Chapitre 2

Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto – réflexion[1]

Fernando HITT

2.1. Introduction

Ces dernières années, la technologie s'est développée de manière vertigineuse. Les logiciels de calcul formel, qui auparavant étaient disponibles uniquement sur des ordinateurs, sont aujourd'hui intégrés dans les calculatrices appelées ***calculatrices symboliques***. Les recherches de Rabardel [RAB 95] sur *l'apprentissage instrumenté* ont donné lieu à des recherches en didactique des mathématiques sur les processus de construction d'un *instrument* ou de ***genèses instrumentales*** (voir chapitre 7 de Guin & Trouche § 7.3.3 et [TRO 02]). Cette approche instrumentale a donné une nouvelle orientation aux recherches portant sur l'utilisation de la technologie dans la classe en général, et sur l'utilisation d'une calculatrice symbolique en particulier, en reconnaissant à l'***artefact*** un rôle plus important que celui qu'il avait auparavant [LAG 02, TRO 02].

Face à l'introduction d'une calculatrice symbolique dans leur classe, on peut distinguer deux attitudes opposées chez les enseignants. L'une se traduit par le refus de l'utiliser à l'intérieur de la classe, l'argument étant qu'elle bloque le développement des habiletés dans les apprentissages techniques et que les exercices courants acquièrent une grande banalité si on l'utilise. L'autre mène à penser qu'il suffit de maîtriser la calculatrice pour pouvoir, avec une technique "*presse-bouton*", accéder rapidement aux représentations multiples d'un concept et par conséquent à la connaissance.

---

[1] (2007) Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Pour qu'un enseignant modifie son point de vue sur cette question, il faut qu'il vive une expérience riche de sens avec une calculatrice symbolique. Par exemple, une expérience où celle-ci jouerait le rôle de promoteur d'articulations entre représentations dans la construction de concepts et dans la résolution de problèmes. Pour que ceci se produise, il est impératif de concevoir de nouvelles stratégies d'enseignement dans lesquelles une utilisation créative et réflexive d'une calculatrice est sollicitée.

Dans ce cadre d'apprentissage instrumenté, Artigue [ART 02] signale l'importance de concevoir des ***ingénieries didactiques***, c'est-à-dire de longs enchaînements de situations didactiques. L'étude que nous allons présenter dans ce chapitre va tout à fait dans ce sens. Notre travail est centré sur l'analyse du rôle de calculatrices symboliques dans les processus de construction, ou de reconstruction, de concepts mathématiques avec des enseignants, étudiants au niveau de la maîtrise (maîtrise de didactique des mathématiques). L'expérimentation présentée dans ce chapitre s'est déroulée pendant leur première année d'études.

Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'apport possible de calculatrices symboliques dans la réflexion de ces étudiants lorsqu'ils étaient face à un concept difficile à construire. Ces étudiants étaient déjà passés, dans un premier temps, par des processus de genèses instrumentales, et ce que nous allons rapporter ici se situe pendant la deuxième partie de l'expérimentation, celle dans laquelle ils ont utilisé une calculatrice symbolique comme un instrument pour faire face à un obstacle cognitif qui ne leur permettait pas de construire adéquatement un concept mathématique considéré, par certains didacticiens, comme un *obstacle épistémologique* (voir §x.2.2).

Pour que ces étudiants soient capables de faire face à ces obstacles cognitifs, une méthodologie d'enseignement spécifique a été mise en oeuvre. Celle-ci était basée sur l'***apprentissage collaboratif*** (voir Baker et Quignard, chapitre xx et [DIL 99]), la méthodologie du *débat scientifique* [ALI 91, LEG 93, LEG 01] suivie d'une étape d'*auto-réflexion* [HAD 75].

La méthodologie du débat scientifique a pour objectif d'intégrer les étudiants dans une démarche active de questionnement des concepts et de construction critique de leurs propres connaissances, en les incitant à proposer leurs propres conjectures, propositions et démonstrations. Comme Legrand [LEG 93], nous pensons que le professeur doit donner un statut scientifique à l'*erreur* : « pour entendre en compréhension une proposition scientifique, il faut douter de sa vérité et de sa pertinence, il faut se sentir dans l'obligation d'exercer sur elle une réelle vigilance épistémologique » (p. 125). Nous avons adapté les caractéristiques de la méthodologie du débat scientifique à l'apprentissage collaboratif, c'est-à-dire que, dans un premier temps, les étudiants travaillent en équipe pour ensuite passer à une discussion générale censée pouvoir déclencher un débat scientifique.

L'auto-réflexion, qui essaye de promouvoir une reconstruction individuelle de ce qui a été effectué dans les deux premières étapes, est mise en évidence par Hadamard [HAD 75]. Celui-ci accorde une grande importance aux processus de réflexion conscients et inconscients des mathématiciens lors de la résolution d'un problème ("*incubation d'idées*"). Notre méthodologie essaye de stimuler ces processus conscients et inconscients en suscitant chez les étudiants une reconstruction individuelle de ce qui a été travaillé dans les deux premières étapes (travail en équipe et débat scientifique).

2.2. Représentations, conceptions et contradictions

2.2.1. *Registres de représentation*

Depuis une vingtaine d'années, une très grande importance a été donnée à l'étude du rôle que jouent les *représentations* dans la construction des concepts mathématiques. Il est probable que le déclencheur de cet intérêt a été le livre de Janvier [JAN 87] sur les problèmes de représentation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Depuis, différentes approches ont été développées par la communauté des didacticiens dont l'une est la théorie des *registres de représentation sémiotiques* de Duval [DUV 93, DUV 95], pour qui un système sémiotique peut être un registre de représentation, si celui-ci permet trois activités cognitives fondamentales liées à la *sémiosis* :

– la *formation* d'une représentation identifiable ;

– le *traitement* d'une représentation qui réfère à la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée ;

– la *conversion* d'une représentation, c'est-à-dire la transformation de cette représentation vers une représentation d'un autre registre, cette dernière conservant la totalité, ou bien une partie seulement du contenu de la représentation initiale [DUV 93, p. 41].

Cette théorie met en évidence que, puisque toute représentation d'un objet mathématique est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente, les tâches de conversion entre les représentations externes et la construction d'une *articulation* entre les représentations internes chez l'élève jouent un rôle primordial pour la construction d'un concept.

