LUC TROUCHE

LA PARABOLE DU GAUCHER ET DE LA CASSEROLE À BEC VERSEUR: ÉTUDE DES PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DANS UN ENVIRONNEMENT DE CALCULATRICES SYMBOLIQUES

ABSTRACT. This paper concerns the problems of conceptualization of the function limit in technological environments (principally graphic calculators today, symbolic calculators tomorrow) that are gradually being adopting in precalculus teaching. In France, such teaching takes place in the scientific stream during the last year of high school (18-year-old pupils). This paper shows out how the instrumentation process and the conceptualization process are dependent on each other and stresses especially:

– the importance of the notion of *scheme* analysing the instrumented action where act and thought are linked;
– the importance of the notion of *metaknowledge* analysing different pupil behaviours. A typology of pupil behaviours and a list of schemes are set out.

The relationships between this typology and these schemes provide information about the influence of calculating tools and provide some ways of controlling their integration in mathematics lessons.

RÉSUMÉ. L'article concerne les problèmes de conceptualisation de la notion de limite de fonctions, au niveau de la classe terminale scientifique des lycées français (élèves de 18 ans), en relation avec les environnements technologiques dans lesquels l'enseignement des débuts de l'analyse tend progressivement à s'inscrire (principalement les calculatrices 'graphiques' aujourd'hui, 'symboliques' demain). L'article met en évidence l'interdépendance des processus d'instrumentation et de conceptualisation. Il insiste en particulier sur deux points:

– l'importance de la notion de schème pour analyser l'action instrumentée, pour mettre en relation le geste et la pensée;
– l'importance de la notion de métaconnaissance pour analyser les différences de comportements des élèves.

Une typologie des comportements est établie, un répertoire de schèmes est dressé. La mise en relation de cette typologie et de ce répertoire donne quelques informations sur l'influence des outils de calcul dans le processus d'apprentissage et fournit quelques pistes pour contrôler leur intégration dans le cours de mathématiques.

1. UNE INTRODUCTION EN FORME DE PARABOLE

Nous allons aborder dans cet article les problèmes posés par l'intégration de calculatrices complexes dans un environnement d'enseignement. La

Educational Studies in Mathematics **41:** 239–264, 2000.

compréhension de ce qui va suivre suppose cependant d'avoir vécu, ou au moins d'avoir observé, ou au moins de pouvoir imaginer, la situation banale suivante: c'est le moment du petit déjeuner, un gaucher utilise une casserole à bec verseur pour remplir de lait chaud une tasse:

– le sujet effleure rapidement le manche de la casserole pour vérifier qu'il n'est pas trop chaud, le saisit avec la main gauche et interrompt son geste (il réalise que l'outil n'est pas adapté au geste qu'il envisage: le bec verseur est du mauvais côté par rapport au bol);
– un moment de réflexion s'ensuit; le sujet doit en effet choisir entre (au moins) sept procédures:

    1. s'adapter complètement à la configuration de l'outil (ce qui suppose rompre avec des habitudes profondes, 'se faire une certaine violence'); cela lui imposera ici de nier son comportement de gaucher, de saisir le manche avec la main droite et de verser ainsi le liquide dans la tasse (la casserole est . . . dans son rôle, mais le geste est peu assuré, le succès également);
    2. s'adapter modérément à la configuration de l'outil (ce qui nécessite une certaine imagination et une certaine souplesse); cela supposera ici de prendre le manche de la main gauche, de placer la casserole à droite du bol et de verser le liquide vers la gauche (le liquide coule comme il le faut, le gaucher reste gaucher, mais le geste est beaucoup plus complexe que pour un droitier: le coude rentre à l'intérieur du corps, le corps entier bascule pour équilibrer le mouvement);
    3. adapter l'outil à son propre comportement (ce qui suppose une certaine audace, une rupture avec les conventions sociales – on pourrait dire une rupture avec les règles de l'institution 'petit déjeuner'); on prendra ici la casserole de la main gauche, on la placera à gauche de la tasse et on versera le lait dans la tasse du côté de la casserole opposé au bec verseur;
    4. refuser l'outil et aller en chercher un autre pour accomplir la tâche (ce qui suppose une rupture encore plus grande avec l'ordre institué localement); on ira alors chercher une casserole pour gaucher ou alors une casserole sans bec verseur;
    5. refuser l'outil et modifier la tâche (ce qui suppose une rupture avec ses propres habitudes): on se contentera de lait froid, que l'on versera directement dans la tasse avec la bouteille issue du réfrigérateur;
    6. refuser la tâche elle-même: on décidera alors que l'on ne déjeunera pas ce jour là;

7. refuser globalement l'institution dans laquelle la tâche est proposée; on pourra alors choisir d'aller prendre son petit déjeuner au café d'en face.

Cette description est bien sûr beaucoup trop schématique, le cadre est trop imprécis (le sujet est-il chez lui, chez un ami, dans un cadre inconnu? Rencontre-t-il cette situation pour la première fois, la deuxième fois, la millième fois ?...); d'autres issues sont certainement possibles. Mais il est certain que se jouent dans cette confrontation entre un sujet et un instrument bien d'autres choses que le versement d'un liquide dans une tasse et la possibilité ou non de déjeuner ce matin là:

– il y a pour le sujet des apprentissages en jeu (sur l'outil, sur les différents éléments que l'outil permet ou non de manipuler, sur le cadre dans lequel l'action se déroule, enfin sur lui-même, les gestes et la coordination des gestes contraints – relativement – par l'outil et la tâche à accomplir);
– il y a pour le spectateur aussi des apprentissages en jeu (les choix opérés par le principal protagoniste de la scène donnent des renseignements précieux sur son comportement, permettent d'adapter en retour l'outil ou la tâche pour sa réalisation effective – il s'agit de déjeuner, et dans des conditions convenables).

Nous voudrions simplement transposer dans cet article les 'leçons 'de cette parabole à l'enseignement des mathématiques dans des environnements technologiques complexes: l'institution est clairement identifiée (il s'agit du cours de mathématiques), la tâche est (en général) claire (il s'agit de résoudre des problèmes), l'outil sera ici une calculatrice graphique ou symbolique (il s'agira plus précisément de la calculatrice TI-92 de Texas Instruments, pourvue d'un logiciel de calcul formel, Derive et d'un logiciel de géométrie, Cabri). Quant à l'acteur, il s'agira de l'élève, droitier, gaucher ou ambidextre.

2. Quelques références théoriques

2.1. *Le schème, cadre théorique pour mettre en relation le geste et la pensée*

L'analyse du travail instrumenté nécessite une théorie de la relation dialectique entre le geste et la pensée. Nous nous situerons ici dans le cadre de la théorie développée par Gérard Vergnaud. Il distingue les conceptions, 'exprimables par des suites d'énoncés dont les éléments sont des objets, des prédicats monadiques ou polyadiques, des transformations, des conditions, des circonstances, des modalités...' et les compétences 'qui s'expriment en général par des actions jugées adéquates pour traiter des situations' (Vergnaud, 1996, p. 175). Il introduit le concept de *schème* qui permet la mise en relation des compétences et des conceptions. Un schème est une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations. Il a une intention et un but et constitue une totalité dynamique fonctionnelle. Pour en comprendre la fonction et la dynamique, on doit prendre en compte l'ensemble de ses composantes:

– le but, les sous-buts et les anticipations;
– les règles d'action, de prise d'information et de contrôle;
– les invariants opératoires;
– les possibilités d'inférence en situation.

