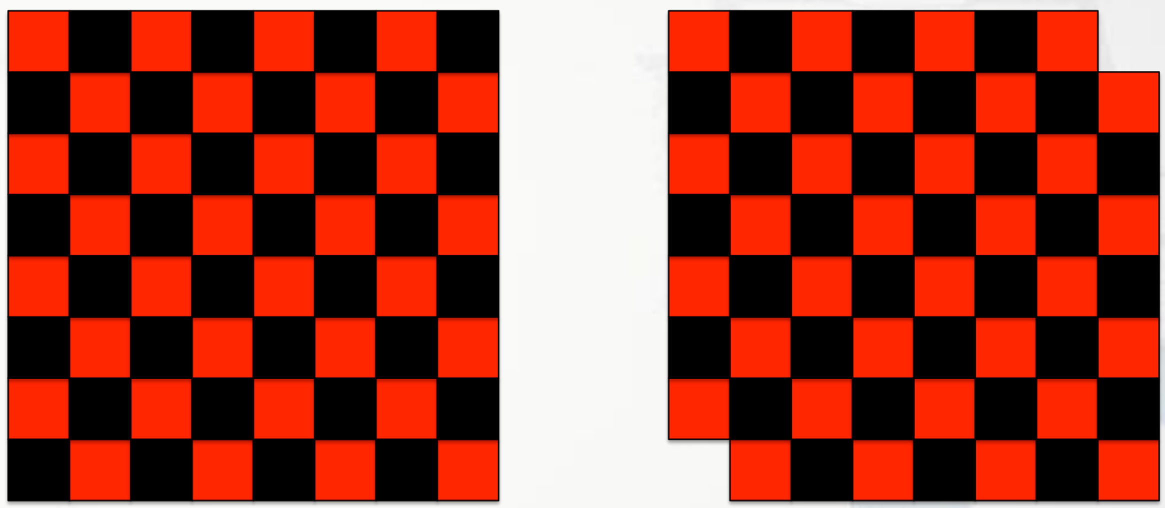
- On peut reformuler le problème via graphes

Illustration tirée deWikipedia

- Toutes les preuves trouvées nécessitent une utilisation essentielle d'ordinateurs
- Discussion
  - Est-ce une preuve acceptable en maths?
  - Compréhension? $\rightarrow$ On cherche encore…

Prouver n’est pas comprendre

- Problème : couvrir un échiquier avec des dominos



- Preuve par énumération via ordinateur versus preuve éclairante (*et généralisable*)

Classification des groupes finis simples

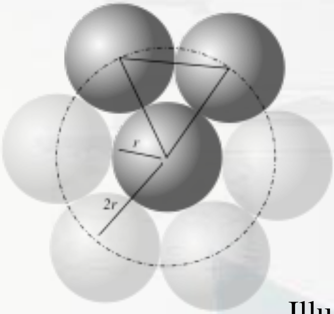
- Groupes finis simples = « briques » pour construire les groupes finis
- Classification
  - 18 familles infinies
  - 26 groupes sporadiques
- Démonstration (ordinateurs nécessaires)
  - Des dizaines de milliers de pages
  - Plus de 500 articles
  - Par plus de 100 auteurs

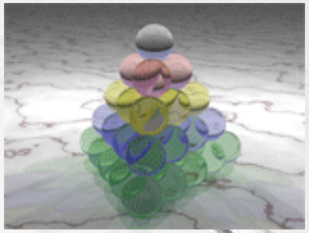
Classification des groupes finis simples

- Exemple de groupe sporadique: le monstre
  - 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 éléments
  - Groupe de rotations d'un espace à 196 883 dimensions
- Discussion
  - Utilisation essentielle de l'ordinateur ?
  - Compréhension ? $\rightarrow$ On cherche à simplifier…

Empilement des sphères

- Empilement compact de sphères
  - Dans le plan
  - Puis dans l'espace





Illustrations tirées deWikipedia

- Conjecture d'Euler :c'est l'arrangement spatial le plus compact

Empilement des sphères

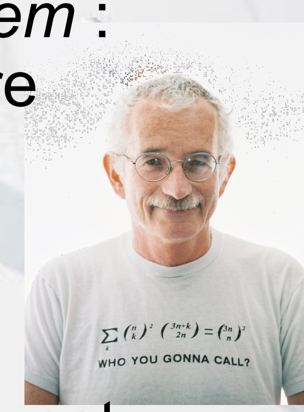
- La preuve
  - Ramenée à 100 000 problèmes de programmation linéaire
  - 250 pages de notes
  - 3 gigabytes : programmes, données, résultats
- Discussion
  - Utilisation essentielle de l'ordinateur ?
  - Compréhension ? $\rightarrow$ On cherche à simplifier…

Un peu de théorie…

- Dans toute théorie suffisamment riche pour « contenir » l'arithmétique,
- il existe des énoncés courts
- dont les preuves les plus courtes sont de longueur arbitrairement grande.
- (Ces énoncés courts sont intéressants dans la pratique des mathématiciens?)

« Mathématiques-fiction »

- L’ordinateur mathématicien
  - Articles de
    Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger
    (http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/)
  - *Proof of Conway's Lost Cosmological Theorem* :
    « Au moment d’écrire ces lignes, on a encore besoin de génies créateurs humains pour DÉFINIR des choses merveilleuses comme les nombres surréels… Mais à partir de ces définitions, tout le reste peut être fait par ordinateur (dont la programmation de routine est encore, pour le moment, faite par des humains). »



Conclusions (maths)

- Quel avenir pour les mathématiques ?
  - Intéressant/valorisant pour un mathématicien de tenter de trouver preuves plus simples, plus compréhensibles ?
  - Y réussira-t-on ?
  - À plus long terme, sommes-nous condamnés à une mathématique de plus en plus faite par des ordinateur, et de moins en moins accessible aux humains ?
- Comparaison avec le jeu d’échec

Conclusions (enseignement)

- Tension traditionnelle entre mathématiques
  - pures, culturelles, compréhensibles, certaines
    $\rightarrow$ Formation de l'esprit
  - appliquées, pratiques, efficaces, approximatives
    $\rightarrow$ Utilitarisme
- Technologie conduit à des mathématiques
  - expérimentales, sans preuves (erreurs possibles)
  - conventionnelles, sans preuves compréhensibles (utilisation de SCF avec algorithmes complexes)
- **Peut-on (*et* doit-on) chercher à y résister ?**

Expérience

Factorisation