Bien que nous soyons d'accord avec Duval sur le fait que les conversions entre représentations sont un point clé pour la construction d'un concept, il faut signaler qu'il ne considère implicitement que les représentations "*conventionnelles*" (celles que le professeur utilise dans la classe, celles que l'on trouve dans les manuels et celles qui sont présentes sur l'écran des ordinateurs), sans prendre en considération les représentations spontanées des étudiants exprimées sur papier, ou ailleurs, lors de la résolution d'une activité ou de la construction d'un concept [HIT 03]. De plus, la théorie de Duval est centrée sur l'individu, sans mettre l'accent sur l'importance de la construction de connaissances à l'occasion des *interactions* au sein de l'ensemble des élèves de la classe considéré comme *une communauté de pratique* émergente (voir Hotte & Contamines, chapitre xx).

De cette théorie, nous retenons que la *coordination* entre les diverses représentations d'un concept mathématique permet à l'individu de le construire. En effet, Duval met l'accent sur les problèmes qu'ont les étudiants dans les processus de conversion entre représentations et c'est surtout ce point qui nous intéresse.

2.2.2. *Représentations fonctionnelles et conceptions*

Les questions à approfondir sont de savoir comment les représentations conventionnelles affectent l'acquisition des connaissances mathématiques des étudiants et comment les représentations internes des étudiants évoluent pendant leur formation académique.

Notre approche souligne que les productions sémiotiques spontanées qui sont exprimées sur papier, écran, au tableau, etc., et qui surgissent lors du processus de construction d'un concept ou lors de la résolution d'un problème, montrent le caractère fonctionnel des représentations internes des étudiants. Il serait important de savoir comment leurs représentations fonctionnelles évoluent lorsqu'elles sont en interaction avec les représentations externes qu'utilisent les étudiants dans un environnement où la calculatrice symbolique est présente.

Les *représentations fonctionnelles* (internes) sont-elles des représentations isolées chez les individus ? Nous pensons que non. Nous pensons que ces représentations forment une connaissance chez les individus, et la question qui se pose alors est de savoir de quel type de connaissance il s'agit.

Au cours de ces dernières années, différents travaux didactiques sur les *conceptions* ont été développés. Ces travaux partagent le point de vue qu'une conception est une connaissance qui fonctionne pour un ensemble de situations. Artigue, analysant les travaux de Brousseau [BRO 98] et Duroux [DUR 83] sur la notion *d'obstacle épistémologique,* a permis d'approfondir la réflexion sur les conceptions. Elle précise ainsi :

– un obstacle est une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance ;

– cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte fréquemment rencontré ;

– mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent ;

– de plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget [PIA 75]). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir ;

– après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre [ART 90, p. 259].

Une conception est donc une connaissance qui a été construite par un individu, soit de façon personnelle, soit en interaction avec des pairs, et qui n'est pas "équivalente" au savoir reconnu par une communauté académique. Mais comment peut-on identifier une conception chez un étudiant ? Ceci peut souvent se faire à travers les représentations externes qu'il produit lors de la résolution d'un problème. Ainsi, une conception peut être :

– un obstacle épistémologique ;

– une construction partielle d'un concept qui fonctionne dans certains contextes et pas dans autres, mais qui n'est pas nécessairement un obstacle épistémologique ;

– une construction partielle d'un concept, construction cohérente de quelques représentations internes et leur articulation (identifiées par des experts lors d'une activité) ;

– une construction partielle d'un concept (représentations fonctionnelles internes) exprimé par un mélange cohérent de représentations externes (non identifiées par les experts lors d'une activité).

Ces divers points conduisent à s'interroger sur l'impact que pouvaient avoir les représentations fonctionnelles dans la construction des connaissances. Souvent, lors de la construction d'un concept, les représentations produites par les étudiants sont loin d'être celles qui sont attendues par leur professeur. En fait, les représentations exprimées spontanément par les étudiants sont souvent considérées comme des représentations erronées par les "experts". Pourtant nous pensons que ces représentations sémiotiques spontanées jouent un rôle crucial dans la construction des connaissances car elles sont liées à une conception [HIT 03, HIT 06].

2.2.3. *Conceptions et contradictions*

Comme nous l'avons dit précédemment, l'objet de notre étude est d'observer et d'analyser la construction ou la reconstruction d'un concept. Les premiers contacts qu'un étudiant a avec certaines représentations (externes) d'un concept peuvent l'amener à construire des conceptions. Pour nous, ces conceptions sont des connaissances liées à une articulation entre les représentations qui ont été construites par l'étudiant. Ces conceptions vont probablement permettre de résoudre certains types de problèmes, mais elles vont provoquer l'échec pour d'autres. La conception fonctionne comme une unité, comme une connaissance bien ancrée. Ce n'est pas le rôle du professeur de signaler les contradictions logiques des étudiants. La prise de conscience d'une contradiction (contradiction cognitive) doit venir d'eux, c'est une exigence pour dépasser un obstacle cognitif. Dans cette approche, le débat entre les étudiants sur leurs productions spontanées (représentations externes), qui sont liées aux conceptions, est important pour mettre à l'épreuve leurs conceptions.

2.3. Méthodologie

2.3.1. *Apprentissage collaboratif, débat scientifique et auto- réflexion (ACODESA)*

La méthodologie que nous avons utilisée comporte de longs enchaînements de *situations didactiques*, désignés par *ingénierie didactique* (voir Guin & Trouche, chapitre 7, §7.3.1 pour situation et 7.3.2 pour ingénierie). Elle est liée à l'apprentissage collaboratif, au débat scientifique ainsi qu'à l'auto-réflexion en lien avec l'incubation. L'apprentissage collaboratif et l'auto-réflexion (qui nous semblent fondamentaux pour la construction des connaissances) sont complémentaires de la méthodologie du débat scientifique et peuvent être combinés harmonieusement avec celui-ci. Dans ce sens, notre approche est du type *socio-constructiviste*.

