

L'Algebrista : un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre

Michele Cerrulli – M. Alessandra Mariotti

*Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Italy
cerulli@dm.unipi.it, mariotti@dm.unipi.it*

TRADUIT DE L'ANGLAIS PAR : Caroline Bardini (DIDIREM) et Elisabeth Delozanne (LIUM et IUFM de Créteil)

RESUMÉ. Cet article présente un micromonde qui a été expérimenté en classe. Suite à des recherches que nous avons menées pour étudier le rôle du micromonde Cabri dans l'introduction de la géométrie en tant que domaine théorique, nous avons développé un nouveau projet de recherche dans le contexte de l'algèbre. Nous présentons les principales caractéristiques du projet et décrivons le micromonde que nous avons conçu et son fonctionnement. Nous décrivons brièvement une expérimentation et nous discutons cette expérience d'enseignement sur quelques exemples tirés de protocoles d'utilisation par les élèves

ABSTRACT. The paper presents a new microworld realised and experimented in the classroom. In the same trend of previous studies, concerning the role of the microworld Cabri in pupils' introduction to Geometry theory, the new research project has been designed in the context of Algebra. The main characteristics of the project will be outlined; in particular we are going to give a description of the microworld and its functioning. A brief sketch of the teaching experiment will be accompanied by the discussion of a few exemplar protocols.

MOTS CLÉS : micromonde, algèbre, géométrie, médiateur sémiotique, expressions équivalentes, théorie.

KEY WORDS: Microworld, Algebra, Geometry theory, semiotic mediator, equivalent expressions, theory.

1. Introduction

En Italie, comme dans d'autres pays, le calcul symbolique constitue un élément fondamental de l'enseignement secondaire en mathématiques. Dans les pratiques scolaires, les enseignants passent de fait une grande partie du temps alloué aux mathématiques à entraîner les élèves au calcul symbolique. Ceci constitue peut-être une des traditions les mieux établies dans l'enseignement secondaire en mathématiques. Les difficultés rencontrées par les élèves ont été bien étudiées. L'apparition puis la mise à la disposition des systèmes de calcul formel (par exemple le système Derive est accessible sur les calculatrices graphiques de type TI92) ont modifié les données et soulevé de nouvelles questions. Est-il possible d'intégrer l'usage d'outils informatiques dans les pratiques scolaires, non seulement pour faciliter les calculs, mais surtout pour contribuer à faire construire par les élèves des connaissances correctes et efficaces au niveau du sens et des procédures ? Des recherches ont clairement montré que l'évolution du symbolisme algébrique peut être décrit en terme d'aspects « opérationnels-structurels » [SFA 91, SFA 2000]. L'auteur met en évidence la nécessité mais aussi la difficulté pour les élèves d'assumer cette dualité.

« "The formula, with its operational aspect (it contains 'prompts' for actions in form of operators) must be also interpreted as the product of the process it represents."

"[...] our intuition rebels against the operation - structural duality of algebraic symbols, at least initially."¹ [SFA 91]

Les élèves privilégient le caractère opérationnel des formules et expressions algébriques. Bien que les pratiques scolaires fassent une large part au calcul symbolique, les élèves manifestent très peu de « conceptions structurelles » [KIER 92 p. 397]. Dans les écoles italiennes les élèves commencent très tôt à travailler sur la simplification d'expressions d'abord numériques puis littérales. Ce travail en classe de troisième (grade 9) où les premiers mois de l'année scolaire sont consacrés à l'introduction de l'algèbre. Les limites de l'approche opérationnelle du calcul symbolique ont été souvent mises en évidence de même que la nécessité d'une approche « structurelle et relationnelle » afin de maîtriser le calcul symbolique pour pouvoir l'utiliser efficacement [ARZ 91]. Des études décrivent les erreurs stratégiques commises par les élèves qui ont une longue expérience de l'algèbre mais sont incapables d'identifier les transformations intéressantes à effectuer pour atteindre un but. Quand l'exercice ne précise pas explicitement la transformation, les élèves sont incapables de prendre une décision et tournent en rond [KIE 92] appliquant des transformations sans but précis.

Une clé de l'approche structurelle est la notion d'expressions équivalentes qui peut être définie comme un ensemble d'axiomes. Le calcul symbolique est alors considéré comme des transformations successives d'expressions conservant leur

¹ La formule, dans son aspect opérationnel (elle suggère l'action associée aux opérateurs) doit être interprétée comme le résultat du processus qu'elle représente. Notre intuition, au moins au début, se révolte contre la dualité « opérationnelle/structurelle des symboles algébriques.

équivalence dans le cadre d'une théorie. Bien que cette perspective théorique ne soit pas très fréquemment adoptée, du moins dans les collèges italiens, c'est cependant celle dont nous nous réclamons². Selon l'hypothèse fondatrice de nos travaux, les axiomes, définitions et théorèmes sont les principaux éléments qui interviennent dans le calcul sur les expressions.

Une étude pilote a précédemment montré en quoi un environnement informatique peut aider à surmonter les difficultés bien identifiées que cette approche théorique peut soulever auprès des élèves. En particulier Mariotti [MAR et al. 98, MAR 02] analyse le fonctionnement de la médiation sémiotique telle qu'elle est mise en œuvre par le professeur qui introduit l'usage d'instruments spécifiques offerts par l'environnement Cabri-Géomètre. Dans cette perspective de recherche, un projet a été mis en place et un micromonde, l'Algebrista [CER 99, CER et al. 00] qui intègre les axiomes définissant la relation d'équivalence, a été conçu. Un prototype a été réalisé et expérimenté en classe de troisième.

Dans l'Algebrista, les expressions affichées peuvent être manipulées en utilisant des commandes activées par des boutons. Ces objets informatiques peuvent être interprétés comme des signes référant à des expressions et des axiomes (ou théorèmes) à l'intérieur de la théorie algébrique. La manipulation de ces signes correspond au calcul algébrique. En d'autres termes, le micromonde « embarqué » la théorie de l'algèbre des expressions.

Dans la suite de l'article, nous commençons par analyser brièvement notre hypothèse fondatrice qui consiste à considérer l'algèbre comme une théorie. Puis nous présentons le micromonde que nous avons conçu et réalisé. Enfin nous évoquons une expérimentation que nous avons menée.

2. L'algèbre considérée comme une théorie

L'algèbre n'est pas une branche indépendante des mathématiques. Au contraire, c'est souvent un outil pour résoudre des problèmes d'autres domaines. L'activité de résolution de problèmes mobilisant l'outil algébrique peut être caractérisée fondamentalement par les étapes suivantes :

1. traduction du problème en utilisant le symbolisme algébrique
2. calcul sur les expressions algébriques orienté par un objectif
3. interprétation, dans les termes du problème de départ, des expressions obtenues.

