UTILISATION DE LA CALCULATRICE SYMBOLIQUE DANS UN ENVIRONNEMENT D'APPRENTISSAGE COOPERATIF, DE DEBAT SCIENTIFIQUE ET D'AUTO – REFLEXION

Fernando Hitt
Université du Québec à Montréal, Cinvestav-IPN

Résumé : Notre étude s'appuie sur une recherche effectuée en 2001-2002 dans laquelle nous avons réalisé une expérimentation qui utilise une nouvelle méthodologie que nous avons appelée ACODESA. Dans cette expérimentation, nous avons essayé de mettre en évidence l'articulation entre les représentations produites lors d'un travail papier/crayon, lors d'un travail de calcul formel (avec calculatrice symbolique) et lors d'un travail d'auto – réflexion. Elle a été menée dans un environnement d'apprentissage coopératif (REYNOLDS et al. 95), de débat scientifique (ALIBERT & THOMAS 91 ; LEGRAND 01) et d'auto – réflexion (HADAMARD 75). Son objectif était la construction, ou la reconstruction de certains concepts du calcul différentiel par des étudiants ayant initié une maîtrise sur l'enseignement des mathématiques.

1. Introduction et problématique

Dès le début du siècle dernier, différents modèles de la pensée ont été développés et ont donné lieu à différentes méthodologies liées à l'enseignement. Par exemple, McKellar (1957, p. 118) dans son chapitre qui traite des conditions favorables à la créativité, cite le modèle de Wallas (1926), qui indique que, face à un problème, la pensée suit quatre étapes: Préparation, incubation, illumination et vérification. L'étape d'incubation étant celle où l'inconscient travaille pour produire des idées pour la résolution du problème. Hadamard (1975) a repris l'idée d'incubation et a donné comme exemple les découvertes mathématiques faites par Poincaré. Guilford (1967), dans son modèle sur l'intelligence humaine a repris les conditions de la créativité en formulant une nouvelle notion qu'il a appelée « la pensée divergente » comme opposé à la pensée convergente dirigée vers un but.

La construction d'activités que nous pourrions classer comme déclencheur de la pensée divergente, a attiré l'attention des mathématiciens qui ont alors développé une théorie se rapportant à la résolution de problèmes. Par la suite, des didacticiens ont fait des expérimentations pour comprendre comment se développent chez les élèves les stratégies[1] et les heuristiques[2] nécessaires à la de résolution de problèmes (voir p. e., MASON 82/94 ; SCHOENFELD 85).

Une autre théorie qui, de façon implicite, entraîne le développement de stratégies et d'heuristiques, et, de façon explicite, entraîne la construction de concepts est celle développée par Brousseau (1983, 1997) qui comprend la notion d'obstacle épistémologique et la théorie des situations. Vergnaud (1981), avec sa théorie des « Champs conceptuels » et luis aussi centré sur la construction des concepts. Duval (1993 ; 1995), abonde dans le même sens avec sa théorie des registres sémiotiques de représentation et sur l'importance de l'articulation entre représentations.

Notre recherche est socio-constructiviste et la méthodologie que nous avons utilisée comporte de longs enchaînements de situations didactiques (voir GLAESER 99). Cette méthodologie est liée à l'apprentissage coopératif (REYNOLDS et al. 95), le débat scientifique (ALIBERT and THOMAS 91 ; LEGRAND 01) et aussi sur l'auto – réflexion en lien avec

[1] Art de combiner des actions dans un but déterminé.
[2] Art de faire des recherches, technique de la découverte notamment dans le domaine de la connaissance.

l'incubation (HADAMARD 75). Puisque nous nous sommes intéressés à des apprentissages instrumentés (TROUCHE 02), nous voulons analyser le rôle joué par l'intégration des calculatrices symboliques dans la construction de concepts mathématiques. Le premier problème d'apprentissage que nous avons choisi est celui de la limite, car c'est un concept mathématique considéré comme difficile à construire et même générateur d'obstacles cognitifs ; Par la suite nous avons travaillé sur d'autres concepts du calcul différentiel dans lesquels le concept de limite intervenait.

1.1 Pratiques éducatives intégrant les TIC vers une pensée convergente

L'intégration des TIC à l'apprentissage des mathématiques peut se faire de plusieurs manières. L'une d'elles se base sur la pensée convergente; c'est-à-dire, que la tâche demandée à l'étudiant fait appel à un processus déjà connu de lui. L'exemple que nous avons choisi, pour illustrer ceci, se trouve dans Meagher (2004). Cette activité a été réalisée avec MATHEMATICA.

Trouver le maximum du graphe de f[x] = e^(-x^2)(2+Cos [x] + (Sin [x]/2). Ce graphe a-t-il un minimum?

Dans cette expérimentation, les étudiants ont voulu utiliser un processus bien connu pour le calcul des maxima et des minima. Ils ont demandé à MATHEMATICA de calculer la dérivée de la fonction, puis ils ont essayé d'utiliser la commande « Solve [f '[x] == 0, x] » et « NSolve [f '[x] == 0, x] ». MATHEMATICA n'ayant pas donné la réponse qu'ils attendaient, ils ont décidé de résoudre le problème de façon graphique. L'étude montre que les étudiants n'ont pu se dégager du logiciel et sont restés dans une approche visuelle.