Nous avons nommé notre méthodologie *ACODESA* (Apprentissage Collaboratif, Débat Scientifique et Auto-réflexion). Voici rapidement en quoi elle consiste :

– construction d'un questionnaire préliminaire pour dégager de comportements prototypiques (dans notre cas, il s'agissait des comportements plutôt intuitifs[2], formalistes[3] ou contradictoires[4]) ;

– formation d'équipes de trois étudiants ayant des comportements différents selon le point précédent ;

– élaboration d'activités avec l'intention de provoquer un déséquilibre cognitif chez les étudiants ;

– utilisation d'une calculatrice symbolique (dans notre cas, nous avons prêté les calculatrices aux étudiants pendant leurs études) ;

– distribution de rôles pour le travail en équipe pendant la résolution d'un problème, un étudiant utilise la calculatrice, un autre prend note des résultats et des débats alors que le dernier a la responsabilité d'exposer le tout. À chaque activité, les étudiants doivent changer de rôle. Il est recommandé d'utiliser une seule calculatrice par équipe, cela permet une meilleure communication entre les membres ;

– passage éventuel au débat (débat scientifique) à la fin des activités. L'idée principale étant que, pour la construction d'un concept ou pour le dépassement d'un obstacle épistémologique, les étudiants doivent faire face à des situations didactiques susceptibles de provoquer un déséquilibre cognitif ;

– ramassage des brouillons par le professeur à la fin du débat ;

– résolution individuelle du problème. Le débat ayant probablement provoqué des changements de position, l'activité devra être reprise de façon individuelle pour provoquer une réflexion (l'auto-réflexion) sur les exemples, contre-exemples, démonstrations, etc., qui ont eu lieu ;

– correction du travail individuel pour permettre au professeur de vérifier a posteriori s'il y a vraiment eu une transformation des conceptions de chaque étudiant. Il est bien connu que lorsque les étudiants discutent et arrivent à un "consensus", quelque temps après, plusieurs d'entre eux reviennent à leur position initiale [THO 02].

---

[2] Ceux exprimés avec des idées intuitives.
[3] Ceux exprimés par les définitions sans appel à des idées intuitives.
[4] Ceux qui produisent des contradictions logiques.

2.3.2. *Population, objectifs d’enseignement et d’investigation*

La population de la présente étude est formée d’étudiants débutant une maîtrise de didactique des mathématiques au Mexique. Les étudiants ont déjà enseigné à l’école secondaire (âge de 12 à 17 ans) et suivi des cours de calcul dans leur formation académique.

Dans cette étude, nous avons voulu, d’un côté, faire vivre aux étudiants une nouvelle méthodologie d’enseignement et, d’un autre côté, introduire l’utilisation d’une calculatrice symbolique dans la résolution d’activités. Nous avons choisi le domaine du calcul différentiel pour les nombreux problèmes d’apprentissage qu’ont les étudiants dans ce domaine. Lors de recherches antérieures, nous avions déjà détecté des problèmes d’apprentissage avec des étudiants de première année d’université. Puisque nous nous intéressons à des apprentissages instrumentés [TRO 02], avec cette nouvelle population d’étudiants, notre intention était d’identifier leurs conceptions et l’évolution de celles-ci, dans un environnement de calculatrices symboliques, pendant les huit mois de l’expérimentation. Le premier problème d’apprentissage que nous avons choisi d’étudier est celui de la limite. Ce concept mathématique est considéré comme difficile à construire et même générateur d’obstacles cognitifs. Par la suite, nous avons travaillé sur d’autres concepts du calcul différentiel dans lesquels le concept de limite intervenait aussi.

2.3.3. *La méthodologie ACODESA en situation d’enseignement*

2.3.3.1 *Quelques effets d’une ingénierie didactique*

La construction des activités était centrée sur la reconnaissance de processus finis et infinis qui sont indispensables à la construction du concept de limite. Pour ce qui se rapporte aux processus infinis, l’une des premières activités portait sur des hexagones emboîtés ($1^{\text{ère}}$ partie de la $1^{\text{ère}}$ activité) et sur des carrés emboîtés ($1^{\text{ère}}$ partie de la $4^{\text{ème}}$ activité). Analysons ce qui s’est passé lors de la mise en œuvre de ces activités empruntées à Hauchart et al. [HAU 87] :

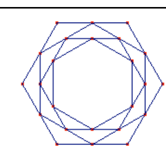
Dans un hexagone régulier, dessinez un autre hexagone régulier en joignant les points milieux de chacun des côtés de l’hexagone de départ (voir figure). Recommencez la construction à partir du 2^{e} hexagone et ainsi successivement. Que deviennent les aires des hexagones ?	

Figure 2.1. *Activité des hexagones emboîtés*

Les premières activités ont permis aux étudiants de s'exprimer librement sur la question de la limite. Dans la discussion en grand groupe sur l'activité ci-dessus, des arguments portant sur la notation de la limite ont été soulevés.

Par exemple, l'un d'eux souhaitait « changer la notation de la limite : $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ et attirer l'attention des étudiants sur sa signification ». Ainsi, Juan (nom fictif) disait : « Je n'ai jamais pensé que la limite était la valeur, j'ai toujours pensé que ça « s'approche » ou « que ça tend vers »… Le symbole d'égalité qui a été placé comme résultat d'une limite ne doit pas exister $\lim_{n \to \infty} a_n = L$… Je propose $\lim_{n \to \infty} a_n \to L$ ».

Juan a expliqué que probablement les mathématiciens du passé ont utilisé l'égalité comme notation et que cela est resté par habitude, il a été interrompu par Jorge.

Jorge : « Tu n'as jamais demandé à ton professeur pourquoi il plaçait le signe d'égalité à la place de "tend vers" [$\lim_{n \to \infty} a_n \to L$] ? » [Ton ironique].

Tout le monde riait de l'intervention de Jorge ; malgré la situation, Juan a continué :

Juan : « Non, parce que c'est probablement un questionnement personnel. Quand on est dans cette situation, on se pose la question, je le dis, ou je ne le dis pas, et parfois tu le gardes pour toi, non ? Et comme ici je peux poser la question, alors je la pose ».

Ceci peut donner au lecteur une idée de l'ambiance du débat. C'est plus ou moins à partir de ce moment, que les étudiants ont pris au sérieux l'intervention de leurs pairs. Plus loin, Marcos intervient : « À la fin, on obtient un tout petit hexagone, dont l'aire est différente de zéro, et qui est tout près du centre de tous les hexagones, qui est un point ».

Pendant le débat, certains ont exprimé l'idée que la limite était un hexagone, d'autres que la limite était un point. Le débat suscité par Juan a poussé les étudiants plutôt intuitionnistes à défendre l'idée que la limite ne pouvait être atteinte. Leur position était que la notation mathématique qui devrait être utilisée dans les manuels devrait être : $\lim_{n \to \infty} a_n \to L$. Leur conception de l'infini est liée à l'infini potentiel.

Les étudiants plutôt formalistes ont fortement critiqué cette écriture en disant, en particulier, que la notation était redondante, mais le professeur, qui ne voulait que la discussion se termine, a suggéré aux étudiants plutôt intuitionnistes de trouver une autre notation.

Voici celle qui a été choisie : $\lim a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$. Certains, comme Adrian (voir plus bas) sont revenus à leur première notation.