L'expression « calcul orienté par un objectif » n'a de sens que dans un contexte de résolution de problème. Dans ce cas l'objectif est de transformer des expressions sous une forme qui rend plus évidente la solution du problème ou qui donne plus d'informations ou encore qui permet d'appliquer un théorème connu ou de mobiliser une quelconque connaissance.

² Cette approche axiomatique du calcul algébrique a déjà été proposée en Italie par G. Prodi [PRO 75]

Par exemple, supposons que l'étape 1 donne l'expression « $x^2 - 2x + 6 - 3x$ » et que le problème consiste à trouver les zéros de cette expression.

Un objectif de calcul possible peut alors consister à factoriser l'expression pour pouvoir appliquer la règle « $a * b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ » et se ramener ainsi au problème « $a = 0$ ou $b = 0$ ». Dans ce cas, il pourra être intéressant de transformer l'expression « $x^2 - 2x + 6 - 3x$ » en « $(x - 2)(x + 3)$ » ce que l'on peut obtenir en utilisant deux fois la distributivité.

Une autre stratégie possible pour résoudre ce problème pourrait consister à appliquer la formule bien connue de résolution d'une équation du second degré. Dans ce cas, on transformera l'expression « $x^2 - 2x + 6 - 3x$ » en « $x^2 - 5x + 6$ » pour identifier les coefficients nécessaires à l'application des formules. Pour cela on utilisera les lois de commutativité et de distributivité.

Si le problème ne demande que de regarder ce qui se passe pour $x = 0$, alors on substituera la valeur 0 dans l'expression et on calculera le résultat. On pourra observer que le seul terme différent de 0 est 6.

Cet exemple montre comment différents types d'expressions peuvent induire différentes solutions ou peuvent être plus ou moins bien adaptées à la résolution d'un type de problème. En d'autres termes, le problème initial est transformé en problèmes équivalents plus faciles à résoudre. De ce point de vue le calcul symbolique consiste à remplacer une expression par une expression équivalente. En conséquence la notion *clé du calcul symbolique est la « relation d'équivalence entre les expressions »*.

Quand on produit une expression algébrique pour résoudre un problème, cette expression représente une procédure de calcul pour produire un résultat lié à la résolution du problème. Dans ce contexte une expression est transformée en une autre qui représente une nouvelle procédure de calcul qui donne le même résultat à partir des mêmes données. En d'autres termes, de ce point de vue, deux expressions sont dites équivalentes si et seulement si, en substituant les mêmes valeurs aux lettres, les deux procédures de calcul donnent toujours le même résultat.

Malheureusement, une telle définition ne fournit pas un moyen d'établir effectivement que deux expressions sont équivalentes. En fait le processus de substitution ne peut pas être un processus fini. De plus, une telle définition ne peut être utilisée que pour « vérifier » que deux expressions sont équivalentes mais elle n'aide pas à produire une nouvelle expression équivalente. On a donc besoin d'une définition de la relation d'équivalence qui ne nécessite pas de calculs numériques mais qui peut aussi servir *d'instrument pour transformer des expressions*. Une telle équivalence peut être définie en prenant comme axiome les propriétés élémentaires des opérations numériques. C'est le choix que nous avons retenu [CER et al. 2000].

En résumé, nous considérons le « *calcul symbolique* » comme une activité orientée par un objectif consistant à transformer des expressions en utilisant des règles données par les axiomes adoptés. Ainsi le calcul symbolique prend son sens à l'intérieur d'une théorie. Dans cette perspective, le micromonde l'Algebrista a été

conçu pour « embarquer » les axiomes définissant la relation d'équivalence algébrique. Un prototype a été conçu et réalisé. Il a été testé dans des classes de troisième. Contrairement à d'autres systèmes de calcul symbolique, l'Algebrista est fondé sur l'application de *transformations élémentaires*, c'est-à-dire sur l'application par l'utilisateur d'un seul axiome (théorème ou définition) à chaque pas, le logiciel n'effectuant aucun calcul automatique.

Dans notre micromonde, des signes particuliers servent de référents aux expressions, axiomes et théorèmes. En d'autres termes, le micromonde offre un homologue physique aux expressions et axiomes ce qui permet à l'utilisateur de visualiser et expliciter les entités mathématiques et les relations qui sont en jeu dans le calcul symbolique. En particulier, en accord avec la théorie de Vygotsky, les expressions et les commandes pour agir sur elles, peuvent être pensées comme des signes extérieurs de la théorie algébrique, et en tant que tels, ils peuvent devenir des instruments de médiation sémiotique [VYG 78]. En d'autres termes ils peuvent être utilisés par le professeur dans le cadre de l'activité en classe avec comme objectif d'introduire le calcul littéral en tant qu'activité théorique.

3. L'Algebrista : description générale

L'Algebrista est un micromonde qui « embarque » une théorie élémentaire des expressions algébriques. Agir dans le micromonde consiste à transformer des expressions, une chaîne de transformations correspondant à une preuve de leur équivalence à l'intérieur de la théorie. Les principes fondamentaux qui ont guidé la conception de L'Algebrista sont les suivants :

- L'Algebrista est un **système de calcul symbolique** qui est entièrement sous contrôle de l'utilisateur. C'est un micromonde d'expressions algébriques où l'utilisateur transforme des expressions s'appuyant sur les propriétés fondamentales des opérations, qui constituent les axiomes de la théorie locale.
- Les axiomes sont représentés par les boutons « propriétés des opérations ». Ces boutons n'ont aucun comportement implicite ; ils ne font qu'appliquer les transformations qui découlent directement des axiomes qu'ils représentent. De plus, un bouton n'applique jamais un axiome de façon récursive, il ne l'applique qu'une seule fois.
- Les boutons qui représentent les relations d'équivalence sont réversibles et fonctionnent aussi bien dans un sens que dans l'autre. Ceci est indispensable pour faire apparaître la signification de l'équivalence des expressions, et aussi pour associer au signe « égal » (« = ») sa signification d'équivalence.
- Certains boutons représentent des conventions partagées par la communauté mathématique tandis que d'autres représentent des conventions qui seront négociées au sein de la classe. Il s'agit d'essayer de rendre explicites les aspects conventionnels des activités afin de rendre explicites les aspects conventionnels des mathématiques.