La notion de schème est souvent reprise dans l'étude du travail 'avec instruments':

– parfois de façon plus restrictive, comme synonyme de structure d'une action finalisée. S. Hershkovitz et P. Nesher (1996) étudient ainsi les effets comparés de plusieurs logiciels pour la construction de schèmes de résolution de problèmes d'arithmétique;
– parfois comme élément de compréhension de la construction des rapports entre un individu et un outil. C'est dans ce cadre que nous situerons notre étude, en nous appuyant en particulier sur le travail de Pierre Rabardel. Il distingue précisément l'outil technique ('l'artefact') et l'instrument. L'instrument naît de la confrontation entre un outil avec ses potentialités, ses contraintes et un individu avec ses connaissances, ses habitudes de travail antérieures (Rabardel, 1995, p. 135). Nous avons illustré cette genèse et les schèmes qui résultent de cette confrontation à travers la Figure 1.

La genèse instrumentale combine (de façon souvent inégale) deux processus: un processus *d'instrumentation* (à travers lequel le sujet s'adapte à l'outil: cf. les procédures 1 et 2 de la parabole du gaucher) et un processus *d'instrumentalisation* (à travers lequel le sujet adapte l'outil à lui-même: cf. la procédure 3 de la parabole du gaucher). Elle se concrétise à travers l'élaboration par le sujet de schèmes d'utilisation. P. Rabardel (1995, p. 113) distingue:

– *les schèmes d'usage*, 'orientés vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact' (cf. toujours la parabole introductive: effleurer le manche de la casserole pour vérifier qu'il n'est pas trop chaud);
– *les schèmes d'action instrumentée* dont 'la signification est donnée par l'acte global ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet

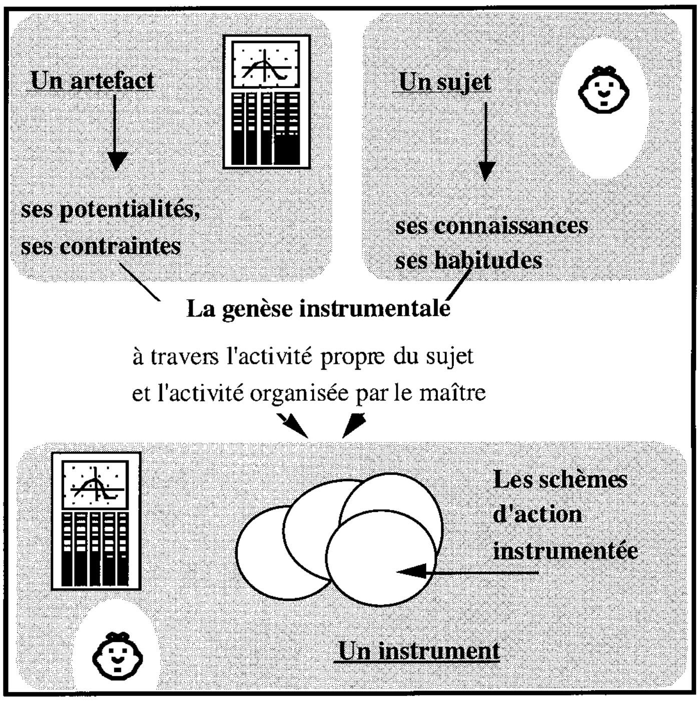

Figure 1. La genèse instrumentale.

de l'activité' (quand le gaucher aura choisi parmi les différentes possibilités d'utilisation de la casserole à bec verseur et que son action sera – provisoirement – stabilisée, on pourra parler de schème d'action instrumentée).

Un instrument est rarement définitivement construit. Les schèmes peuvent évoluer. A travers les situations rencontrées par le sujet, à travers les dispositifs institués par l'institution (scolaire par exemple), la genèse instrumentale se poursuit.

Pour suivre ces processus, il nous faut désormais une méthode d'analyse de l'outil lui-même et une méthode de repérage de l'action de l'utilisateur.

2.2. *Un outil, comme préstructuration relative de l'action*

Nous évoquerons ici les outils qui sont aujourd'hui à la disposition des élèves dans le cours de mathématiques, les calculatrices graphiques ou symboliques:

– les premières sont largement répandues en France dans les classes de lycées et leur utilisation est prescrite par les textes officiels;

– les deuxièmes ont fait leur apparition depuis trois ans et sont le support d'expérimentation dans des classes (Artigue et al., 1997; Trouche, 1996; Guin et Delgoulet, 1997).

Ces outils ne sont pas neutres. Leurs effets doivent être analysés en termes de contraintes et de potentialités.

N. Balacheff (1994, p. 365) a analysé les effets de *la transposition informatique* sur la connaissance implantée dans ce type d'outil: 'je parlerai de transposition informatique pour désigner ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique, qu'il s'agisse ensuite de montrer la connaissance ou de la manipuler'.

Il distingue les contraintes liées à l'univers interne de la machine (le programme représentant le cercle) et les contraintes liées à l'interface (la représentation déformée du cercle par les pixels de l'écran, cf. Figure 2).

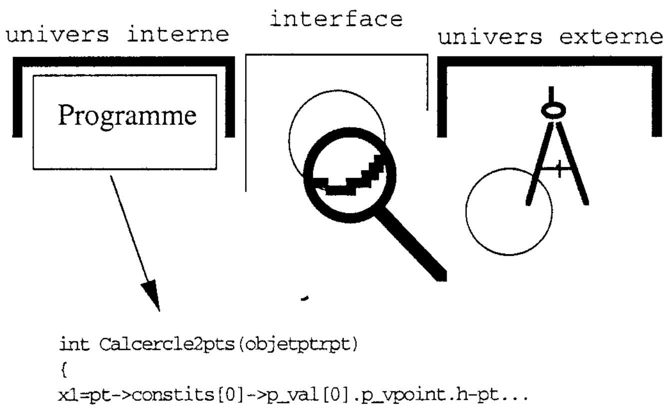

Figure 2. Figure 2. Transposition informatique du cercle.

Nous avons distingué (Trouche, 1997, p. 127) trois types de contraintes pesant sur l'utilisateur:

– des contraintes internes (liées de façon intrinsèque au matériel: limitations du logiciel, limitation de la mémoire, nature de l'écran composé d'un nombre fini de pixels);
– des contraintes de commandes (liées au choix du constructeur: certaines commandes sont préprogrammées, d'autres non);
– enfin des contraintes d'organisation (liées aussi au choix du constructeur: l'organisation du clavier, de l'écran, instaurent une hiérarchie entre les différentes commandes disponibles).