Si nous prenons en compte le travail de Fischbein (1987) dans le sens que la représentation visuelle en liaison avec une intuition globale s'oppose à la pensée analytique, on peut comprendre que de façon naturelle les étudiants vont rester dans le mode graphique. C'est-à-dire que les étudiants, au lieu d'utiliser les représentations graphiques pour concevoir un but à atteindre considèrent les représentations visuelles comme le seul résultat possible sans s'engager dans un processus algébrique. Aussi, il est bien connu que avec certains logiciels et en dépendant de l'activité certains élèves restent ancrés au logiciel (voir HITT 94).

Puisque l'objectif de Meagher était d'analyser les processus d'apprentissage dans un environnement technique, la critique qu'on peut faire de son expérimentation c'est qu'il aurait eu non seulement besoin d'activités du type automatisme[3] déclencheur d'une pensée convergente. Les questions de ce type, quand le logiciel est très puisant, laissent très peu de chances aux étudiants de développer des processus heuristiques qui peuvent les aider dans la construction de leurs connaissances. En effet, on leur demande de faire ce qu'ils déjà savent déjà faire dans un environnement papier/crayon, mais cette fois-ci avec la technologie.

1.2 Pratiques éducatives intégrant les TIC pour déclencher une pensée divergente

Arcavi et Hadas (2000), dans un contexte de résolution de problèmes, nous proposent l'intégration des TIC dans des activités géométriques. Ils nous montrent comment à partir d'une situation simple, on peut provoquer la réflexion.

Voici la situation qu'ils ont proposée aux étudiants pour entamer l'activité. Le logiciel utilisé était 'Geometry inventor'. Nous allons illustrer ici la même situation avec une calculatrice Voyage 200.

[3] Face à un énoncé, lui fait appel à une procédure déterminée. ????

Première partie. Construire un triangle isocèle ABC tel que $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Deuxième partie. Qu'est-ce qui varie et qu'est-ce qui demeure constant?

On peut produire des triangles isocèles en traînant le sommet C comme le montre la Figure 1.

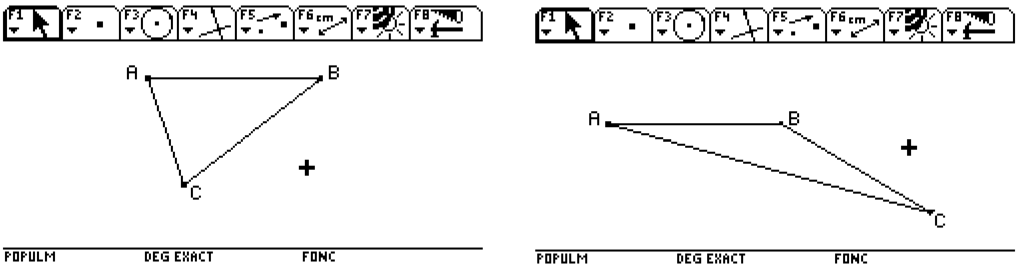


Figure 1. Construction d'un triangle isocèle par une variation dynamique

Arcavi et Hadas signalent qu'après quelques minutes les étudiants ont proposé d'étudier la variation de l'aire en fonction du côté $\overline{AC}$ (Figure 2). Plusieurs autres relations fonctionnelles ont été envisagées par les étudiants, par exemple, l'aire du triangle en fonction de sa hauteur ; Cela nous permet de classer l'activité comme étant du type divergent. De plus, comme on le verra dans la troisième partie, l'activité a amené les étudiants à débattre du concept de fonction et celui de relation.

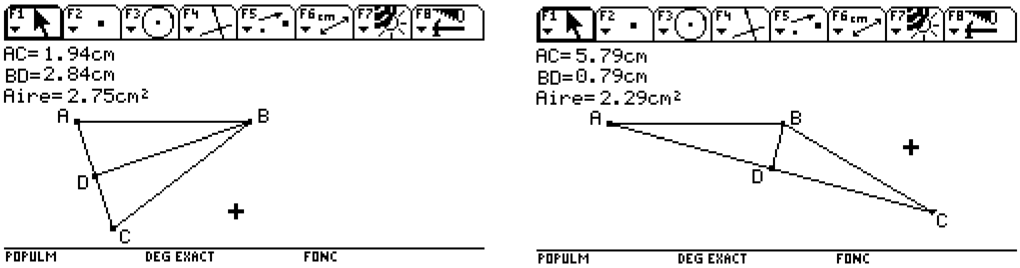


Figure 2. Visualisation du domaine de la fonction et représentations figurale et numérique

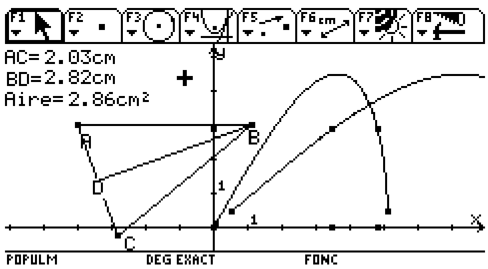


Figure 3. Représentation figurale, numérique et graphique

Troisième partie. Construire un triangle ABC, tel que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Qu'est-ce qui varie et qu'est-ce qui demeure constant ?