- L'interaction est fondée sur la manipulation directe et l'utilisation de la souris pour sélectionner une expression et cliquer sur des boutons. Ainsi l'utilisateur n'a pas besoin d'apprendre un nouveau langage pour pouvoir interagir avec le système contrairement à d'autres environnements informatiques fréquemment employés dans des écoles tels LOGO et PASCAL.
- L'Algebrista ne peut pas transformer une expression si l'utilisateur ne le commande pas explicitement en actionnant un bouton. Contrairement à d'autres calculateurs symboliques, l'utilisateur dispose du contrôle total sur l'ordinateur.
- Une fois le nouveau théorème démontré, l'utilisateur peut créer un nouveau bouton pour le représenter et le théorème est ainsi ajouté au système d'axiomes et théorèmes. Le micromonde évolue ainsi parallèlement à l'évolution de la théorie.

1.1. Brève description du logiciel

Après la séquence d'accueil, L'Algebrista propose à l'utilisateur quatre menus : *Base*, *Meta*, *Aiuto*³ et *Info*. Comme on peut s'y attendre, les menus *Info* et *Aiuto* fournissent des informations sur L'Algebrista et sur le fonctionnement de ses micromondes : le menu *Info* contient des informations sur les droits d'auteur et la licence ; et le menu *Aiuto* sur les principales caractéristiques des différents menus et une « aide en ligne ».



Figure 1 : Les Menus Base et Meta

1.2. Le menu Base

Ce menu donne accès à l'environnement de travail principal de L'Algebrista ; l'utilisateur peut choisir une *Teoria* (théorie), c'est-à-dire un micromonde

³ « Aiuto » signifie « aide » en Italien. Pour le moment seule la version italienne du logiciel a été développée.

d'expressions algébriques. La Figure 2 montre les trois théories utilisées lors de l'expérimentation de classe que nous menons actuellement.

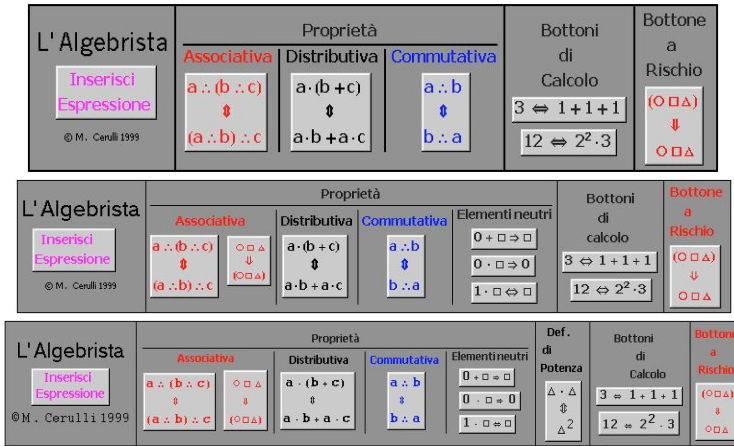


Figure 2 : Les théories 0, 1 et 2

Chaque *théorie* est composée de palettes (des fenêtres contenant des boutons) et de bloc-notes (les environnements de travail). Pour commencer une activité, l'utilisateur doit écrire une expression dans un bloc-notes et l'insérer dans le micromonde. Ensuite il va mener son calcul en sélectionnant des sous-expressions et en cliquant sur les boutons disponibles dans les palettes. Tous les boutons (excepté un comme nous le verrons par la suite) produisent une expression équivalente aux expressions qu'il transforme.

1.3. Le menu Meta

Le mot *meta* désigne dans ce cas une « meta-théorie ». En effet, ce menu propose deux instruments pour créer de nouvelles théories⁴.

Le premier instrument s'appelle *Il Teorematore*, il permet à l'utilisateur de créer de nouveaux boutons pour représenter de nouvelles règles de transformation qui, après leur création, seront disponibles dans les palettes et utilisées pour transformer des expressions.

⁴ Nous rappelons que nous entendons par *théorie* un ensemble d'axiomes, définitions et théorèmes représenté(e)s par les boutons.

Le second instrument s'appelle *Personalizza Palette* (palette de personnalisation) ; c'est un ensemble de boutons prêts à l'emploi et d'instructions sur la façon de créer des palettes à partir de ces boutons et en utilisant *Il Teorematore*.

A l'aide de ces deux instruments, les élèves et enseignants peuvent vraiment construire leurs propres théories en construisant des palettes contenant des boutons incluant les axiomes, définitions et théorèmes qu'ils souhaitent pouvoir utiliser.

1.4. Description de l'interaction avec le micromonde de base de L'Algebrista

Nous allons présenter les principales commandes des théories présentées dans le menu *Base* en analysant quelques aspects de l'interaction ordinateur-utilisateur.

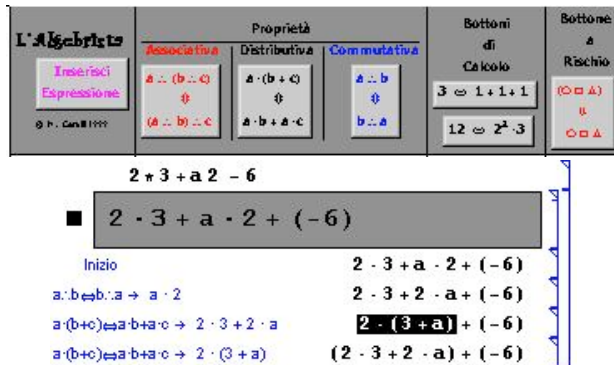


Figure 3 : Dans un bloc-notes, l'utilisateur écrit l'expression sur laquelle il travaille : $(2 * 3 + a * 2 - 6)$ dans l'exemple), puis il la sélectionne et clique sur le bouton *Inserisci espressione* (Insérer une expression). L'Algebrista crée alors une nouvelle zone de travail dans laquelle les boutons sont actifs.

La fig.3 présente une palette de L'Algebrista. Plus précisément elle montre la première théorie que nous avons employée lors de nos expérimentations en classe et elle correspond à la *Teoria 0* du menu *Base*. Cette palette est divisée en quatre secteurs :

- le bouton *Inserisci Espressione* (insérer l'expression) ;
- les boutons des propriétés d'addition et multiplication ;
- les boutons de calcul ;
- le bouton à risque (« *Bottone a Rischio* »).

Cette partition a été établie pour être cohérente avec les différents rôles joués par les boutons dans les activités en classe. En particulier, nous avons séparé les boutons qui représentent les propriétés des opérations et ceux qui exécutent les calculs dans

le but de distinguer les activités de transformation fondées sur les axiomes de celles s'appuyant sur les calculs numériques.

Un exemple d'interaction a été reproduit dans la Figure 3. L'utilisateur écrit dans le bloc-notes l'expression sur laquelle il ou elle veut travailler (« $2*3+a^2-b$ » dans notre exemple), puis il ou elle sélectionne l'expression et clique sur *Inserisci Expression* (« insérer l'expression »), L'Algebrista crée alors un nouvel environnement de travail où l'expression originale s'affiche à gauche de l'écran sous le titre *Inizio* (« début »). L'*insertion* de l'expression est fondamentale car elle marque l'entrée dans le micromonde où on peut agir seulement en utilisant les boutons disponibles dans L'Algebrista.