L'utilisateur n'est donc pas 'libre' d'utiliser comme il l'entend un outil donné: cette utilisation est, relativement, pré-structurée par l'outil lui-même.

En même temps, en soulageant l'utilisateur d'une partie de son travail, l'outil ouvre de nouvelles possibilités pour l'action et l'apprentissage (Dubinsky et Tall, 1991). Les possibilités des calculatrices graphiques ont ainsi conduit certains auteurs (cf. par exemple Berger, 1998), évoquant la théorie de la médiation de Vygotski (1985), à présenter ces outils comme une aide pour l'apprentissage. Il est cependant difficile d'isoler les potentialités des contraintes: les deux sont intimement mêlées, toute facilité offerte à l'utilisateur constituant en même temps une pression pour réaliser un type d'action plutôt qu'un autre: 'These tools wrap up some of the mathematical ontology of the environment and form part of the web of ideas and actions embedded in it' (Noss et Hoyles, 1996).

2.3. *Un sujet, comme ensemble structuré de connaissances*

Comme le gaucher, avant l'épisode de la casserole, un sujet ne se présente pas totalement 'neuf' devant un outil. Il a déjà construit des connaissances sur son environnement et sur lui-même, des *métaconnaissances*:

– dans le domaine de l'intelligence artificielle, J. Pitrat (1990, p. 207) distingue parmi les métaconnaissances les connaissances sur les connaissances, les connaissances sur les connaissances des individus, les connaissances qui servent à manipuler les connaissances;
– en didactique des mathématiques, A. Robert et J. Robinet (1996) distinguent des connaissances constitutives de la connaissance mathématique, des connaissances constitutives de l'accès à la connaissance mathématique, des connaissances sur les mises en fonctionnement mathématique de soi et des autres (ces auteurs évoquent ici le contrôle, comme 'métaconnaissance globale');
– on retrouve cette importance du 'contrôle' en psychologie cognitive. O. Houdé (1995, p. 107) évoque la coexistence chez le sujet de schèmes pertinents et de schèmes non pertinents. Si la rationalité, bien présente chez un individu, n'apparaît pas dans ses performances cognitives, ce serait par défaut d'inhibition des schèmes non pertinents.

Nous donnons donc à ce contrôle par l'individu de sa propre activité un rôle central (cf. Figure 3) dans une 'carte' des métaconnaissances essentielles requises par l'activité mathématique, en particulier dans un environnement de calculatrices complexes où coexistent plusieurs sources d'informations (qui découlent des références construites, de l'utilisation du papier/crayon, de l'outil de calcul, ou du voisinage).

Cette carte en elle-même ne permet pas de décrire complètement le comportement d'un sujet:

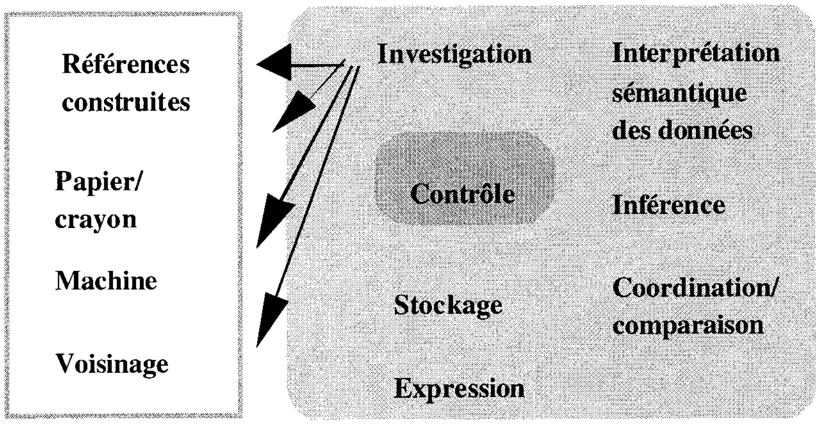

Figure 3. Sources d'information et métaconnaissances.

– il faudrait préciser plus encore chacune des métaconnaissances (par exemple l'investigation n'est pas de même nature si elle reste cantonnée à la calculatrice, ou au cahier de cours, ou au voisinage, ou si elle se déploie dans toutes les directions; le stockage de nouvelles connaissances peut se faire à côté des connaissances anciennes, ou alors remplacer les connaissances périmées);
– il faudrait préciser l'ordre dans lequel les différentes métaconnaissances sont mises à contribution, le temps attribué à chacune d'entre elles.

Ces précisions pourront être données quand il s'agira de décrire l'action d'un sujet donné pour accomplir une tâche donnée dans un environnement donné. La carte ci-dessus pourra alors nous fournir une grille d'analyse de cette action. C'est ce à quoi nous allons nous intéresser désormais, en considérant l'étude des limites dans un environnement de calculatrices symboliques.

3. Le calcul des limites, du côté de l'outil

Les programmes officiels de l'enseignement des mathématiques en France ont supprimé toute définition des limites en lycée, repoussant celle-ci au début des études universitaires (Trouche, 1997, p. 91). Ces programmes contiennent cependant une présentation du langage et des opérations sur les limites, ainsi qu'une introduction du calcul différentiel et du calcul intégral. Ils suggèrent de baser cette présentation sur des observations numériques et graphiques, ce qui donne de fait une grande importance à l'utilisation des outils de calcul: même si les professeurs n'utilisent que très modérément les calculatrices en classe, les élèves eux s'en servent beaucoup (Guin et Trouche, 1999b, p. 195). Nous utiliserons les contraintes présentées ci-dessus (cf. 2.2) pour analyser deux outils: la calculatrice TI-82, comme représentante des calculatrices graphiques, et la calculatrice TI-92, comme représentante des calculatrices symboliques.

3.1. *Les contraintes internes*

L'étude de ces contraintes relève principalement d'une analyse physico-informatique de la nature même des matériels.

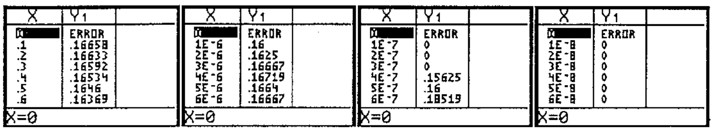

Figure 4. Observation numérique de la fonction $\frac{x-\sin x}{x^3}$ au voisinage de 0 sur une TI-82.

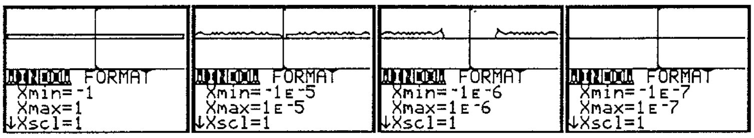

Figure 5. Observation graphique de la fonction $\frac{x-\sin x}{x^3}$ au voisinage de 0 sur une TI-82. (ordonnées du graphique comprises entre –1 et 1).