Dans l'équipe d'Adrian (plutôt intuitionniste), on note une très forte tendance à penser qu'un processus infini est « un processus qui ne se termine jamais ».

Adrian : « L'aire devient aussi petite que l'on veut. Cependant, elle n'arrive jamais à zéro. Si nous supposons que c'est un processus infini, il n'a pas de fin, alors elle ne va jamais arriver à être nulle ».

Cette discussion montre bien l'importance des représentations spontanées dans la construction d'un concept. Cette même discussion revient dans l'activité portant sur les carrés emboîtés (voir figure 2.2). Adrian passe au tableau où il écrit les expressions mathématiques indiquées ci-dessous tout en donnant oralement les explications.

Soit ABCD un carré unitaire, on construit un autre carré en joignant les milieux des côtés du carré ABCD. On enlève les quatre triangles du premier carré. On recommence la même opération sur le deuxième carré, ce qui fait apparaître un troisième. On fait de même sur le troisième carré et ainsi de suite. a) Peut-on continuer ce processus de façon illimitée? Si oui, que se passe-t-il ? Sinon, pourquoi ?

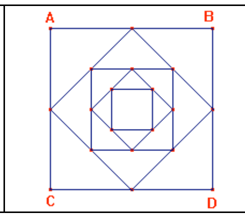


Figure 2.2. *Partie de l'Activité 4, carrés emboîtés*

Adrian : « Que signifie être borné ? On m'a toujours dit que borné signifie que la fonction s'approche aussi près qu'on veut d'une valeur mais n'atteint jamais cette valeur. On démontre que tous les carrés ont en commun le centre, alors ils doivent converger là. Bon, il reste encore la question sur ce que veut dire converger. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$? ou $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\to 1$? Que signifie que la limite soit 1 ? Nous

> nous approchons de ce que nous voulons, mais on n'y arrive jamais. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$ Si l'on cherche cette somme de façon mathématique, on trouve 1. Nous revenons à la discussion : Que signifie le 1 ? Qu'est-ce que c'est la limite ? On dit toujours que la limite est 1. En ce moment, j'ai cette ambivalence dans ma tête, je mets égal ou je mets… » [il est interrompu par une étudiante].

Au fur et à mesure que le cours avançait, il y a eu différentes réactions :

– certains étudiants ne sont pas arrivés à concilier leurs idées intuitives avec les processus formels et leur travail montre plusieurs contradictions (voir, par exemple, Jorge dans la discussion au sujet de la calculatrice § 2.4.2) ;

– d'autres ont séparé leurs idées intuitives des processus formels. C'est le cas d'Adrian qui, à un certain moment, a mentionné qu'il n'avait pas d'objection à mettre le signe d'égalité dans le calcul de limites et à continuer le processus formel comme l'exige le cours de mathématiques. En résumé, même si certaines idées intuitives sont opposées aux idées formelles, mais qu'on est habile avec la manipulation algébrique, on peut "réussir" dans la résolution de problèmes ;

– d'autres plutôt intuitionnistes ont ressenti l'absolue nécessité de construire un pont entre leurs idées intuitives et leurs idées formelles (voir, par exemple, Victor § 2.4.3. et 2.4.4) ;

– parmi les étudiants plutôt formalistes, plusieurs pensent que les mathématiques doivent être élégantes et précises et c'est pour cela qu'elles sont comme elles sont ;

– certains étudiants plutôt formalistes-contradictoires ont eu des difficultés avec le processus de formalisation et avec l'intégration de la calculatrice (voir, par exemple, le cas de Pedro § 2.4.2).

2.4. La méthodologie ACODESA en EAI

2.4.1. *Pratiques éducatives intégrant les TIC*

Les TIC étaient intégrées dans l'ingénierie didactique que nous avons expérimentée pour construire le concept de limite, ainsi que tous les points ci-dessus mentionnés. La construction des activités visait à faire différencier, par les étudiants, les processus finis des processus infinis, ces derniers étant indispensables à la construction du concept de limite. En voici un exemple (figure 2.3).

Une fourmi marche sur une bande élastique qui au début mesure 24 cm de long. Elle entame son parcours à une extrémité de l’élastique et parcourt 6 cm par minute. Après chaque minute, on allonge l’élastique de 12 cm en admettant que la bande peut s'allonger indéfiniment de manière uniforme.

a) Sommes-nous face à un processus fini ou infini ?
b) La fourmi arrivera-t-elle à l'autre extrémité de la bande élastique ? Explique ta réponse.
c) Si tu as répondu affirmativement à la question b), Combien de temps la fourmi prendra-t-elle pour parcourir tout l’élastique ?

Figure 2.3. *Activité 12*

Chaque étudiant avait une calculatrice pour le travail individuel, mais une seule était autorisée lors du travail en équipe (comme nous l’avons déjà signalé). Nous avons fourni le matériel nécessaire aux étudiants (dans ce cas, l’élastique, le mètre, etc.).

Dans l’équipe constituée par Irene, Felipe et Adrian, nous avons observé qu’Irene avait tracé des points sur l’élastique pour montrer la place de la fourmi à chaque minute. C’est aussi elle qui a donné l’idée aux autres que le déplacement de la fourmi était proportionnel pendant les trois premières minutes. Ensuite, elle a continué ses calculs de façon arithmétique. Adrian a tout de suite repris l’idée pour la développer de deux façons, l’une purement algébrique, l’autre avec la calculatrice. L’équipe est ainsi arrivée à la conclusion que le processus était fini en utilisant plusieurs techniques.

Une autre équipe a trouvé que le processus était infini mais que la fourmi se rapprochait de l’extrémité.

Une autre a trouvé que le processus était infini mais que la fourmi s'éloignait de l’extrémité.

Dans le débat, l’équipe d’Irene a réfuté les conclusions de ces deux équipes et elle est allée au tableau pour montrer ses calculs numériques. Dans sa présentation, elle a mentionné qu’Adrian avait trouvé la formule et qu’il avait fait un programme. Adrian a alors présenté ses résultats algébriques et il a seulement mentionné qu’avec un programme, il pourrait calculer exactement le moment où la fourmi arriverait à l'extrémité de l'élastique. Dans les feuilles écrites par Adrian on trouve une fonction récursive et le programme pour la calculatrice (voir figure x.4).