Remarquons que lorsqu'une expression est insérée, le logiciel l'affiche sous une forme légèrement différente.

- Toute multiplication est représentée par un point (« $2.3+a.2$ ») qu'elle ait été entrée par l'utilisateur en utilisant un point (« . »), ou une étoile (« $2*3$ ») ou encore un espace (« $a 2$ »).
- Toute soustraction est transformée en addition et toute division en multiplication.

L'Algebrista ne connaît ni la soustraction ni la division. Ceci correspond à un choix didactique que nous avons opéré : nous voulons que les élèves travaillent dans un « environnement commutatif ».

L'interaction se fait toujours en mode « objet-action », c'est-à-dire en sélectionnant tout ou partie d'une expression puis en cliquant sur le bouton correspondant à la transformation que l'on veut appliquer à l'expression sélectionnée. La sélection a été conçue de façon à ce que l'utilisateur ne puisse jamais sélectionner des éléments d'expressions qui ne constituent pas une sous-expression d'un point de vue algébrique. Par exemple dans l'expression $a . b + c$, il n'est pas possible, de sélectionner $b + c$ si l'utilisateur tente de le faire, le logiciel étend automatiquement la sélection à $a . b + c$. Par contre on peut sélectionner $a . b$ ou c ou a , etc. Les expressions du micromonde intègrent une caractéristique algébrique fondamentale des expressions mathématiques : leur structure arborescente.

Revenons à l'exemple précédent, l'expression peut maintenant être transformée en sélectionnant le terme $a . 2$ et en cliquant sur le bouton « propriété de la commutativité ». Une nouvelle expression est produite par le système et affichée à la ligne suivante où le terme $a . 2$ est remplacé par le terme $2 . a$ tandis qu'une mention apparaît sur la gauche indiquant le nom du bouton employé et la sous-expression sur laquelle il a agi. À l'étape suivante une partie de l'expression est transformée en employant la distributivité. A la dernière étape nous avons appliqué la distributivité dans l'autre sens en utilisant le même bouton⁵. En cohérence avec nos hypothèses didactiques, les boutons intègrent tous les aspects des propriétés des opérations sans privilégier un sens de transformation alors que d'autres calculateurs symboliques utilisent des commandes distinctes pour inverser une commande particulière.

⁵ Le script associé au bouton vérifie la structure de l'expression et décide comment la transformer ; si aucune structure n'est reconnue, alors l'expression est laissée telle quelle.

Les boutons de L'Algebrista produisent toujours une expression correcte équivalente à l'expression sur laquelle ils ont été appliqués. La seule exception est le *bouton à risque* qui sert à supprimer des parenthèses : par exemple il transforme $a + (b + c)$ en $a + b + c$ mais aussi en $a \cdot (b + c)$ en $a \cdot b + c$. Ce bouton a été isolé des autres à l'interface et mis en évidence afin que l'utilisateur le distingue et l'utilise avec précaution. Son rôle et son usage doivent être négociés en classe afin de clarifier l'usage conventionnel des parenthèses et leur rapport avec les axiomes algébriques.

Notons enfin que les propriétés de commutativité et d'associativité ont été représentées par le symbole « \cdot », qui remplace « $+$ » et « \cdot », ceci pour des raisons d'économie mais également pour familiariser les élèves avec la généralisation de structures.

2.1. Il Teorematore

Il Teorematore est un environnement particulier qui permet à l'utilisateur de créer de nouveaux boutons. La Figure 4 présente l'environnement et ses instructions.

La manipulation de *Il Teorematore* est très simple, il suffit d'écrire la nouvelle loi de transformation, de la sélectionner et finalement de cliquer sur le bouton *Teorema*. À notre avis il est essentiel que, pour créer de nouveaux boutons, l'utilisateur ne se voit pas obligé d'apprendre un nouveau langage, mais qu'il ait simplement à employer des symboles mathématiques.



Figure 4 : L'environnement *Il Teorematore*

Grâce à *Il Teorematore*, la théorie embarquée dans L'Algebrista peut évoluer en même temps que le développement des connaissances mathématiques des élèves.

En d'autres termes, l'utilisateur peut créer autant de nouveaux boutons qu'il ou elle veut pour ensuite les employer lors de ses futures interactions avec L'Algebrista.

Conformément aux principes de base que nous avons énoncés, L'Algebrista permet à l'utilisateur, grâce à *Il Teorematore*, de créer de nouveaux boutons correspondant à des transformations bi-directionnelles, c'est-à-dire des boutons qui présentent toutes les propriétés des relations d'équivalence⁶. Cette caractéristique

⁶ En particulier de tels boutons ont un comportement structurel : si on a un bouton « $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ » il s'applique sur $a^2 - b^2$ et sur $(a + b)(a - b)$ transformant l'une des deux expressions en l'autre. Il a le

distingue L'Algebrista des autres calculateurs symboliques. En particulier DERIVE ne permet pas à l'utilisateur de créer ses propres commandes tandis que d'autres logiciels d'enseignement (comme MILO et Theorist) ne permettent que la création de commandes unidirectionnelles, que l'on ne peut inverser qu'en utilisant une commande différente.

Remarquons enfin que *Il Teorematore* **ne vérifie pas** la correction mathématique d'une nouvelle règle de transformation. Ceci découle d'un choix didactique : nous voulons que l'élève soit responsable de la validation d'un nouveau théorème ou d'une nouvelle règle de transformation. C'est donc l'élève qui contrôle ainsi l'ensemble d'axiomes et de théorèmes, c'est-à-dire la théorie qu'il ou elle vient d'incorporer dans L'Algebrista. Un tel choix se justifie dans le cadre de notre expérimentation en raison du contrat didactique très spécifique que nous mettons en place. Il peut ne pas s'avérer optimal dans d'autres contextes.

2.2. Informations techniques

L'Algebrista est une application développée à l'aide du logiciel *Mathematica*. Pour pouvoir le faire fonctionner, il est nécessaire de disposer du logiciel Mathematica 3.0 (ou une version plus récente). Il fonctionne sur toutes les plateformes usuelles (ex : Linux, Macintosh, Windows). Le code se repose sur le langage de Mathematica et l'application consiste en un ensemble de bloc-notes et palettes.

Chaque expression mathématique est représentée de deux façons : « externe », en utilisant la notation mathématique usuelle, c'est-à-dire la notation infixée et « interne », en utilisant la notation préfixée.