Les contraintes internes des calculatrices graphiques sont bien connues (cf. Faure et al., 1993), elles sont liées à la limitation des capacités de mémoire de la machine, à la gestion de valeurs approchées et à la nécessaire discrétisation des phénomènes continus pour leur représentation sur un écran constitué d'un nombre fini de pixels. On pourra observer sur les Figures 4 et 5 ci-dessus les conséquences de ces contraintes: alors que la limite en 0 de la fonction étudiée est 1/6, les écrans obtenus font apparaître une grande instabilité au voisinage de ce point.

On retrouve les mêmes contraintes pour les calculatrices symboliques, dès lors qu'elles sont utilisées en mode graphique ou en mode calcul approché. En mode calcul symbolique, elles peuvent aussi gérer des symboles, des valeurs exactes, des opérations formelles. Mais nous nous heurterons ici à deux nouveaux problèmes (Bernard et al., 1998):

– la limitation de la bibliothèque de résultats formels;
– la coordination problématique entre les différents modes de calcul.

La disposition d'un outil plus complexe ouvre certes de nouvelles possibilités (Shoaf, 1997), mais elle crée aussi de nouveaux problèmes.

3.2. *Les contraintes de commande*

La calculatrice graphique TI-82, comme la plupart des autres types de calculatrice graphique, ne comporte pas de commande spécifique pour le calcul de limite. Mais elle peut être utilisée pour approcher ce type de calcul (Vagost et Verdier, 1993 ou Texas Instruments, 1995):

– on peut effectuer une approche numérique ou graphique de la limite en un point (Figures 4 et 5 ci-dessus);
– on peut utiliser une commande de calcul numérique approché de la dérivée ou de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. Le calcul nécessite de donner la fonction, la variable et un 'pas 'de calcul. Comme pour l'approche graphique ou numérique des limites, il est précisé dans les manuels que plus le pas de calcul est petit, plus l'approximation est censée être bonne.

Pour une calculatrice symbolique du type TI-92, le choix est en principe simple (Lemberg, 1996): si l'on veut calculer une limite, il suffit d'utiliser la commande formelle 'ad hoc'. Mais on peut aussi avoir recours aux fonctionnalités numériques ou graphiques, par exemple dans les cas suivants:

– si l'on souhaite avoir une confirmation ou une illustration du résultat symbolique, par une observation du comportement global de la fonction pour x 'grand';
– si la calculatrice symbolique refuse de se prononcer, pour cause d'insuffisance de bibliothèque de résultats.

Il existe aussi d'autres manœuvres de détournement de la commande 'naturelle' de calcul de limite:

– un détour approximatif, en demandant la limite en mode 'calcul approché';
– un raccourci mathématique, en demandant 'directement' la valeur prise par la fonction au point considéré.

Ainsi l'existence d'une commande unique de calcul de limite n'implique pas ipso facto l'existence d'un geste unique de l'utilisateur de l'outil pour ce type de calcul; elle ne garantit pas non plus l'obtention d'une réponse (celle-ci suppose que la question soit bien posée – la syntaxe de la commande est précise et ne souffre pas de modification – et que la calculatrice connaisse la réponse).

3.3. *Les contraintes d'organisation*

Pour la calculatrice graphique TI-82
Comme pour toute autre calculatrice graphique, *c'est l'observation graphique qui est privilégiée*, en cohérence avec l'appellation de l'outil elle-même. Ce sont ainsi les touches correspondant à l'application graphique que l'on trouve immédiatement sous l'écran (*Graph, Window, Trace*). On ne peut accéder à l'étude numérique des fonctions (*Table*) que par une combinaison de touches: l'étude numérique est, du point de vue des touches d'accès, en arrière plan de l'étude graphique.

En ce qui concerne l'organisation des commandes, on remarquera que la commande *Trace* bénéficie d'une touche particulière, alors que les commandes *Zoom* doivent être cherchées dans un menu global. Cela privilégie ainsi l'observation graphique à partir d'un point courant sur une courbe (*Trace*), plutôt que la définition d'une nouvelle fenêtre de représentation de la fonction. Nous pouvons ainsi penser que c'est un point de vue *dynamique* plutôt que *statique* qui est privilégié.

Enfin, du point de vue de l'organisation de chaque commande, nous constatons que c'est toujours la variable qui *tire* la fonction: pour l'application *Table*, on ne peut choisir que la variable, ou un 'pas', pour obtenir les images correspondantes de la fonction, pour la commande *Trace*, on ne peut déplacer un point que de colonne en colonne (et non pas de ligne en ligne); pour la définition d'une fenêtre, on choisit d'abord un intervalle pour les abscisses, puis un intervalle pour les ordonnées.

Pour la calculatrice symbolique TI-92, les choses apparaissent plus complexes:

- les applications de calcul symbolique, graphique et numérique sont accessibles au même niveau, par des touches placées en ligne immédiatement sous l'écran. C'est l'application de calcul numérique et symbolique (au nom évocateur: *Home*, maison) qui est cependant placée en premier sur cette ligne.
- deux modes de calcul coexistent ici (exact ou approché) dans l'application *Home*. Il existe un raccourci clavier qui, en mode exact, permet d'obtenir une valeur approchée de tout nombre à l'écran (la commande réciproque n'existe évidemment pas); ceci fait du mode 'calcul approché' un mode de référence qui permet de 'dévoiler' un nombre, de le situer sur l'échelle ordonnée des réels. Par ailleurs, les applic-

ations *Graphique* et *Table* ne fonctionnent sur la TI-92 qu'en mode calcul approché.

– pour l'écriture des commandes, il existe des ordres différents: dans les applications graphiques et numériques, c'est toujours la variable qui tire la fonction. Dans l'application symbolique par contre, l'écriture de la commande *Limite*: *limit(fonction, variable, point)* induit une inversion de l'ordre de la démarche (d'abord la fonction, puis la variable).

Les contraintes d'organisation d'une calculatrice symbolique apparaissent ainsi beaucoup plus complexes que celles d'une calculatrice graphique, susceptibles d'autoriser une diversité beaucoup plus grande des schèmes d'action instrumentée.

4. Quelques résultats expérimentaux

Les observations qui suivent ont été faites dans le cadre d'une expérimentation soutenue par le Ministère français de l'Éducation Nationale. Les 34 élèves d'une classe de Terminale (dernière année du lycée, élèves de 18 ans) ont travaillé pendant les trois premiers mois de l'année scolaire avec des calculatrices graphiques, puis pendant les six mois suivants avec des calculatrices symboliques TI-92 qui leur étaient prêtées. Chaque élève avait cette calculatrice à sa disposition de façon permanente (en classe et à la maison).

4.1. *Un dispositif particulier pour la socialisation et le suivi des processus d'instrumentation*

Un dispositif particulier avait été mis en place dans cette classe pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en environnement calculatrice (cf. Trouche, 1996; Guin et Trouche, 1999a et b; Bernard et al., 1998).