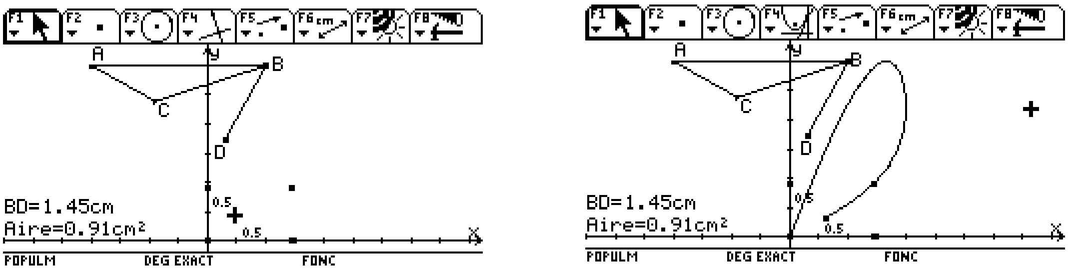


Figure 4. Représentation d'une courbe que n'est pas le graphique d'une fonction

Arcavi et Hadas (Idem, p. 26-28) émettent l'hypothèse sur ce que doit promouvoir une activité en utilisant les TIC :

« *Visualisation : La visualisation, en général, est en rapport avec l'habileté à représenter, à transformer, à générer, à communiquer, à documenter, et à réfléchir sur l'information visuelle (Hershkovitz, 1989, p. 75)…*

Expérimentation : À part la visualisation, le travail dans des environnements dynamiques, permet aux étudiants d'apprendre et d'expérimenter…

Surprise : Le défi c'est de trouver des situations dans lesquelles ce qu'on attend est inattendu ou contre-intuitif, de façon à ce que la surprise (ou le mystère) généré, crée une claire disparité avec les prédictions explicitement avancées.

Feed-back : … Le feed-back est fourni par l'environnement même. Celui-ci répond comme il a été questionné.

Nécessité de démontrer et d'argumenter. …À partir de la surprise, beaucoup d'étudiants peuvent ressentir la nécessité d'une démonstration. » (Traduction de l'original).

Cette approche, centrée sur le développement des stratégies et heuristiques propres à la résolution de problèmes, déclenche d'abord une approche divergente de la pensée, et ensuite une pensée convergente. Dans cette approche :

- l'activité mathématique et l'environnement technique doivent être bien choisie pour provoquer un déclenchement divergent de la pensée ;
- l'activité doit être construite de façon à promouvoir chez les étudiants une articulation entre différentes représentations ;
- l'activité doit comporter des questions de façon à faire naître chez les étudiants une pensée convergente.

1.3 Pratiques éducatives intégrant les TIC pour la construction de concepts

Duval (1993, 1995) précise que, puisque toute représentation d'un objet mathématique est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente, les conversions entre les représentations et l'articulation entre elles jouent un rôle primordial pour la construction de concepts.

Hitt (2003) signale que les représentations spontanées des étudiants sont souvent jugées comme des représentations erronées par les experts (professeurs, par exemple). Hitt (Idem) démontre l'importance de prendre en considération ces représentations spontanées lors de la construction d'un concept mathématique car il pense qu'elles sont liées à une conception. Conception née de l'interaction du sujet avec les différentes représentations en jeu. Il serait donc possible, avec des activités riches, que les étudiants reconstruisent leurs conceptions et arrivent au savoir institutionnalisé.

Dans l'ingénierie didactique que nous avons élaborée, en intégrant les TIC, pour la construction de concepts mathématiques, nous avons pris en considération les points élaborés ci-dessus. La construction d'activités visait à différencier les processus finis et les processus infinis indispensables à la construction du concept de limite. Voici un exemple, pris dans notre expérimentation, visant la reconnaissance de processus finis et infinis qui sont indispensables à la construction du concept de limite.

Une fourmi marche sur une bande élastique qui au début mesure 24 cm de long. Elle entame son parcours à une extrémité et parcourt 6 cm par minute. Après chaque minute, on allonge l'élastique de 12 cm en admettant que la bande peut s'allonger indéfiniment de manière uniforme.

a) Sommes-nous face à un processus fini ou infini ?
b) La fourmi arrivera-t-elle à l'autre extrémité de la bande élastique ? Explique ta réponse.
c) Si as-tu répondu affirmativement à la question b), Combien de temps la fourmi prendra-t-elle pour arriver à l'autre extrémité ?