Les boutons sont codés en utilisant les caractéristiques graphiques de *Mathematica*. Ils sont associés à une fonction qui traduit en une notation préfixée l'expression sélectionnée écrite en notation infixée, puis transforme l'expression en employant la « règle de transformation » et finalement traduit la nouvelle expression sous une notation infixée pour l'afficher. Toutes ces transformations ont été spécialement codées pour le prototype. Aucun calcul algébrique sur les expressions n'est effectué par Mathematica à l'exception de calculs numériques simples (addition et multiplication) et des factorisations numériques.

La fonction associée à une règle de transformation n'effectue aucun calcul sur les polynômes. La transformation d'expressions repose uniquement sur le changement de structures. Ces fonctions extraient les « feuilles » de l'arbre représentant une expression et les réorganisent en une nouvelle structure d'arbre. Cette méthode n'est pas optimisée en terme de vitesse d'exécution mais son principe a facilité le développement de « Il Teorematore », et permet de construire facilement de nouvelles fonctions de transformation.

même comportement sur des expressions plus compliquées mais de même structure comme, par exemple, $(x + 2y)^2 - (c - d)^2$.

3. Brève présentation de l'expérimentation en classe

Une première expérimentation s'est déroulée pendant l'année scolaire 1998/1999 dans une classe de troisième [CER 99]. Elle a permis de réaliser une seconde version du prototype qui a été expérimentée dans une autre classe du même niveau l'année suivante. Cette seconde expérimentation en classe fait le lien entre notre projet de recherche sur l'algèbre et le projet que nous avons déjà mentionné concernant l'initiation des élèves à la géométrie considérée comme une théorie [MAR et al. 1997, MAR 2000, 2001]. L'idée est d'initier les élèves au raisonnement dans le cadre d'une théorie simultanément en géométrie et en algèbre en s'appuyant sur les environnements proposés par Cabri et par l'Algebrista. Un projet de recherche sur l'efficacité de l'utilisation conjointe de tels micromondes a été mis en place pour l'année 2000-2001 en classe de troisième et de seconde.

Une présentation détaillée du projet n'est pas l'objet du présent article. Nous donnons les idées essentielles qui ont guidé la conception de la séquence d'activités concernant l'introduction à une vision théorique de l'algèbre. Nos deux principaux objectifs sont les suivants :

- initier les élèves au calcul symbolique
- initier les élèves à une perspective théorique

Notre hypothèse étant que la notion de *relation d'équivalence* est le principe fondamental du calcul symbolique, nous en avons fait le point de départ des activités des élèves.

Nous commençons par introduire le problème de la comparaison d'expressions. A ce niveau scolaire, les élèves considèrent que deux expressions numériques sont équivalentes quand elles permettent de calculer le même nombre. Il n'est donc pas difficile de négocier l'interprétation d'expressions numériques en tant que procédures de calcul qui sont équivalentes si elles conduisent au même résultat.

Le fait de considérer des expressions en tant que procédures de calcul permet d'introduire les propriétés d'addition et multiplication en tant que principes (les axiomes de la théorie) qui permettent de déterminer **a priori** si deux procédures de calcul conduisent ou non au même résultat. Si deux expressions sont équivalentes en se fondant sur ces propriétés, alors le calcul des deux expressions doit aboutir au même nombre résultat. On introduit ainsi une nouvelle relation d'équivalence entre expressions fondée sur l'utilisation successives des boutons de l'environnement :

Si une expression peut être transformée en une autre en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication (nos axiomes), alors les deux expressions sont équivalente (définitions axiomatiques).

Dans le micromonde de L'Algebrista ceci correspond à :

Deux expressions sont équivalentes si l'on peut transformer l'une en l'autre en utilisant des boutons donnés.

La nouvelle définition de la relation d'équivalence est introduite par plusieurs activités de comparaison d'expressions donnant lieu à des discussions collectives dans la classe. Dès que la relation d'équivalence est acceptée, une nouvelle terminologie est introduite : on dit que l'équivalence de deux expressions est

démontrée si une expression se transforme en une autre en utilisant les axiomes ; on dit qu'une équivalence est **vérifiée** si des calculs menés sur les deux expressions donnent le même résultat.

Avec l'introduction d'expressions algébriques, l'idée d'équivalence fondée sur les résultats de calculs sur des nombres doit être généralisée :

Deux expressions sont équivalentes si et seulement si pour tout nombre que l'on substitue aux lettres, les deux expressions numériques ainsi obtenues donnent le même résultat quand on les calcule (définition fonctionnelle).

Il a été prouvé [LAN 68] que, pour les polynômes à n variables (qui sont les expressions qui nous concernent à ce niveau scolaire), la définition fonctionnelle et la définition axiomatique sont équivalentes. On ne démontre pas en classe l'équivalence de ces définitions : dans notre expérimentation c'est un axiome de la théorie que nous introduisons dans des discussions collectives à l'occasion d'activités de comparaison d'expressions. En particulier, nous nous attachons à mettre en évidence les différents rôles joués par les deux définitions : l'utilisation des axiomes est le seul moyen de démontrer l'équivalence des expressions tandis que la vérification numérique est le moyen privilégié de montrer que deux expressions ne sont pas équivalentes. En fait, d'une part il est impossible de substituer tous les nombres aux lettres en un temps fini et, d'autre part, le fait de ne pas réussir à transformer l'expression ne prouve pas que ce soit impossible.

L'activité de comparaison d'expressions conduit les élèves à prouver de nombreuses relations d'équivalence et certaines sont ajoutées en tant que théorèmes dans la théorie partagée par la classe. À l'intérieur du micromonde, Il Teorematore peut être utilisé pour ajouter un choix de boutons correspondant aux équivalences prouvées [CER 00]. La théorie *partagée par la classe* et la théorie *embarquée dans l'Algebrista* s'accroissent donc en parallèle.

Teoremi.nb -STUDENT VERSION-			
Opposti $\Delta - \Delta \Rightarrow 0$	Somma Termini Simili $2 \cdot \Delta + 3 \cdot \Delta \Rightarrow 5 \cdot \Delta$	Quadrato di un binomio $a^2 + 2 ab + b^2 \Leftrightarrow (a + b)^2$	Differenza di quadrati $a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a + b) (a - b)$
Cubo di un binomio $a^3 + 3 a^2 b + 3 ab^2 + b^3 \Leftrightarrow (a + b)^3$		Quadrato di un trinomio $a^2 + b^2 + c^2 + 2 ab + 2 ac + 2 bc \Leftrightarrow (a + b + c)^2$	

Figure 5 : Quelques théorèmes créés par les élèves

4. La médiation sémiotique

Dans le cadre théorique de médiation sémiotique développé par Vygotsky, les signes utilisés jouent un rôle central comme médiateurs des significations mathématiques. L'Algebrista a été conçu comme un micromonde qui pourrait être un médiateur de la notion de théorie dans le contexte de l'algèbre. L'algèbre en tant

que théorie telle qu'elle est embarquée dans le micromonde, et évoquée par les commandes et les expressions disponibles dans l'Algebrista.