Pendant chaque heure de cours, le professeur utilisait à la fois le tableau et un écran (sur lequel était projeté l'écran de la calculatrice d'un élève, appelé 'élève sherpa'). Le rôle de sherpa était tenu par chaque élève à tour de rôle. L'utilisation que cet élève faisait de la calculatrice, visible par toute la classe, était en même temps une aide pour tous les élèves et une aide pour le professeur dans la compréhension de la genèse instrumentale.

Pendant chaque semaine, une heure particulière était réservée pour des 'travaux pratiques' ('TP'). Les élèves, regroupés par deux, devaient étudier un problème relativement ouvert (par exemple: 'par combien de zéros se termine n! ?'). Chaque binôme devait rendre en fin d'heure un rapport sur lequel les différentes étapes de la recherche, l'utilisation de l'outil de calcul, les réussites et les impasses, devaient être décrites et analysées. La rédaction de ce cahier de recherche était en même temps une aide pour les élèves, contraints d'expliciter leur démarche (Sauter, 1998), de situer l'utilisation de la calculatrice dans le cadre de la résolution du problème, et en même temps une aide pour le professeur, dans sa compréhension des genèses instrumentales.

Ce dispositif était complété par deux systèmes de repérage du travail des élèves:

– une mesure du temps accordé à chaque type de travail pendant les travaux pratiques (travail papier/crayon, travail avec calculatrice, échange avec le voisin); cette mesure a été effectuée pendant deux TP différents par des professeurs suivant l'expérience sur des 'feuilles d'observation minutée' (toutes les 15 secondes était notée l'action en cours);
– une évaluation par 'devoirs surveillés' réguliers qui comportaient une question au moins nécessitant l'utilisation contrôlée de la calculatrice; une dernière question permettait une autoévaluation de l'élève ('la calculatrice m'a-t-elle aidé? Gêné? Surpris? En quoi?').

Ces observations, en relation avec la carte des métaconnaissances présentée en 2.3, ont permis de mettre en évidence, après trois mois de travail avec les calculatrices graphiques, certains comportements extrêmes.

4.2. *Une géographie de la classe et de ses 'points cardinaux'*

Cinq comportements extrêmes se sont dégagés: un comportement *théorique*, un comportement *rationnel*, un comportement *scolaire*, un comportement *bricoleur*, un comportement *expérimentateur*. Pour distinguer ces comportements, cinq points de vue sont possibles et se complètent mutuellement (cf. Figure 6).

Par exemple le temps accordé à chaque action est extrêmement bref pour les comportements bricoleur et rationnel (pour le premier, parce qu'il a une pratique de 'zapping', passant sans réflexion d'une action à l'autre, d'une image à l'autre, pour le deuxième parce qu'il utilise la calculatrice uniquement pour des actions ciblées qui ne laissent place ni au hasard avant le choix, ni à la réflexion et à la rectification après obtention du résultat). Ce temps est beaucoup plus long pour les comportements théorique, expérimentateur ou scolaire, pour des raisons différentes (pour les deux premiers comportements à cause du temps de réflexion nécessaire à l'analyse d'un résultat, à sa comparaison avec d'autres résultats; pour le comportement scolaire à cause des difficultés d'utilisation de l'outil de calcul).

	Comportement théorique	Comportement rationnel	Comportement Bricoleur	Comportement Expérimentateur	Comportement scolaire
Source d'information privilégiée	Références	Papier/crayon	Calculatrice	Toutes	Aucune
Méta-connaissance activée	Interprétation	Inférence	Investigation	Comparaison	Investigation
Méthode de preuve privilégiée	Analogie	Démonstration	Accumulation	Confrontation	Copié/collé
Temps global d'utilisation de la calculatrice	Moyen	Faible	Important	Moyen	Moyen
Temps de chaque action sur la calculatrice	Important	Faible	Faible	Important	Important

Figure 6. Repérage de 5 comportements extrêmes en environnement calculatrice graphique.

Cette approche est nécessairement grossière:

- l'appartenance d'un élève donné à un type donné est indexée par le temps et la tâche, même si de grandes tendances persistent;
- il n'est pas question bien sûr de dresser une typologie qui permettrait de mettre une des cinq étiquettes sur chaque élève. Il s'agit simplement ici de repérer des comportements extrêmes (qui correspondaient effectivement à des élèves de la classe expérimentale).

Dans ce processus d'observation, le choix a été fait d'une étude qualitative portant sur ces seuls profils extrêmes. Mais ce travail a permis en retour de repérer, dans sa distance à chacun de ces extrêmes, chacun des élèves de la classe et de mesurer des évolutions: il a été possible ainsi de repérer des évolutions significatives du pôle bricoleur vers le pôle expérimentateur, ou du pôle scolaire vers le pôle rationnel (Trouche, 1996, vol. 2, p. 206).

4.3. *Un premier repérage des schèmes d'action instrumentée*

Nous allons mettre cette géographie sommaire à l'épreuve d'un calcul de limite. Le travail qui suit a été donné dans la classe expérimentale alors qu'un cours détaillé sur les limites avait été construit (Trouche, 1997, p. 223). Ce travail se situait à un moment où les élèves ne disposaient encore que de calculatrices graphiques.

Il s'agit ici d'une fonction simple (un polynôme) mais dont la forme particulière peut réserver quelques surprises: $P(x) = 0.03x^4 - 300.5003x^3 + 5004.002x^2 - 10009.99\,x - 100100$ (cf. Figure 7). On demandait aux élèves de déterminer la limite de ce polynôme en $+\infty$ et de donner une fenêtre de leur calculatrice qui illustre ce résultat.

Les travaux réalisés permettent de repérer les différents comportements:

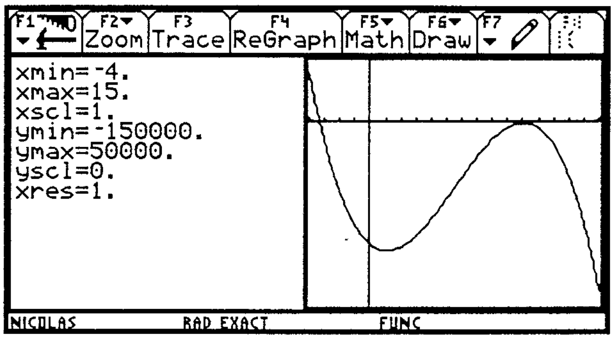

Figure 7. Un graphique problématique, ne correspondant pas à la physionomie ‘habituelle’ d’une fonction à limite $+\infty$ en $+\infty$.