Dans cette activité, nous avons fourni du matériel aux étudiants (élastique, mètre, etc.). Chaque étudiant avait une calculatrice pour le travail individuel, mais une seule était permise lors du travail en équipe (nous allons préciser ci-dessous comment les équipes ont été formées et le rôle de chacun des membres).

Dans l'équipe constituée par Irene, Felipe et Adrian (noms fictifs) nous avons observé qu'Irene avait tracé un point sur l'élastique. Elle a réalisé concrètement l'expérience et l'a montré à ses compagnons. Ils sont ainsi arrivés à la conclusion que le processus était fini en utilisant plusieurs techniques que nous allons analyser plus loin. Dans une autre équipe, ils ont trouvé que le processus était infini mais que la fourmi se rapprochait de l'extrémité, dans une autre que le processus était infini mais que la fourmi s'éloignait de l'extrémité. L'équipe d'Irene a réfuté ces conclusions.

Pour réfuter les résultats des autres équipes, Irene est passée au tableau et a montré les calculs pour les minutes 1, 2, 9 et 10:

1re min 6 cm → 24 cm. 9 ← 36	2e min 15 → 36 20 ← 48
min 9. 115,72 → 120 127,30 ← 132	10 min 133,30 → 132 145,42 ← 144

« Eh bien, c'est approximativement à la minute 10, mais Adrian a fait un programme dans la calculatrice et il a trouvé exactement : 9 min 46 sec 52. »

À ce moment, Adrian a décidé de passer au tableau.

Adrian :... si m désigne les minutes, alors la longueur de l'élastique est $d = 24 + 12m$.

La distance que la fourmi a parcourue pendant la première minute est $d_{H1} = 9\ldots$

$$d_{H_m} = \frac{\left(d_{H_{m-1}} + 6\right)\left(24 + 12m\right)}{\left(24 + 12\left(m-1\right)\right)};\ldots\ d_{H_m} = \frac{\left(d_{H_{m-1}} + 6\right)\left(2 + m\right)}{\left(m+1\right)}\ »$$

La présentation d'Adrian a été tout à fait différente de ce qu'il avait écrit sur les feuilles récoltées après le débat. Adrian avait proposé de construire une fonction récursive : $f(1)=9$ et $f(n)=\dfrac{[f(n-1)+6]\cdot(2+n)}{1+n}$; et le programme suivant pour la calculatrice :

hormiga (n)
Prgm
Disp camina (n)
End Prgm
	camina (n)
	Func
	If n=1 Then
	    Return 9
	Else
	    Return (camina (n-1)+6)*(2+n)/(1+n))
	End If
	End Func

Avec son programme, il a calculé $hormiga(10)=\dfrac{55991}{385}$, qui est plus grand que 144 (longueur de l'élastique à la minute 10). Il a remarqué que la fourmi devrait arriver à l'extrémité de l'élastique entre les minutes 9 et 10. Qu'à la minute 9 manquait $\dfrac{1969}{420}cm$ et que pourtant $\dfrac{6}{\dfrac{1969}{420}}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1969}{2520}\min$, temps manquant après la minute 9. Finalement il a écrit comme résultat : 9 min 46s et 52,86 dixièmes.

Nous pouvons remarquer que dans cette équipe il y a eu :

- une approche concrète pour la compréhension du phénomène ;
- une approche papier/crayon pour calculer la distance parcourue par la fourmi ;
- une approche parallèle à celle du papier/crayon avec la calculatrice pour calculer et préciser la réponse.

2. Méthodologie d'apprentissage coopératif, débat scientifique et auto – réflexion (ACODESA)

La méthodologie du débat scientifique a montré son efficacité dans la classe de mathématique (LEGRAND 01) et celle-ci est venue donner une dimension différente à la construction sociale des connaissances par rapport à l'approche classique de l'apprentissage coopératif, nous l'avons pris en compte dans notre méthodologie. Notre approche a aussi emprunté un élément à Hadamard (1975) : l'auto-réflexion qui nous semble fondamentale pour la construction des connaissances.

Nous avons nommé notre méthodologie ACODESA (Apprentissage coopératif, Débat scientifique et Auto – réflexion).Voici rapidement en quoi elle consiste :

1. Construction d'un questionnaire préliminaire pour permettre le classement des étudiants en trois catégories : « Intuitifs », « Formalistes » et les Contradictoires.
2. Constitution des équipes avec un membre de chaque catégorie.
3. Les activités ont été construites pour provoquer un déséquilibre cognitif chez les étudiants.