Selon la théorie de Vygotsky, on peut considérer les commandes et les expressions comme des signes extérieurs de la théorie algébrique qui ainsi sont susceptibles de devenir des instruments de médiation sémiotique [MAR 02].

Le processus de construction d'une théorie qui consiste à prouver, à accepter et à utiliser de nouveaux théorèmes est évoqué par des activités spécifiques à l'intérieur du micromonde l'Algebrista. Prouver que deux expressions sont équivalentes en algèbre correspond à démontrer un théorème et donc, dans le micromonde, transformer une expression en une autre en utilisant les boutons disponibles correspond à démontrer un théorème. De plus, en utilisant *le Teorematore*, créer un bouton correspond à établir une nouvelle relation d'équivalence et l'ajouter à la liste des boutons disponibles correspond à accepter un nouveau théorème. Enfin, utiliser un bouton créer avec *le Teorematore* correspond à utiliser un nouveau théorème.

En résumé, les principaux instruments de médiation sémiotiques offerts par l'Algebrista concernant la théorie algébrique sont les suivants :

- Les expressions dans l'Algebrista sont les signes des expressions algébriques
- Les boutons disponibles sont les signes des axiomes et des définitions
- Transformer une expression en une autre en utilisant les boutons correspond à prouver que les deux expressions sont équivalentes et la chaîne des pas de justification affichée correspond à la preuve
- Les nouveaux boutons construits en utilisant *le Teorematore* représentent les théorèmes
- Ajouter de nouveaux boutons à l'ensemble des boutons disponibles renvoie à une opération au niveau de la méta-théorie celle d'ajouter de nouveaux théorèmes à la théorie.
- Dans les sections suivantes nous en donnons quelques exemples tirés des données que nous avons recueillies pendant l'expérimentation. Notre objectif est ici de montrer comment les différents signes peuvent fonctionner comme médiateurs sémiotiques.

4.1. Les signes de l'Algebrista

La représentation d'une expression dans L'Algebrista embarque sa structure mathématique en arbre et celle-ci devient explicite, tangible, lorsque l'utilisateur interagit avec l'environnement. Dans le cas des tâches de comparaisons d'expressions le protocole de Lia (classe de troisième) nous fournit un exemple de la façon dont les élèves peuvent utiliser la fonction de sélection d'une expression comme un signe extérieur du contrôle de la structure algébrique d'une expression (Figure 6)

Elle essaye de prouver que deux expressions sont équivalentes et, à chaque étape, elle souligne (sélectionne) une sous-expression et la transforme en appliquant

un axiome. Ce comportement rappelle l'interaction avec l'Algebrista : quand on transforme une expressions, on doit d'abord sélectionner une sous expression puis cliquer un bouton qui représente l'axiome qu'il convient d'appliquer. De plus, Lia se réfère clairement aux boutons de l'Algebrista puisqu'elle utilise le mot bouton (en italien « Bottone ») et utilise l'icône des boutons « élément neutre » et des boutons « calcul ». En particulier, elle réfère aux boutons suivants :

- $0 + A \Rightarrow A$: ce bouton transforme une expression de type $0 + A$ en A , où A peut être une expression quelconque. Ce bouton correspond à l'axiome définissant l'élément neutre de l'addition.
- $0 * A \Rightarrow 0$: ce bouton transforme une expression de type $0 * A$ en 0 . Ce bouton correspond à l'axiome définissant 0 comme élément absorbant pour la multiplication. Dans notre expérimentation, cette propriété est considérée comme un axiome.
- $3 \Leftrightarrow 1 + 1 + 1$: ce bouton transforme un nombre en une somme de un et, s'il est appliqué à une somme de nombre, permet de calculer le résultat de l'opération. Ce bouton correspond à la définition de la somme de nombres et ne s'applique pas sur des lettres.

Handwritten derivation showing the simplification of $(a+b) \cdot 0 + 0 \cdot b$ to $(a+b) \cdot 0 + 0 \cdot b$ using various algebraic properties:

$$\begin{aligned}
 (a+b) \cdot 0 + 0 \cdot b &= (a+b) \cdot b + (-1) \cdot (b \cdot b) + 0 \cdot (a+b) \text{ commut.} \\
 &= (a+b) \cdot b + (-1) \cdot (b \cdot b) + (a+b) \cdot 0 \text{ commut.} \\
 &= (a+b) \cdot b + (a+b) \cdot 0 + (-1) \cdot (b \cdot b) \text{ commut.} \\
 &= (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b + (-1) \cdot (b \cdot b) \text{ distrib.} \\
 &= (a+b) \cdot a + (a \cdot b + b \cdot b) + (-1) \cdot (b \cdot b) \text{ bott. e usch.} \\
 &= (a+b) \cdot a + a \cdot b + b \cdot b + (-1) \cdot (b \cdot b) \text{ commut.} \\
 &= (a+b) \cdot a + a \cdot b + b \cdot b + (b \cdot b) \cdot (-1) \text{ distrib.} \\
 &= (a+b) \cdot a + a \cdot b + (b \cdot b) \cdot (1 + (-1)) \text{ bott. di calcoli} \\
 &= (a+b) \cdot a + a \cdot b + (b \cdot b) \cdot 0 \text{ elemento neutro } \begin{matrix} 1+(-1)=0 \\ 0 \cdot x = 0 \end{matrix} \\
 &= (a+b) \cdot a + a \cdot b + 0 \text{ elemento neutro } \begin{matrix} 0 \cdot x = 0 \\ x + 0 = x \end{matrix} \\
 (a+b) \cdot 0 + 0 \cdot b &= (a+b) \cdot 0 + 0 \cdot b
 \end{aligned}$$

Figure 6 : L'exemple de Lia

Dans le cas de cette tâche de comparaison dans un environnement papier-crayon, le protocole montre que les élèves ont utilisé des signes de l'Algebrista, en particulier la fonction de sélection ou des icônes de boutons.

4.2. Établir des conjectures et démontrer

Dans les activités en classe, on demandait aux élèves de résoudre des problèmes aussi bien dans l'environnement du micromonde que dans l'environnement papier-crayon. L'analyse de la solution proposée hors environnement informatique met en évidence un aspect intéressant du processus de construction du sens attribué à la notion de théorie.

Considérons l'exemple suivant. On demandait aux élèves, dans l'environnement papier-crayon, de comparer trois expressions, de trouver celles qui étaient équivalentes et de prouver leurs conjectures.