$f(1)=9$ et $f(n)=\dfrac{[f(n-1)+6]\cdot(2+n)}{1+n}$	

hormiga (n)
Prgm
Disp camina (n)
End Prgm
	camina (n)
	Func
	If n=1 Then
	Return 9
	Else
	Return (camina (n-1)+6)*(2+n)/(1+n))
	End If
	End Func

Figure 2.4. *Production d'un étudiant (Adrian)*

Dans cette équipe, chacune des approches suivantes a été utilisée :

– une approche concrète (manipulation du matériel) pour la compréhension du phénomène, puis des calculs arithmétiques ;

– une approche algébrique papier-crayon, une fois le phénomène compris ;

– une approche algébrique, mais cette fois avec la calculatrice, pour préciser la réponse.

2.4.2. *Problèmes de conversion entre représentations dans l'activité instrumentée*

Dans l'activité n° 16, pour laquelle l'utilisation de la calculatrice était explicite, nous avons demandé de travailler avec plusieurs représentations (voir figure 2.5). Nous allons analyser ce qui s'est passé dans une équipe qui travaillait l'activité suivante.

2. Résoudre en utilisant la calculatrice puis expliquer vos résultats, à partir d'une approche graphique, d'une approche numérique et d'une approche algébrique : a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$; c) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, **si** $f(x)=\begin{cases}3 & \textbf{si } x=1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \textbf{si } x\neq 1\end{cases}$

Figure 2.5. *Une partie de l'Activité 16*

Cette équipe était formée d'un étudiant plutôt contradictoire-formaliste (Pedro), d'une étudiante plutôt intuitionniste-contradictoire (Elena) et d'un étudiant plutôt intuitionniste (Jorge). Les deux premiers avaient montré un manque de sensibilité à la contradiction dans le test préliminaire, alors que Jorge semblait avoir développé une sensibilité à la contradiction et avait aussi montré une grande habileté dans l'utilisation de la calculatrice.

Au début de l'activité, Jorge avait la calculatrice, Pedro écrivait et Elena avait la responsabilité de présenter les résultats. Pedro a commencé avec la question a. Il a fait un dessin sans faire beaucoup de commentaires, puis, dans l'approche numérique, Jorge a utilisé la calculatrice. Ce qui a fait dire à l'équipe : « Alors, la limite est −2 ». Ils sont ensuite passés au calcul algébrique et ils ont calculé la limite sans problème. Une discussion intéressante est intervenue lors de la résolution de la question 2 b. À l'aide de la calculatrice, Jorge a fait le graphe de la fonction.

Les explications qui suivent concernent leurs discussions autour de $x = -3$. Personne dans l'équipe n'a remarqué que la question demandait d'analyser la fonction autour de $x = -1$.

Pedro : « Elle ne peut pas prendre la valeur de −3 ». [Elena et Jorge acquiescent].

Pedro : « Alors, je vais dessiner le graphe et je dois prendre en considération que la fonction ne peut pas prendre la valeur 3 ».

Jorge : « Non, non, −3 ».

Pedro : « OK, OK, −3 ».

Jorge : « −1, −2, −3 alors nous avons une asymptote. Et une autre ligne pointillée pour $y = 1$ » [asymptote horizontale].

Pedro : « Pour $y = 1$ nous allons mettre une ligne pointillée ».

Jorge : « Elle n'a pas de limite à gauche, ça nous donne $+\infty$; il n'y a pas de limite à droite, ça nous donne $-\infty$, la limite n'existe pas ».

Pedro : « Parfait ! »

Jorge : « La limite n'existe pas en −3 ».

Pour faire le graphique, ils se sont concentrés sur le point −3, et les problèmes de communication ont commencé.

Jorge : « La question de savoir si la limite existe en −1, c'est que la limite n'existe pas si nous nous approchons par la gauche, ça nous donne +∞ et par la droite −∞ » [il montre le graphe du doigt et le suit sur l'écran tout en parlant, sans se rendre compte qu'il parle de −3 et non de −1].

Jorge : « Si nous observons le graphique, nous pouvons déduire que quand la valeur de x s'approche de −3 par le gauche, f(x) tend vers l'infini et si elle s'approche par la droite, f(x) tend vers −∞ ».

Jorge : « Je sais que tu n'aimes pas écrire −∞, mais je dis que la fonction tend vers −∞ ».

Pedro : « f(x) tend vers un nombre négatif , trèèèèèèès petit quand x se rapproche de −3 par la gauche, oh !, par la droite, la fonction tend à décroître ».

Jorge : « Attends, par où tu t'approches ? »

Pedro : « Par la droite… »

Jorge : « Par la gauche, ou par la droite, ça donne quoi ? Nous observons que les valeurs de la fonction f(x) tendent vers + ∞ et −∞ ou vers des valeurs très grands ou très petites, respectivement ».

Quand ils ont commencé à copier sur leur feuille le graphe apparaissant sur l'écran, et à donner des explications sur le comportement de la fonction, d'une part, nous avons observé que Pedro évitait d'utiliser les signes +∞ et −∞ (probablement une conséquence des débats antérieurs sur l'infini). D'autre part, dans les échanges verbaux entre les trois étudiants, on peut voir qu'ils n'utilisent pas à bon escient les expressions « tend vers +∞ ou −∞ ».

Ceci montre le manque d'articulation entre la représentation verbale et écrite et la représentation graphique dans le sens de Duval.

Voici leur dialogue au moment où ils sont arrivés au processus algébrique :

Pedro : « O.K, alors, par l'approche algébrique nous avons : $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)}{(x+3)}=\frac{0}{2}=0$ »

Jorge : « Ça donne zéro ? » [Avec un ton surpris].

Pedro : « Ouiiiii ! »

Jorge, Pedro et Elena : [Silence].

Pedro rit nerveusement.

Jorge : « Dans le cas par la gauche, elle va [avec son doigt, il signale vers le haut] et par le droit à $-\infty$. Quand elle tend vers -1 [pause] ça donne ça ? En fait, nous avons dit que la fonction n'est pas définie, n'est-ce pas ? »

Jorge prend la calculatrice pour vérifier.

Elena : « Alors, je vais voir… »

Ils commencent à vérifier le processus algébrique et concluent qu'il est correct. Jorge prend la calculatrice une nouvelle fois pour vérifier.

Pedro à Elena : « Peut-être que nous devrions calculer la dérivée » [Et il commence à calculer la dérivée du numérateur et du dénominateur].

Elena : « Mais tu ne peux pas utiliser la Règle de l'Hospital dans ce cas… »

Jorge regardait le graphe avec une expression d'étonnement. Alors, il dit : « O.K. Alors, avec la calculatrice nous allons calculer $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ » [l'affichage donne 0].