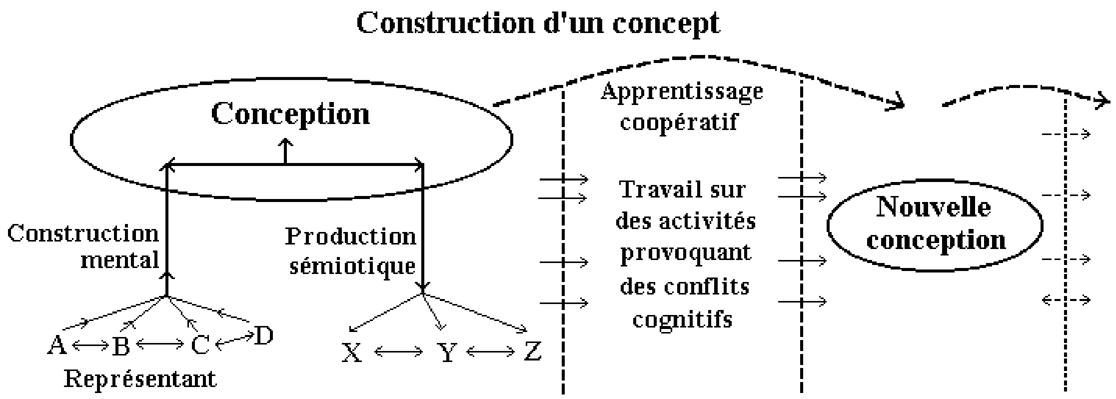
4. Pendant la résolution d'une activité en équipe, un étudiant utilise la calculatrice, un prend note des résultats et des débats alors que le dernier présente le tout. À chaque activité, les étudiants doivent changer de rôle. Il est recommandé d'utiliser une seule calculatrice, ceci permet une meilleure communication entre les membres de l'équipe.
5. Après le travail fait dans les équipes, on passe au débat (débat scientifique). L'idée principale est que, pour dépasser un obstacle épistémologique, les étudiants doivent faire face à des situations didactiques qui vont provoquer un déséquilibre cognitif, et le rôle du professeur n'est pas de signaler les contradictions logiques, mais plutôt, d'induire un débat sur les résultats obtenus par une équipe et la prise de conscience d'une contradiction doit venir de la part des étudiants.
6. A la fin du débat, le professeur doit ramasser tous les brouillons.
7. Puisque le débat va sûrement provoquer des changements de position, on demandera de refaire l'activité de façon individuelle pour provoquer une réflexion (auto-réflexion) sur les exemples, contre-exemples, démonstrations, etc., qui ont été présents lors du débat.
8. La révision du travail individuel permet au professeur de vérifier à posteriori s'il y a eu vraiment une transformation du schème de chaque étudiant. Il est bien connu que lorsque les étudiants discutent et arrivent à « un consensus », quelque temps après, plusieurs reviennent à leur position initiale (voir p. e. THOMPSON 02).

2.1 Enchaînements de situations didactiques

Comme nous l'avons déjà dit, nous sommes intéressés par la construction et la reconstruction des concepts. Les premiers contacts d'un élève avec certaines représentations d'un concept, vont l'amener à construire des conceptions. Pour nous, ces conceptions sont des connaissances liées à une articulation partielle entre les représentations qui ont été construites par l'étudiant. Ces conceptions vont probablement permettre de résoudre certains type de problèmes, et ils vont échouer avec des autres. La conception fonction comme une unité, comme une connaissance bien ancrée comme Brousseau (1983) et Duroux (1983, p. 51) l'ont signalé.

Comme nous l'avons dit, ce n'est pas le rôle du professeur de signaler les contradictions logiques des étudiants, la prise de conscience d'une contradiction doit venir d'eux, c'est une exigence pour dépasser un obstacle épistémologique. Dans cette approche, la discussion sur les représentations spontanées des étudiants, qui sont liées aux conceptions, est importante pour mettre à l'épreuve leurs conceptions.

Pour notre méthodologie ACODESA, nous avons fait un design des enchaînements des activités en utilisant le modèle suivant :

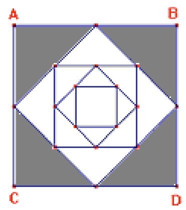


3. La méthodologie ACODESA en situation d'enseignement. Enchaînement de situations didactiques

La construction des activités avait pour objet la reconnaissance de processus fini et infini qui sont indispensables à la construction du concept de limite.

Analysons ce qui c'est passé avec l'activité suivante, empruntée à Hauchart et al., (1987) :

Soit ABCD un carré unitaire, on construit un carré inscrit en joignant les milieux des côtés. On enlève les quatre triangles ainsi formés avec le premier carré. On recommence la même opération sur le deuxième carré, ce qui en fait apparaître un troisième. On fait de même sur le troisième carré et ainsi de suite.



Que se passe-t-il si on continue le processus de façon illimitée?

Dans la discussion en grand groupe sur cette activité, des arguments portant sur la notation de la limite ont été soulevés. Par exemple, l'un d'eux souhaitait « changer la notation de la limite : $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ et attirer l'attention des étudiants sur sa signification». Dans le débat, certains disaient que la limite était un carré, d'autres que la limite était un point. Les « intuitionnistes » défendaient l'idée que la limite ne peut être atteinte, alors la notation mathématique qui devrait être utilisée dans les manuels devrait être: $\lim_{n\to\infty} a_n \to L$. Les « formalistes » ayant critiqué fortement cette approche, a entraîné un changement de la notation des intuitionnistes. Elle est devenue : $\lim a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. Cette discussion nous montre l'importance des représentations spontanées dans la construction des concepts.