– un comportement ‘théorique ‘de l’élève A: la forme polynomiale de la fonction est identifiée, le théorème pertinent évoqué: ‘la fonction a même limite que son terme de plus haut degré, elle a donc pour limite $+\infty$ en $+\infty$’. Le résultat théorique est utilisé aussi pour déterminer une fenêtre convenable sur l’écran de la calculatrice graphique: A choisit une plage [Xmin, Xmax] assez grande pour la variable et ajuste la plage des ordonnées à l’aide de 0.03 $(\text{Xmax})^4$;
– un comportement ‘rationnel’ de l’élève B: il détermine la limite correcte à partir d’une technique de factorisation. Pour l’ajustement d’une fenêtre graphique, B entreprend une étude générale de la fonction. Sa dérivée, puis la dérivée de la dérivée sont calculées. L’étude, trop longue, ne permet pas d’aboutir;
– un comportement ‘bricoleur’ de l’élève C: l’essentiel du travail consiste à rechercher une fenêtre jugée convenable sur la calculatrice graphique. De très nombreuses actions sont entreprises, mobilisant plusieurs commandes (changement de fenêtre, zooms). La connaissance de ces commandes permet à C d’aller vite, en ajustant les paramètres, non sur le terme de plus haut degré (comme A), mais sur une analyse sommaire des résultats successifs;
– un comportement ‘expérimentateur’ de l’élève D: le résultat théorique est d’abord évoqué (comme pour A). Puis D recherche une fenêtre permettant de confirmer, sur la calculatrice graphique, le résultat annoncé: il n’obtient que des représentations du type de la Figure 7 ci-dessus. Il va chercher alors une cohérence entre ces deux résultats en constatant que le coefficient de degré 3 est beaucoup plus important que le coefficient de degré 4, d’où un ajustement du théorème: *en général un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré; cependant ici, le déséquilibre entre les coefficients fait que c’est le*

terme de degré 3 qui impose sa loi. La limite du polynôme en +∞ est donc –∞, ce qui permet de juger convenable la représentation graphique obtenue sur l'écran de la calculatrice;
- un comportement 'scolaire' de l'élève E: ne reconnaissant pas dans P une fonction de référence, il s'en remet à sa calculatrice. L'entrée du polynôme P dans le répertoire de fonctions de la calculatrice prend beaucoup de temps. N'arrivant pas à sélectionner une fenêtre pertinente pour voir la courbe, E utilise une table de valeurs: elle permet de lire automatiquement les valeurs que prend la fonction pour des valeurs successives de la variable. La conclusion est tirée à partir de quelques résultats concordants: la fonction admet pour limite –∞ en +∞.

Cette diversité de traitement illustre bien la typologie que nous avons esquissée, ainsi que deux autres points, fondamentaux pour nous:

- la prise en compte, par le maître, des environnements technologiques n'empêche pas la dispersion des processus d'instrumentation;
- la connaissance des gestes techniques possibles pour traiter une question particulière avec un outil donné (cf. 3.2.) ne suffit pas à décrire des schèmes d'action instrumentée, beaucoup plus complexes que la stricte partie instrumentée qu'ils contiennent et qui les contraint (de façon relative).

Plutôt qu'une description de ces schèmes, ce sont des éléments d'étude de ceux-ci que nous voulons tenter de proposer maintenant.

5. Éléments de méthode pour une étude des schèmes d'action instrumentée

Par analogie avec l'utilisation d'une calculatrice graphique, nous proposerons trois mouvements dans cette étude:

- un mouvement de 'zoom out', où nous mettrons en relation les schèmes d'action instrumentée de calcul de limite en relation avec les différentes conceptions des limites mises en évidence par les études didactiques ou épistémologiques;
- un mouvement de 'zoom in', où nous tenterons de dégager les différents composants d'un schème d'action instrumentée, et leur portée pour la construction des connaissances;
- un mouvement de 'fenêtre fixe', où nous observerons, pour un même élève et une même tâche, l'évolution des schèmes en liaison avec l'évolution de l'environnement.

5.1. *Schème d'action instrumentée et connaissance encapsulée*

A propos des limites, R. Bkouche (1996) distingue deux points de vue:

– un point de vue cinématique ('si une grandeur variable x tend vers une valeur a de cette grandeur, au sens qu'elle prend des valeurs de plus en plus proches de la valeur a, alors une grandeur y qui dépend de la grandeur x tend vers une valeur b si, au fur et à mesure que la grandeur x se rapproche de la valeur a, la grandeur y se rapproche de b');
– un point de vue approximation ('si, dans la notion cinématique, c'est la variable qui tire la fonction, c'est le degré d'approximation que l'on veut qui fixe l'approximation de la variable').

La distinction de ces deux points de vue majeurs, en liaison avec l'analyse des contraintes instrumentales (cf. 3.), permet d'imaginer différentes conceptions des limites (Tall et Vinner, 1981; Sierpinska, 1985).

Nous avons ainsi demandé aux élèves, dans un environnement de calculatrices graphiques, d'étudier l'existence d'une limite, au voisinage de $+\infty$, de plusieurs fonctions (par exemple |x.sinx|, lnx+10sinx, x^2+sinx), en justifiant précisément les réponses annoncées. Les rédactions sommaires (et souvent exprimées dans un langage familier, adapté à la description des images), permettent de dégager quelques théorèmes-en-acte (Vergnaud, 1996) relatifs à la recherche de limites, par exemple:

– (TA0): si l'on ajoute à une fonction une fonction qui n'a pas de limite, la somme n'a pas de limite;
– (TA1): si une fonction oscille ostensiblement, elle ne peut pas avoir pour limite $+\infty$;
– (TA2): si une fonction est croissante à partir d'une certaine valeur de x, alors elle a une limite infinie;
– (TA3): si une première fonction prend des valeurs beaucoup plus grandes qu'une seconde, le résultat d'une opération (addition, multiplication ou division) entre la première et la deuxième fonction est une fonction qui tend vers $+\infty$.

Ces théorèmes-en-acte ont un caractère vague, qui permet leur adaptation à de nombreux contextes, mais aussi un caractère très résistant:

– parce qu'ils sont un guide pour l'action instrumentée (par exemple TA2 impliquera de considérer la courbe suffisamment loin pour être assuré d'une forte croissance 'définitive' de la fonction, TA1 impliquera d'évaluer le caractère ostensible de l'oscillation, par rapport à la croissance 'moyenne' de la fonction...);

– parce qu'ils sont pertinents dans un certain nombre de cas et qu'ils 'ressemblent' à des théorèmes validés en cours (par exemple TA3 est en relation avec le théorème dit 'des croissances comparées' entre les fonctions exponentielles, puissances et logarithmes).

Les conflits entre différents théorèmes applicables, avec des résultats différents, à une même situation sont souvent réglés par considération des aspects les plus immédiats du graphique: ainsi, pour lnx+10sinx, l'application de TA0 ou TA1 impliquerait que cette fonction n'a pas de limite, alors que l'application de TA3 impliquerait que la limite est infinie. Nous avons pu constater que près de 20% des élèves interrogés (aussi bien au lycée qu'en première année universitaire) concluaient que cette fonction n'avait pas de limite. A l'inverse, pour x^2+sinx, la considération du graphique fait pencher pour une application de TA3.