Jorge était accroché à la réponse de la calculatrice, muet… Les deux autres attendaient une réaction de sa part. Mais rien… Puis, Jorge est passé au mode graphique et a commencé à regarder le graphe. Il a utilisé le mode "trace" pour regarder ce qui se passait autour de $x = -1$, et il s'est exclamé : « Oufff ! J'ai eu peur ! Nous avions analysé les deux premières questions autour de $x = -3$ au lieu de $x = -1$! »

Jorge semble avoir vu la contradiction logique, il s'est alors immédiatement servi de la calculatrice pour essayer de comprendre la situation et dépasser la contradiction cognitive. Cela nous permet de dire que la calculatrice est devenu pour eux un instrument et les a aidés à déceler quelques contradictions logiques.

Pedro, qui développait toujours des processus formels, a montré une difficulté à articuler les différentes représentations de la limite. Un mois et demi plus tard, dans les entretiens individuels, nous lui avons demandé de nous donner une définition de la limite et il a utilisé l'approche formelle. Dans la définition qu'il nous a proposée, il a inversé l'implication.

Les échanges entre les membres de l'équipe montrent que :

– l'articulation entre les représentations est partielle (ils ont de la difficulté à verbaliser ce qui se passe dans la représentation graphique) ;

– pour quelques-uns, la calculatrice est devenue un instrument (par exemple Jorge) ;

– la prise de conscience d'une contradiction est accompagnée d'un sentiment de malaise, et son dépassement d'un sentiment de bonheur (Jorge dit : « … Oufff ! J'ai eu peur !…») ;

– pour celui qui a développé une sensibilité à la contradiction, la calculatrice est devenue un moyen de contrôle de la situation.

2.4.3. *Les représentations fonctionnelles en action, vers la construction d'une définition de la limite*

Craignant que les étudiants n'arrivent pas à construire une définition formelle de la limite, le professeur a demandé de donner des exemples de suites convergentes et divergentes afin de les analyser et de favoriser ainsi une réflexion qui pourrait les mener à la définition. Les premiers exemples donnés l'ont été sous forme graphique au tableau et aussi en notation ensembliste. Puis, il a été proposé d'utiliser la valeur absolue pour dire que, si L représente la limite d'une suite $\{a_n\}$, alors la distance de L à a_{n-1} est plus grande que la distance de L à a_n. Il y a eu des objections à cette affirmation et quelqu'un a proposé une suite convergente qui ne suit pas un comportement comme celui-ci.

Après la discussion, le professeur a demandé de travailler en équipe et de donner une définition formelle de la limite. Voici ce qui s'est passé avec une équipe qui, heureusement, devait être filmée ce jour là : Victor, qui expliquait verbalement sa définition à son coéquipier, faisait en même temps un graphique en lien avec ce dont il parlait et aussi, en même temps, il écrivait des expressions algébriques. Selon que l'on observe *exclusivement* la représentation graphique ou exclusivement les expressions algébriques, on peut penser que sa compréhension de la limite est partielle ; même erronée d'un point de vue d'expert. Par contre, si l'on analyse l'ensemble de ses différentes représentations et qu'on les considère comme un *tout indissociable*, on peut dire que sa compréhension du concept de limite est cohérente [HIT 06]. En résumé, le caractère fonctionnel des représentations, exprimées dans ce cas par un mélange de représentations externes, est important dans la construction d'un concept :

– les représentations spontanées, dans le cas présent, forment un tout cohérent, une conception ;

– le concept mathématique a été construit à travers un débat et différentes représentations personnelles qu'on ne peut dissocier ;

– la construction basée sur les représentations fonctionnelles (exprimées lors d'une activité) pourrait paraître étrange, même contradictoire, aux yeux d'un expert.

Après un mois et demi, nous avons eu un entretien avec chaque étudiant et nous avons trouvé que la construction de Victor était stable. Il a donné des exemples graphiques et une définition en utilisant une notation non conventionnelle. On lui a demandé de nier sa définition formelle et de nous donner des exemples ; il a fait une erreur, mais il a corrigé en utilisant une suite non convergente [HIT 06].

2.4.4. *Articulation des représentations*

Afin de provoquer l'utilisation de différentes représentations par les étudiants nous leur avons proposé la fonction *f* (définie par intervalles) ci-dessous dont la dérivée ne peut être calculée directement, mais nécessite le retour à la définition même de dérivée, ce qui implique l'étude d'une limite. Dans les échanges entre étudiants que nous allons retranscrire ci-après, nous pourrons voir comment l'utilisation de diverses représentations va leur permettre de donner un sens à cette dérivée et les aider à faire évoluer une conception bien ancrée jusque-là. Ceci semble confirmer l'importance des conversions entre représentations dans la construction de concepts mathématiques.

La fonction est la suivante: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

Le professeur constate que les étudiants ont calculé la dérivée de la manière suivante : $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour x ≠ 0; et, écrit, tout simplement, égale 0, pour x = 0. Le résultat est correct, mais la procédure ne l'est pas. Leur conception est que la dérivée d'une fonction définie par intervalles est égale à la dérivée de chacune des parties. Les points critiques, tels que x = 0, dans cet exemple, ne sont pas envisagés ! Par la suite, nous avons pu constater dans les entretiens, qu'elle était encore présente chez la plupart des étudiants [HIT 06].

Le professeur demande à une équipe de présenter leurs résultats pour cette activité qui semble tout à fait routinière aux autres étudiants. Wendy passe au tableau et traite le problème en utilisant la méthode erronée. Lorsqu'elle a terminé, le professeur demande si tout le monde est d'accord et tous répondent oui. Alors, il demande qu'on lui explique la façon de calculer la dérivée de cette fonction.

Lidia (étudiante plutôt formaliste) prend la parole et dit que, pour la première partie, la dérivée est : $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et qu'il suffit d'utiliser cette fonction pour calculer les limites latérales pour $x=0$, ce qui donne une dérivée égale à *0*. Le professeur lui demande alors de le faire au tableau.

Lidia se rend compte qu'il y a quelque chose qui ne fonctionne pas, puisque la limite de –cos(1/x) n'est pas égale à 0 lorsque x tend vers 0, et elle dit que réellement elle ne s'est pas posé la question et qu'elle avait simplement écrit 0. Et c'est ainsi que la discussion commence. Après avoir écouté les arguments de Lidia, Victor avance que la dérivée n'existe pas en *0*.