Les activités ont joué le rôle que nous avions prévu. On peut voir dans les exemples précédents que les représentations spontanées ont été au cœur de la construction du concept de la limite. Un autre exemple importante a émergé après un des débats, quand le professeur a demandé de donner une définition formelle de la limite. Dans l'une des équipes ils ont construit ce qui suit (voir HITT 03) :

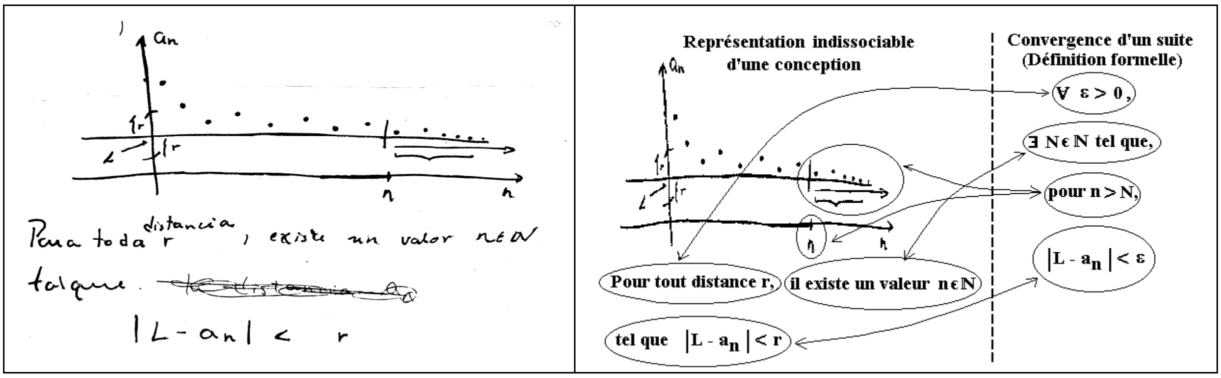


Figure 6.

En observant les exemples ci-dessus, on peut dégager :

- le caractère fonctionnel des représentations ;
- le concept mathématique a été construit à travers différentes représentations qu'on ne peut pas dissocier ;
- les représentations spontanées forment un tout cohérent, une conception ;
- la construction basée sur les représentations fonctionnelles pourrait paraître étrange, même contradictoire, aux yeux d'un expert.

Une fois la construction d'une définition établie, on peut passer à une autre étape en demandant de calculer des limites de fonctions, en utilisant la calculatrice. Par la suite, on peut faire travailler des activités de type convergent et passer à une phase d'institutionnalisation des savoirs.

3.1 La méthodologie ACODESA : enchaînement de situations didactiques et genèse instrumentale

3.1.1 Vers l'institutionnalisation des connaissances

Dans une activité routinière, dont l'objectif était l'utilisation de la calculatrice, nous avons demandé de travailler avec plusieurs représentations. L'activité était conçue pour vérifier si l'articulation entre les représentations était construite. Nous allons analyser ce qui s'est passé dans une équipe qui travaillait la question 2b ci-dessous.

2. Résoudre en utilisant la calculatrice et expliquer vos résultats.			
	Approche graphique	Approche numérique	Approche algébrique
a. $\underset{x\to -1}{lím} \frac{x^2-1}{x+1}$			
b. $\underset{x\to -1}{lím} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$			
c. $\underset{x\to 1}{lím} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x=1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \end{cases}$			

L'équipe était formée d'un étudiant classé comme formaliste (Pedro), une étudiante faible en mathématiques (Rita) qui tous deux avaient montré un manque de sensibilité à la contradiction dans le test préliminaire. Un troisième étudiant, intuitionniste (Jorge), que semblait aussi avoir développé une sensibilité à la contradiction. Il avait aussi montré une grande habileté dans l'utilisation de la calculatrice.

Jorge avait la calculatrice au début de l'activité (nous rappelons au lecteur que pour le travail en équipe il y avait une seule calculatrice sur la table), Pedro écrivait et Rita avait la responsabilité de présenter les résultats.

Jorge a fait le graphe de $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$. Leur explications concernaient ce qui se passait autour de x = 3. Ils n'ont pas remarqué que la question demandait d'analyser la fonction autour de x = -1. Voici le dialogue au moment où ils sont arrivés au processus algébrique :

Pablo. O.K. alors, pour l'approche algébrique nous avons :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x+3)} = \frac{0}{2} = 0$$

Jorge. Quoi! Tu t'es sûrement trompé quelque part!

Rita. Alors, je vais voir…

Pablo à Rita. Peut-être que nous devons calculer la dérivée [Pablo pensait probablement à la Règle de l'Hospital]

Jorge regardait le graphe avec une expression d'étonnement. Alors, il a dit : O.K. Alors, avec la calculatrice nous allons calculer $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ [et la calculatrice a affiché 0].