1) Considérez les expressions suivantes :

$a \cdot a - b \cdot b$ $a \cdot (a - b)$ $(a - b) \cdot (a - b) + 2 \cdot (a - b) \cdot b$

- a) A votre avis, lesquelles sont équivalentes ? lesquelles ne le sont pas ? Pourquoi ? Pouvez-vous le démontrer ?
 b) Analysez votre démonstration et dites, à chaque étape, si vous utilisez un théorème ou un axiome.

1) $a \cdot a - b \cdot b$
 2) $a \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b$
 3) $(a - b) \cdot (a - b) + 2 \cdot (a - b) \cdot b =$
 $= (a - b) \cdot (a - b) + 2 \cdot (a \cdot b - b \cdot b) =$
 $= a \cdot a - a \cdot b - a \cdot b + b \cdot b + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot b =$
 $= a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b + b \cdot b + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot b =$
 $= a \cdot a - b \cdot b$

Penso che la 1^a e la 3^a siano equivalenti, e non la 2^a, perché la 1^a e la 3^a, applicandoci delle proprietà vengono uguali, mentre la seconda no.

b) $(a - b) \cdot (a - b) + 2 \cdot (a - b) \cdot b =$ Ho applicato la proprietà distributiva.
 $= (a - b) \cdot (a - b) + 2 \cdot (a \cdot b - b \cdot b) =$ Ho applicato la proprietà distributiva su questo due pezzi.
 $= a \cdot a - a \cdot b - a \cdot b + b \cdot b + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot b =$ Ho sommato a due elementi uguali - a · b - a · b e il risultato è - 2 · a · b. Ho visto con il mio opposto di elementi 0, per il 2° teorema.
 $= a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b + b \cdot b + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot b$ Ho mandato via anche + b · b con il mio opposto, e siccome quello era - 2 · b · b, mi è rimasto - b · b.
 $= a \cdot a - b \cdot b$ a questo punto la 3^a espressione è uguale alla prima.

Figure 7 : Silvio (classe de troisième) écrit

Je pense que la première et la troisième sont équivalentes mais pas la seconde car en appliquant les propriétés elles deviennent égales, mais pas la deuxième

J'applique la propriété de distributivité

J'applique la propriété de distributivité sur les deux parties. J'ajoute les deux termes égaux $- a * b - a * b$ et j'annule le résultat avec l'opposé et j'obtiens zéro pour le premier théorème.

J'annule aussi $+ b * b$ avec son opposé et comme cela faisait $- 2 b * b$ j'obtiens $- b * b$

Ici, la troisième expression est égale à la première

Silvio (Figure 7) d'abord vérifie l'équivalence par le calcul. Une fois qu'il a établi ses conjectures, il utilise les propriétés des opérations (les axiomes) et un théorème pour les prouver.

Silvio commence par réduire la seconde et la troisième expression sous une forme qui facilite la comparaison. Cette partie du protocole est typique des réponses d'élèves lorsqu'on leur demande de « calculer » des expressions algébriques. Dans le cas de Silvio, on ne lui avait pas demandé de calculer, mais il utilise ses compétences en calcul pour formuler une conjecture. Il trouve ainsi que la troisième expression est équivalente à la première. Remarquons que la façon dont Silvio explique comment il a posé sa conjecture anticipe sur sa démonstration. L'élève, dès la phase heuristique, utilise les propriétés de l'opération et les axiomes comme des outils pour effectuer une tâche spécifique.

Dans la dernière partie du protocole, Silvio, comme on le lui demande, écrit une démonstration correcte de l'équivalence des deux expressions en mentionnant axiomes et théorèmes. D'un point de vue formel, la chaîne des expressions équivalentes de la seconde partie de la réponse est une véritable démonstration, alors que la chaîne décrite dans la première partie ne l'est pas car les étapes ne sont pas expliquées en se référant à la théorie algébrique.

Marta (Figure 8) substitue des nombres aux lettres pour trouver quelles sont les expressions équivalentes. Cependant elle utilise des axiomes et des théorèmes (comme elle le remarque) pour prouver l'équivalence de la première et de la troisième expression.

Contrairement à Silvio, Marta n'utilise pas les propriétés des opérations (axiomes) pour produire sa conjecture : elle substitue des nombres aux lettres et calcule les expressions obtenues. Cependant quand elle prouve l'équivalence entre la première et la troisième expression, Marta produit une démonstration correcte. Elle indique à chaque étape, l'axiome ou le théorème qu'elle utilise et souligne la sous-expression sur laquelle elle l'applique. En particulier, comme on le lui demande, elle spécifie pour chaque équivalence s'il s'agit d'un axiome ou d'un théorème. Cette distinction entre les principes donnés (les

axiomes) et les relations d'équivalence prouvées (les théorèmes) trouve une correspondance dans l'Algebrista : les axiomes sont représentés par des boutons donnés et les théorèmes sont produits par les élèves en utilisant // *Teorematore*. Le fait que les élèves participent activement à la construction de la théorie embarquée dans l'Algebrista est attesté par la façon dont les élèves réfèrent au théorème $a - a = 0$. Marta utilise le mot « notre théorème » et Silvio l'appelle le premier théorème.

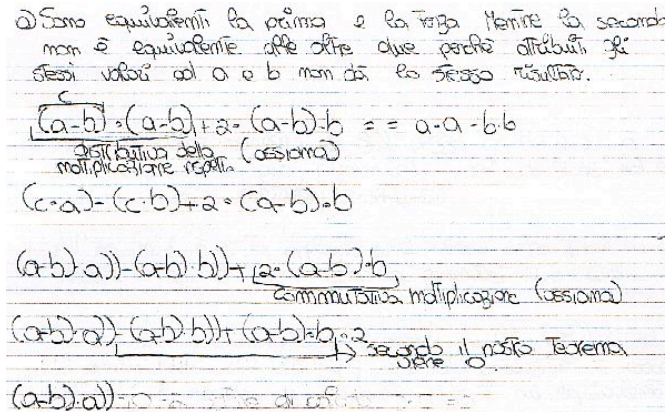


Figure 8 : Le protocole de Marta (classe de troisième).

Marta écrit :

La première et la troisième expressions sont équivalentes mais pas la seconde car en prenant le même nombre pour a et b le résultat n'est pas le même que pour les deux autres.

Distributivité de la multiplication (axiome)

Commutativité de la multiplication (axiome)

Suit notre théorème il donne 0

Le dernier exemple que nous allons considérer est le cas de Marco (Figure 9). Il ne donne aucune explication sur la façon dont il a posé sa conjecture, et il ne semble pas sûr de ce qu'il trouve : il dit « je pense » et « je vais essayer de démontrer » l'équivalence entre la première et la deuxième expression. Pour cela, il transforme la seconde expression en la première en faisant référence aux propriétés des opérations et aux boutons de l'Algebrista. Bien qu'il ne produise pas une démonstration correcte (en fait les deux expressions ne sont pas équivalentes) et qu'il n'utilise pas correctement les axiomes qu'ils mentionnent, Marco a adopté une perspective théorique : il est conscient qu'il doit produire une démonstration et il essaye de fonder son raisonnement sur les axiomes et théorèmes représentés par des boutons de l'Algebrista.