Ces invariants opératoires sont liés à des conceptions particulières des limites: il est clair en particulier que TA2 et TA3 sont liés à un point de vue cinématique. Ils permettent une utilisation de la calculatrice pour résoudre un problème donné; en même temps l'utilisation systématique de la calculatrice pour résoudre ce type de problème enracine ces conceptions encore plus profondément. Les élèves au comportement bricoleur, expérimentateur ou scolaire (cf. 4.2.) seront donc plus particulièrement touchés par cette influence.

De plus les connaissances qui se construisent sont plus larges que celles touchant seulement aux limites de fonction, elles relèvent aussi de méta-connaissances relatives à l'organisation même de l'activité mathématique:

– l'idée que ce qui se passe en dehors de l'écran de la calculatrice est un prolongement naturel de ce qui apparaît sur l'écran lui-même a des conséquences sur l'inférence, sur l'interprétation sémantique des données;
– l'idée qu'une exception confirme la règle (contrepoint nécessaire de l'adaptation 'souple' des théorèmes-en-acte, cf. par exemple l'étude de la fonction lnx+10sinx à partir des théorèmes-en-actes contradictoires TA0 et TA3) atteint le contrôle même de l'activité scientifique.

L'identification de ces théorèmes-en-acte par le professeur permet en retour de proposer des situations susceptibles de les mettre en défaut.

5.2. *Schème d'action instrumentée et schèmes d'usage*

Un schème d'action instrumentée comporte un certain nombre de schèmes d'usage (cf. 2.1). L'analyse de ces schèmes est essentielle car ce sont les éléments de base, constitutifs de l'action instrumentée.

Nous avons montré par exemple (cf. 3.1. et 3.2.) l'existence sur une calculatrice symbolique TI-92 d'un raccourci clavier permettant l'obtention de la valeur approchée d'un nombre donné. Nous appellerons 'détour approximatif' (DA) ce schème d'usage qui consiste à utiliser ce raccourci clavier au cours d'une action quelconque. Nous avons pu distinguer quatre contextes de mise en oeuvre du schème d'usage DA: la recherche de valeurs approchées pour situer un nombre dans l'ensemble ordonné des réels, la résolution d'équations pour laquelle le logiciel ne dispose pas d'algorithme de résolution exacte, le calcul approché d'intégrales pour lesquelles le logiciel ne dispose pas d'algorithme de calcul exact, le calcul de limite, pour contourner le refus de réponse du logiciel.

Ce même geste peut avoir des significations différentes:

– le détour approximatif indicatif (DA1): la recherche d'une valeur approchée s'inscrit là dans un processus d'anticipation ou de vérification;
– le détour approximatif substitut (DA2): ici, au contraire, le résultat proposé par la calculatrice vaut preuve;
– le détour approximatif artifice (DA3): les valeurs approchées obtenues permettent d'inférer la valeur exacte cherchée (cela aura des conséquences importantes dans la conceptualisation, en favorisant une assimilation entre le passage à la limite et un processus d'arrondi).

Le croisement entre les comportements extrêmes distingués (cf. 4.2.) et l'apparition des schèmes d'usage est instructif: on retrouve le schème DA1 dans les comportements rationnels, théoriques ou expérimentateurs, le schème DA2 dans les comportements bricoleurs ou scolaires, le schème DA3 dans les comportements bricoleurs.

5.3. *L'évolution des schèmes d'action instrumentée en fonction de l'environnement*

Le passage des calculatrices graphiques aux calculatrices symboliques ne va pas avoir les mêmes conséquences pour tous les élèves, comme on le voit par exemple à travers le temps passé à utiliser l'outil de calcul (cf. Figure 8).

	Théorique	Rationnel	Bricoleur	Expérimentateur	Scolaire
Graphique	15%	5%	25%	15%	15%
Symbolique	30%	25%	30%	35%	40%

Figure 8. Évolution du temps de travail avec calculatrice (en pourcentage du temps global de travail). Mesuré en ≪TP≫ en environnement calculatrice graphique, puis symbolique.

Nous allons le voir aussi à propos de l'évolution des schèmes d'action instrumentée pour deux comportements extrêmes, l'un 'théorique', l'autre 'scolaire'. Nous avons choisi deux élèves représentatifs de ces comportements, une étude plus large montrerait des tendances analogues chez d'autres élèves à proximité de ces deux pôles.

Pour le comportement théorique de l'élève T
En environnement calculatrice graphique, l'élève T commence par mobiliser ses références, interprète la limite à calculer à la lumière des fonctions connues (cf. Figure 9).

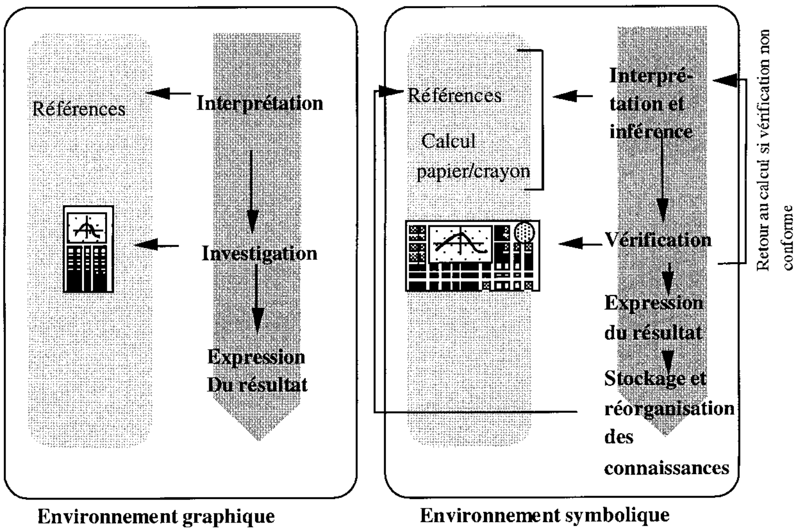

Figure 9. Déroulement chronologique du schème d'action instrumentée de calcul de limite, pour un comportement théorique, en environnement calculatrice graphique puis symbolique.

La calculatrice graphique n'est mobilisée ensuite que pendant un court moment, pour confirmation des résultats. Cette utilisation des fonctions de référence favorise une stratégie de comparaison, formulée parfois vaguement, en termes de domination plus que d'encadrement (qui apparaît en relation avec le théorème-en-acte TA3, cf. 5.1.). Ces ambiguïtés peuvent entraîner des erreurs. La considération du graphique ne fait en général que confirmer la réponse initiale et enraciner les théorèmes-en-acte déjà présents.

En environnement calculatrice symbolique, on observe une complexification du schème (cf. Figure 9 ci-dessus): la détermination des limites est faite par mobilisation des fonctions de référence et par un calcul explicite utilisant les théorèmes étudiés en cours. Dans un deuxième temps, la calculatrice symbolique est utilisée à travers son application graphique (ceci apparaît comme une trace de l'instrumentation en environnement calculatrice graphique), puis à travers son application symbolique qui permet (en général) d'obtenir la limite souhaitée. Si ce résultat ne correspond pas au résultat déterminé 'à la main', le calcul est repris. C'est la complexification de la phase de validation qui entraîne une complexification de la phase de calcul 'papier-crayon': la vérification immédiate du résultat impose une reprise des calculs, une recherche des théorèmes pertinents. Le retour au graphique, la recherche d'une cohérence avec le résultat formel, entraînent une remise en question des théorèmes-en-actes non pertinents.