Jorge était accroché à la réponse de la calculatrice, muet… Les deux autres attendaient une réaction de Jorge. Mais rien… Puis, il est passé au mode graphique et a commencé à regarder le graphe. Il a utilisé le mode « trace » pour regarder ce qui se passait autour de x = -1, et il s'est exclamé : « Oufff ! J'ai eu peur ! Nous avions analysé les deux premières questions autour de x = -3 au lieu de x = -1 ! »

Si nous analysons les interventions de Jorge, on peut dire qu'il a développé une sensibilité à la contradiction, c'est lui qui avait remarqué la contradiction et immédiatement il a utilisé la calculatrice, pour essayer de comprendre la situation. La calculatrice lui a servi d'aide pour vérifier ses résultats et il a trouvé l'erreur en se débarrassant de la contradiction cognitive.

- Pour quelques étudiants, pour différentes raisons, la calculatrice était encore à ce moment un artefact.
- La prise de conscience d'une contradiction est accompagnée d'un sentiment de malaise (Jorge a dit : « Quoi !… Oufff ! J'avais peur !…»).
- Pour ceux qui avait développé une sensibilité à la contradiction, la calculatrice était devenue un moyen de contrôler la situation.

3.1.2 Processus de genèse instrumentale

Dans la deuxième partie du cours, une des questions proposées était :

5) Étant donné y $h(x)$ y $k(x)$ deux foncions tel que

$h'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$, $h(0) = 3$, $k'(x) = f(x+1)$, $k(0) = 0$. Trouver $(f \circ h)'(0)$, $(k \circ f)'(0)$ et $\alpha'(x^2)$ où $\alpha(x) = h(x^2)$.

Dans la partie consacrée au débat scientifique, Wendy est passée au tableau pour montrer le processus de résolution suivi par son équipe. Elle a dit que pour x = 0 il fallait calculer : $f'(h(0)) \cdot h'(0)$. Elle a aussi dit que h(0) = 3 et que $h'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$, $h'(0) = \sin^2(\sin(1))$. Et pour calculer $f'(x)$, elle a dit que la dérivé pour x $\neq 0$ était $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et pour x = 0, elle était égale à 0.

Le résultat est correct même si la procédure ne l'est pas (sa conception est que la dérivée d'une fonction définie par parties est égale à la dérivé de chaque partie). En fait, une fois que nous avons décelé cette conception, nous avons pu constater que cette conception a été ancrée chez la plupart des étudiants.

En continuant l'analyse, étonnement Victor est intervenu :

Victor: Nous ne sommes pas sûrs du résultat que tu as obtenu, parce que si nous faisons le calcul de la limite $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ nous n'obtenons pas 0!

L'intervention de Victor a provoqué un débat et après quelques minutes Wendy était la seule à dire que son résultat était vrai, elle a même utilisé la représentation graphique de la fonction pour « convaincre » le groupe que la dérivée en 0 était bien 0, parce que la fonction s'aplatit autour de 0 (voir Figure 7).

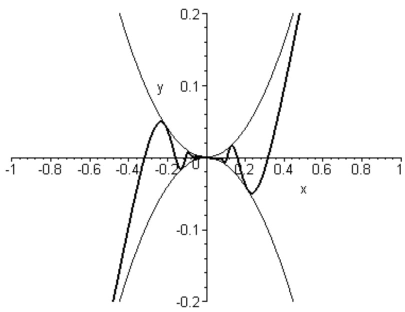


Figure 7.

Wendy a poursuivi en disant au groupe : « Si vous n'êtes pas convaincus, montrez-moi où se trouve l'erreur ».

Même si le cours était terminé, le débat a continué pendant encore 30 minutes (ça n'était pas la première fois). Le professeur a demandé de réfléchir pendant les deux jours suivants pour laisser un temps d'auto-réflexion comme prévu dans la méthodologie.

Le débat a continué au cours suivant. Lidia a pris la parole.

Lidia: La dérivée de cette fonction [f(x)] est celle-ci (voir Figure 8) et elle est égale à 0 pour x = 0 ; Alors, il n'y pas moyen que cette fonction soit continue !

Lidia : Le graphe a beaucoup d'oscillations, là, près de zéro ; Alors, j'ai l'impression que je ne peux pas coller le zéro !… c'est-à-dire, le graphe est une source d'informations mais ce graphe n'est pas fiable quand on prend une échelle plus grande en *x*, le graphe nous montre des oscillations et une ligne vertical.

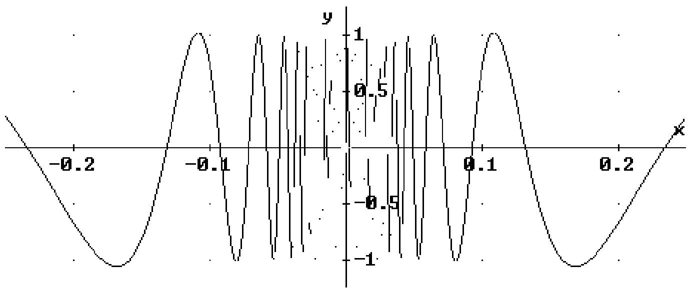


Figure 8.

Lidia a ajouté que la fonction est a fortiori discontinue.