Le professeur demande à Wendy si elle a aussi changé d'opinion et elle répond que la dérivée en 0 était égale à 0. Elle commence à dire que le graphique de la fonction n'oscille pas en 0, et que la tangente est horizontale. Wendy s'appuie sur le graphique pour faire une telle affirmation (voir figure 2.6). Alicia dit « Non, la fonction a beaucoup d'oscillations ». Et Victor signale que, en général, on ne doit pas faire confiance à la calculatrice car il se peut bien que la calculatrice donne un joli dessin, mais qu'il n'en soit pas vraiment ainsi. Il ajoute même: «…réellement il y a beaucoup d'oscillations et l'on ne voit pas qu'il [le graphe] ait un joli comportement ».

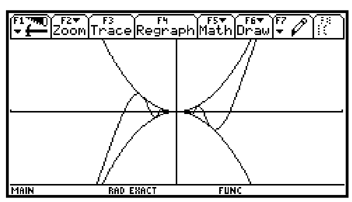


Figure 2.6. *Ecran d'une calculatrice obtenu par une étudiante (Wendy)*

L'intervention de Victor provoque un débat et la majorité commence à prendre position en faveur des arguments de Lidia. Le professeur demande ce qu'il faudrait faire dans ce cas, et Wendy répond : « Il me semble que maintenant je suis la seule à affirmer que la dérivée en 0 est 0, ils ont peut-être raison ».

Même si le cours est terminé, le débat continue pendant encore 20 minutes (ça n'est pas la première fois). Le professeur demande de réfléchir pendant les deux jours suivants pour laisser un temps d'auto-réflexion, comme prévu dans la méthodologie.

Le débat continue au cours suivant. Lidia prend la parole : « La dérivée de cette fonction [f(x)] est celle-ci (voir figure 2.7), elle est égale à 0 pour x = 0 ; Alors, il n'y pas moyen que cette fonction soit continue ! »

Ici, Lidia exprime concrètement le problème montrant qu'elle a fait une réflexion en dehors de la classe et qu'elle a utilisé la calculatrice pour comprendre le problème soulevé dans le cours antérieur. Le professeur demande à Lidia d'utiliser la calculatrice et le rétroprojecteur pour montrer ce qu'elle a fait.

Lidia : « Le graphe a beaucoup d'oscillations, là, près de zéro ; alors, j'ai l'impression que je ne peux pas coller le zéro !… C'est-à-dire, le graphe est une source d'informations, mais ce graphe n'est pas fiable quand on prend une échelle plus grande en x, le graphe nous montre des oscillations et une ligne verticale ».

Lidia ajoute que la fonction est a fortiori discontinue.

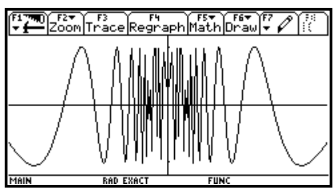


Figure 2.7. *Ecran d'une calculatrice obtenu par une étudiante (Lidia)*

Wendy utilise la calculatrice pendant la discussion et quand le professeur leur demande à nouveau leur opinion, Wendy déclare que le résultat est vrai, que la dérivée de cette fonction en 0 est égale à 0. Alors, elle passe au tableau pour faire un traitement algébrique : $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$.

Même si le traitement algébrique est correct, certains étudiants expriment leur désaccord. Le professeur leur propose alors de trouver l'égalité erronée. Certains essayent, mais ils ne peuvent pas trouver l'erreur (bien sur, il n'y en a pas !). Par exemple, Irene dit : « Je ne suis pas sûr, mais pour h = 0 nous avons quelque chose comme sinus d'infini ».

Victor insiste sur une probable erreur dans le traitement algébrique, il dit : « Si nous prenons comme vrai ce résultat, alors nous devons prendre comme vrai que

$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$, ce qui est impossible ! Il y a une contradiction évidente».

Wendy, déclare : « mais il est vrai que la dérivée de cette fonction est 0, elle est 0, graphiquement c'est une droite horizontale » [Elle continue à utiliser la calculatrice]. Wendy lui demande alors de lui montrer où est l'erreur dans son traitement algébrique.

Pendant la discussion plusieurs étudiants utilisent la calculatrice. Victor branche la sienne au rétroprojecteur et il montre la représentation algébrique de la fonction. En utilisant la fenêtre des représentations graphiques et la commande pour calculer la dérivée en x = 0, voilà la déstabilisation cognitive réinstallée ! (voir figure 2.8).

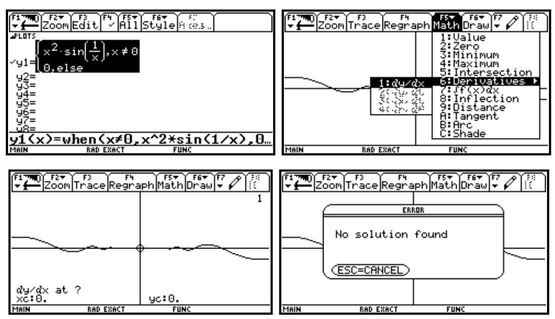


Figure 2.8. *Production d'un étudiant (Victor)*

Wendy réagit tout de suite en disant qu'il ne faut pas toujours faire confiance à la calculatrice ! (elle utilise les mêmes arguments que Victor) Elle montre même quelques exemples où la calculatrice a donné une réponse inexacte pendant le cours.

Victor répond qu'il y a sûrement une erreur dans le traitement algébrique et, en même temps, il dit que, en réalité, il ne peut pas concilier le traitement algébrique avec une approche visuelle. À ce moment-là, un sentiment de déséquilibre se fait jour parmi les étudiants. Au cours suivant, la discussion reprend de la même manière qu'au cours précédent, mais la division entre les étudiants est plus claire. Quelques minutes après le début, Victor fait une remarque qui entraîne un changement d'avis de tous les étudiants. Il dit : « La dérivée d'une fonction dérivable n'est pas nécessairement continue. » Tous comprennent que l'erreur d'interprétation est là, et Victor ajoute que, finalement, Wendy a raison ! Le professeur demande si le processus de dérivation réalisé par Wendy est correct ; les étudiants répondent que oui, puis se désintéressent de la discussion. Les points saillants de cette activité pourraient êtres énoncés comme suit :

– la calculatrice a servi pour faire des calculs précis ;

– même si un traitement algébrique est correct, la calculatrice devient un instrument pour se convaincre de la véracité d'une conjecture et pour essayer de convaincre les autres ;

– si la calculatrice donne un résultat qui n'est pas en accord avec leurs conjectures, les étudiants doutent et essayent de résoudre le conflit ;

– la conception que la dérivée d'une fonction définie par intervalles est la réunion des dérivées sur chacune des parties, et la conception que la dérivée d'une fonction dérivable doit être continue n'étant pas compatibles, les étudiants ont entamé un débat qui les a amenés à créer une articulation entre les représentations en jeu dans la résolution de l'activité pour dépasser le conflit ;

– l'incubation d'idées et l'auto-réflexion sont nécessaires au débat scientifique.