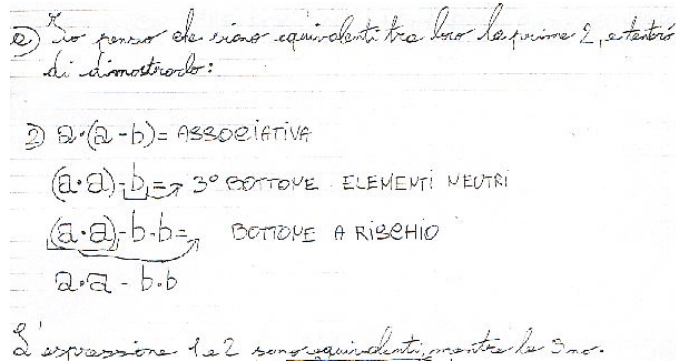


Figure 9 : Marco (classe de troisième) écrit :
 Je pense que je vais essayer de prouver que les deux premières expressions sont équivalentes et je vais essayer de le prouver :
 Propriété d'associativité
 Troisième bouton d'élément neutre
 Bouton à risque
 Les expressions 1 et 2 sont équivalentes mais pas la troisième.

5. Conclusion

Le développement des technologies de l'information soulève de nombreuses questions parmi lesquelles la refonte des programmes scolaires pour prendre en compte les changements induits par ce développement. Les idées que nous développons dans ce papier donne un exemple d'une approche nouvelle du calcul symbolique. Notre proposition s'inscrit dans une perspective plus large d'initiation des élèves à un raisonnement dans le cadre d'une théorie. Nous abordons donc le calcul symbolique dans une approche théorique et nous avons conçu un environnement informatique spécifique pour embarquer une théorie de l'algèbre.

Les axiomes embarqués dans les boutons de l'Algebrista deviennent des outils dont les élèves apprennent à se servir pour transformer des expressions dans le cadre d'activités finalisées. Ils fonctionnent ainsi comme des médiateurs sémiotiques. La distinction entre les boutons représentant les axiomes et les boutons de calcul aident à distinguer entre démonstration et vérification et peut ainsi contribuer à donner du sens aux notions de démonstration et de théorie. De plus, la possibilité, offerte par *Il Teorematore*, de créer de nouveaux théorèmes et de les rendre disponibles, permet aux élèves de prendre part à l'activité de construction de la théorie. Comme nous l'avons montré dans cet article, il arrive que les élèves fassent explicitement référence à l'histoire de la construction de la théorie en utilisant des termes comme

« notre théorème » ou « le premier théorème ». Les protocoles présentés comment certaines caractéristiques de l'Algebrista peuvent servir de médiateurs à des concepts de l'algèbre. En particulier il faut remarquer dans les exemples que nous avons présentés, qu'un ensemble particulier d'activités semblent jouer un rôle central.

Ceci soulève un certain nombre de questions : quel genre d'activités un enseignant peut-il mettre en place pour exploiter un outil qui facilite un processus de médiation sémiotique ? Quels processus vont être mis en œuvre simplement en utilisant un outil spécifique ? Parmi les processus mis en œuvre lesquels vont être efficaces seulement grâce à une interaction sociale dans le cadre d'activités particulières ?

Nous avons monté un projet de recherche pour examiner ces questions. En particulier, dans le cadre théorique de Vygotsky, nous nous intéressons particulièrement au rôle de l'enseignant pour guider l'évolution personnelle du sens accordé au calcul symbolique et plus généralement au raisonnement dans le cadre d'une théorie.

6. Remerciements

Les auteurs remercient chaleureusement les deux traductrices pour le travail rigoureux qu'elles ont accompli en vue de permettre la publication en français de ce travail.

7. Références

- [ARZ 91] Arzarello F.: 1991, *Pre-algebraic Problem Solving*. In J.P.Ponte J.F.Matos, J.M. Matos, D.Fernades, *Mathematical Problem Solving and new Information Technologies*, Springer.
- [CER 99] Cerulli M.: 1999, *Uso di manipolatori simbolici nell'introduzione all'algebra: realizzazione e sperimentazione di un prototipo*. Unpublished manuscript, Tesi di Laurea in Matematica, "Università degli Studi di Pisa", Pisa.
- [CER et al. 00] Cerulli M. & Mariotti, M.A.: 2000, *A symbolic manipulator to introduce pupils to algebra theory*. Proceedings of Workshop W6 "Learning Algebra with the Computer a Transdisciplinary Workshop". ITS'2000, Montreal.
- [Kier 92 p. 397] Kieran, C.: 1992, *The learning and teaching of School Algebra*. In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. D. A. Grouws

ed., N.C.T.M..

- [LAN 68] Lang, S.: 1968, *Algebraic structures*. Addison-Wesley series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company.
- [MAR 00] Mariotti M.A.: 2000, Constructions en Géométrie et le problème de la preuve, *Actes de La X^e Ecole d'été de Didactique de Mathématiques*, Houlgate, Août 2000
- [MAR 01] Mariotti, M.A. : (2001) La preuve en mathématique, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, Volume 1, n° 4 pp. 437 – 458.
- [MAR 02] Mariotti M.A. In press: *Influence of technologies advances on students' mathematical learning*, English L., Tirosh, D.& Bartolini Bussi M. (eds.) *Handbook of international research in mathematics education*", LEA.
- [MAR et al. 97] Mariotti M.A., Bartolini Bussi M., Boero P., Ferri F., Garuti R.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21st PME Conference*, Lathi, pp. I- 180-95.
- [MAR 98] Mariotti, M.A. & Bartolini Bussi M.G.:1998, From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment, in *Proceedings of the 22nd PME Conference*, Stellenbosh, pp. I- 180-95.
- [NOS 97] Noss R. & Hoyles C.: 1997, *Windows on mathematical meanings (learning cultures and computers)*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [PRO 75] Prodi G.:1975 *Matematica come scoperta, I*, D'Anna ed. ,Messina-Firenze,.
- [SFA 91] Sfard A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (pg. 1-36).
- [SFA 2000] Sfard A.: 2000, *Symbolising mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other*. In P. Cobb, K. E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating: Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- [VYG 78]. Vygotsky L.S.: 1978, *Mind in Society. The Development of Higher*

22 Sciences et techniques éducatives.

Psychological Processes, Harvard University Press.