À ce moment là, un sentiment de déséquilibre existait parmi les étudiants. Quelques minutes après, Victor a fait alors une remarque qui a changé totalement l'avis de tous; Il a dit : « La dérivée d'une fonction dérivable n'est pas nécessairement continue. », et il a ajouté que, finalement, Wendy avait raison! Le professeur a demandé si le processus de dérivation réalisé par Wendy était correcte ce à quoi ils ont répondu que oui, puis la discussion a cessé de les intéresser. Nous pourrions résumer ainsi le processus de genèse instrumentale et d'instrumentation (voir TROUCHE 02, p. 196-201) :

- même si un processus était incorrect, la calculatrice a servi d'instrument pour se convaincre de la véracité d'une conjecture et pour essayer de convaincre les autres;
- l'incubation d'idées et l'auto-réflexion était une conséquence naturelle du débat scientifique;
- les étudiants avec leur conception de la dérivée par parties d'une fonction définie par parties, avaient soulevé une confrontation avec d'autres étudiants qui avaient la conception de que : « La dérivé d'une fonction dérivable est continue. » Face à cette confrontation, la calculatrice a aidé aux étudiants a mieux comprendre la situation et leur a permit de trouver des éléments intéressants pour déceler où le problème était, et pour promouvoir une transformation chez les étudiants de leur conception sur la dérivé d'une fonction.

Nous pouvons voir que le débat scientifique, l'auto-réfexion et la genèse instrumentale ont donné les éléments pour arriver à une réponse, et ça leur a donné la possibilité de changer leur conception.

4. Discussion

La construction d'activités en suivant les aspects théoriques commentés dans ce chapitre, et en suivant la méthodologie ACODESA, a montré l'importance des représentations spontanées pour la construction des connaissances.

Avec les activités proposées, nous avons constaté que pour la majorité des étudiants la calculatrice est devenue un instrument et non plus un artefact. Son utilisation dans la résolution des activités était naturelle, elle a permit aux étudiants de concilier leur processus papier/crayon et ceux produits avec la calculatrice. La calculatrice a joué un rôle de facilitateur pour l'articulation des représentations du concept. Du à cette caractéristique, nous pensons que son rôle était autant comme un moyen de contrôle, comme support dans la transformation d'une conception pour la construction d'un concept et comme moyen pour convaincre, c'est-à-dire, les activités avec la méthodologie ACODESA ont entraîné l'usage de la calculatrice et ce, de manière naturelle pour favoriser le processus de genèse instrumentale.

Dans notre méthodologie, à la fin de chaque activité ou du cours, nous avons pris les brouillons faits par les équipes et nous leur avons demandé de refaire l'activité individuellement. Ceci nous a permis de constater que certains étudiants sont revenus en arrière et que le consensus que nous avions cru avoir obtenu à la fin d'un débat n'était que momentané. Les résultats ont montré que le dépassement d'un obstacle n'est pas facile à produire chez certains étudiants, mais nous avons aussi pu constater qu'avec cette méthodologie, ils sont arrivés à une construction plus solide du concept de limite.

5. Bibliographie

Alibert, D. & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Arcavi A. & Hadas N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, pp. 25-45.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 4.2, pp. 164-198.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* 1970-1990, In Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V. (Eds. and Trans.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duroux Alain. (1983). La valeur Absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petite x*, pp. 43-67.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, pp. 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Suisse: Peter Lang.

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Glaeser G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. La Pensée Sauvage Éditons. France.

Guilford, J.P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Hadamard J. (1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans les domaines mathématiques*. Paris : Gauthier-Villards.

Hauchart C. et Rouche N. (1987). *Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*. Louvain-la-Neuve : CIACO.

Hitt F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: Polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Sciences and Technology*. Vol. 25, No. 3, pp. 447-455.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, Vol. 8, pp. 975-999.

Legrand M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In Derek Holton (Ed.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 127-135). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Mason John. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison Wesley. Traduction: *L'Esprit Mathématique*, 1994. Québec: Modulo.

McKellar P. (1957). *Imagination and thinking. A psychological analysis*. New York: Basic Books.

Meagher M. (2004). Learning in a computer algebra system (CAS). *Proceedings of the international meeting of Psychology of Mathematics Education North American Chapter XXIV*. 2004. Toronto, Canada, pp. 1457-1464.

Piaget J., Bonnet CL., Bronckart J., Bullinger A., Cattin A., Ducret J., Henriques A., Kamii C., Munari A., Papandropoulou I., Parrat S., Robert M. et Vergopoulo VH. (1974). *Recherches sur la contradiction*. Vol. I et II. Paris : PUF.

Reynolds B., Hagelgans N., Schwingendorf., Vidakovic D., Dubinski E., Shahin M. & Wimbish G. (1995). *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*. MAA Notes Number 37.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York : Academic Press.

Thompson P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In Fernando Hitt (Editor), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 199-206). International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Trouche L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En Dominique Guin et Luc Trouche

(Éditeurs), *Calculatrices Symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (pp. 187-214). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 2, no. 2.