En résumé, nous pouvons voir que le débat scientifique et l'auto–réflexion sont des éléments qui ont permis aux étudiants de dépasser quelques contradictions cognitives et ceci leur a donné la possibilité de changer certaines conceptions. Cependant, il est resté, chez la plupart d'entre eux, la conception de qu'« étant donné une fonction définie par intervalles, nous pouvons utiliser les formules de dérivation, de façon isolée, pour chacune des parties sans utiliser la définition de dérivée pour les points critiques ». Pendant les derniers entretiens, nous avons pu susciter l'apparition de contradictions logiques (en utilisant des fonctions "ad hoc"). Ceci a permis aux étudiants de surmonter leurs contradictions cognitives (après que nous leur ayons demandé de nous expliquer leur processus de conversion entre représentations).

2.5. Conclusion

L'objet de ce chapitre est d'essayer de comprendre la complexité des relations qui existent entre action et conceptualisation, ainsi que le rôle des situations didactiques, à partir de l'étude de l'activité instrumentée.

Pour analyser cette complexité nous avons utilisé la méthodologie ACODESA qui intègre des aspects considérés essentiels dans plusieurs communautés de recherche (voir introduction et Hotte et Contamines, chapitre xx). Cette méthodologie encourage la recherche de solutions et de preuves dans un esprit de collaboration, d'argumentation et preuve, dans les équipes et en grand groupe, avant un travail final qui se fait de manière individuelle. Nous pouvons distinguer trois grandes étapes :

– les deux premières sont liées à la co-construction des connaissances dans un travail en équipe et en grand groupe (appropriation du problème, propositions, défense des propositions en équipe et en grand groupe) ;

– la troisième, en est une de réflexion personnelle dans laquelle l'étudiant doit reprendre à son compte les discussions et débats auxquels il a participé pour construire une solution qui lui est propre.

Lors des échanges entre les étudiants, nous avons pu assister à de véritables débats scientifiques qui peuvent être d'une grande richesse. En particulier, des contradictions logiques et cognitives peuvent y apparaître qui, grâce à la troisième étape, peuvent être dépassées à travers une reconstruction personnelle des échanges et des débats avec un rejet- ou une acceptation- de ceux-ci (n'oublions pas que le professeur a ramassé tous les documents relatifs au travail fait en classe). Si une contradiction cognitive est associée à un obstacle épistémologique au sens de Brousseau [BRO 98], la résolution de cette contradiction cognitive est absolument nécessaire pour dépasser cet obstacle. Nos diverses expériences avec la méthodologie ACODESA, et en particulier celle décrite dans ce chapitre, nous montrent que, bien que le franchissement d'un obstacle épistémologique ne soit pas toujours facile à susciter, les étudiants sont parvenus à une construction plus solide des concepts en jeu.

Pour terminer, nous voudrions souligner que lors de la résolution des activités, la très grande majorité des étudiants a utilisé la calculatrice comme un instrument de manière tout à fait naturelle. Elle a permis aux étudiants de concilier les processus papier-crayon et ceux produits avec la calculatrice. Elle a aussi joué un rôle de facilitateur pour l'articulation des représentations associées au concept. Cette caractéristique nous laisse penser que son rôle était autant un moyen de contrôle qu'un support dans la transformation d'une conception nécessaire à la construction d'un concept, et enfin qu'un moyen pour convaincre.

2.6 Références

[ALI 91] ALIBERT D. & THOMAS, M., « Research on mathematical proof », in D. Tall (dir.) *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1991.

[ART 90] ARTIGUE M., « Epistémologie et Didactique », *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 10, No. 2.3, 241-286, 1990.

[ART 02] ARTIGUE M., « L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques », in D. Guin et L. Trouche (dir.), *Calculatrices Symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique,* 277-349, Grenoble : La Pensée Sauvage, 2002.

[BRO 98] BROUSSEAU G., *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, 1998.

[DIL 99] DILLENBOURG P., « What do you mean by collaborative learning? » In P. Dillenbourg (dir.), *Collaborative Learning : Cognitive and Computational Approaches,* 1-19), Amsterdam : Elsevier Science/Pergamon, 1999.

[DUR 83] DUROUX A., « La valeur Absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure », *Petite **x***, 43-67, 1983.

[DUV 93] DUVAL R., « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* Vol. 5, 37-65, 1993.

[DUV 95] DUVAL R., *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*, Suisse : Peter Lang, 1995.

[HAD 75] HADAMARD J., *Essai sur la psychologie de l'invention dans les domaines mathématiques*, Paris : Gauthier-Villards, 1975.

[HAU 87] HAUCHART C., ET ROUCHE N., *Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*, Louvain-la-Neuve : CIACO, 1987.

[HIT 03] HITT F., « Le caractère fonctionnel des représentations », *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, Vol. 8, 975-999, 2003.

[HIT 06] HITT F., « Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An exemple : the concept of limit », *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, Vol. 11, 253-268, 2006.

[JAN 87] JANVIER C. (dir.), « *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* », London : Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[LAG 02] LAGRANGE J.B., « Étudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques», in Dominique Guin et Luc Trouche (dir.), *Calculatrices Symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique,* 151-185, Grenoble : La Pensée Sauvage, 2002.

[LEG 93] LEGRAND M., « Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse », *Repères*, no. 10, 123-159, janvier 1993.

[LEG 01] LEGRAND M., « Scientific debate in mathematics courses », in Derek Holton (dir.), *The teaching and learning of mathematics at university level : An ICMI Study,* 127-135, Dordretch : Kluwer Academic Publishers, 2001.

[PIA 75] PIAGET J., *L'Équilibration des structures cognitives*, Paris : PUF, 1975.

[RAB 95] RABARDEL P., *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Armand Colin, 1995.

[THO 02] THOMPSON P., « Some remarks on conventions and representations », in Fernando Hitt (dir.), *Representations and Mathematics Visualization,* 199-206, Mexico : International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN, 2002.

[TRO 02] TROUCHE L., « Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique », in Dominique Guin et Luc Trouche (dir.), *Calculatrices Symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique,* 187-214, Grenoble : La Pensée Sauvage, 2002.