Un résultat nouveau est alors stocké. Il a d'autant plus de poids que cette réorganisation résulte d'un effort cognitif important, mobilisant des registres variés.

Pour le comportement scolaire de l'élève S

Commençons par l'environnement calculatrice graphique: seule la calculatrice est utilisée, dans le cadre de l'application numérique (cf. 4.3.). Un effort cognitif important est réalisé pour interpréter les résultats numériques (cf. Figure 10).

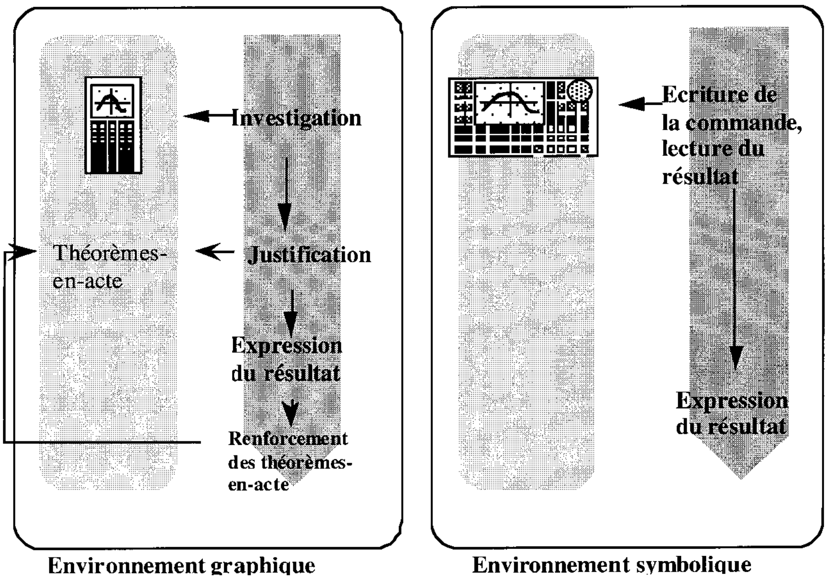

Figure 10. Déroulement chronologique du schème d'action instrumentée de calcul de limite, pour un comportement scolaire, en environnement graphique puis symbolique.

Ceux-ci le sont à partir de théorèmes-en-acte, renforcés à partir de l'utilisation même de l'outil (par exemple 'pour qu'une fonction ait pour limite $+\infty$, il faut qu'elle prenne des valeurs de plus en plus grandes', ou 'suffisamment grandes', etc.).

Avec le passage à une calculatrice symbolique, l'évolution ne va pas du tout dans le même sens que pour l'élève T: il y a ici une simplification du schème. Il y a à la fois un effort moindre dans l'utilisation de l'outil (il ne s'agit plus que de mobiliser la commande 'limite', le seul effort est un effort de correction syntaxique) et un effort moindre dans la justification nécessaire (puisque le logiciel assure la correction du résultat, la nécessité de la preuve est moindre).

Une expression des évolutions contraires de ces deux élèves peut aussi être vue à travers les réponses au questionnaire qui accompagnait les exercices. L'une de ces questions était: 'que veut dire la proposition: la limite de la fonction f est +8 quand la variable tend vers $+\infty$?'.

- l'élève T fournit une réponse globalement correcte, en environnement calculatrice graphique comme en environnement calculatrice symbolique: 'la fonction f peut prendre une valeur aussi grande que l'on veut à condition que x soit suffisamment grand';
- l'élève S donne en environnement calculatrice graphique une définition se rattachant à une conception monotone; quatre mois plus tard, en environnement calculatrice symbolique, il ne peut plus donner aucune définition: la limite d'une fonction n'a plus d'autre existence que comme produit de l'application symbolique d'un logiciel, comme réponse à une commande de calcul.

Pour le deuxième élève, il y a eu délitement d'une notion, pour le premier élève une construction de celle-ci (la définition reste la même, mais la résolution des exercices indique que cette connaissance s'accompagne de la mise en œuvre de techniques correctes).

6. ÉLÉMENTS DE CONCLUSION

Cette étude montre bien l'interdépendance des processus d'instrumentation et des processus de conceptualisation, en particulier dans le sens de l'influence de l'environnement sur les connaissances construites. Elle impose de se déprendre de l'illusion de la neutralité des outils qui interviennent dans l'activité mathématique. Elle montre le caractère fructueux du croisement d'un point de vue épistémologique, psychologique et instrumental. En particulier, nous pouvons en tirer quelques conséquences pour l'organisation même de l'enseignement.

6.1. *Un suivi nécessaire, individuel et collectif de la genèse instrumentale*

Ce suivi nécessite une organisation particulière de la classe (cf. le rôle de l'élève 'sherpa' en 4.1.), une organisation particulière des travaux écrits des élèves: ceux-ci doivent indiquer sur leurs devoirs les actions instrumentées entreprises, expliciter les démarches de recherche.

Cela permet alors, dans le cadre de la classe:

– de discuter collectivement l'intérêt et la pertinence, en fonction du contexte, de chaque geste élémentaire (par exemple le détour approximatif, cf. 5.2.);
– de poser la question des gestes adaptés à l'étude de chaque nouvelle notion, de comparer collectivement les approches instrumentées.

Cela n'impliquera pas des genèses instrumentales identiques pour tous les élèves, mais une mise en place socialement réfléchie influera pour une construction individuelle plus équilibrée.

6.2. *Un principe de vigilance épistémologique*

Cela suppose pour le maître un triple travail d'identification, à partir des notions qu'il est censé enseigner:

– un travail épistémologique: quels sont les différents points de vue qui se sont affrontés pour permettre l'émergence du concept;
– un travail didactique en relation avec le travail épistémologique: quelles sont les grandes conceptions déjà repérées dans l'apprentissage de cette notion, quelles traces peut-on en repérer à travers les premières productions des élèves;
– un travail instrumental, à partir des contraintes internes, des contraintes de commande et des contraintes d'organisation de l'outil qui présente la notion (cf. 2.2.).

Il est alors possible de se poser les questions décisives pour l'enseignement en environnement calculatrice: quel type d'obstacles l'outil peut-il favoriser? De quelles conceptions va-t-il favoriser l'émergence? En fonction des réponses à ces questions, le maître pourra organiser son enseignement, par le contrôle du langage qui accompagne la verbalisation du concept, par le contrôle des situations qui permettent d'introduire, de construire, d'utiliser la notion; le maître donnera par exemple des problèmes où la réalité mathématique ne correspond pas au prolongement naturel de ce que l'on voit sur un écran.

6.3. *Un développement inégal et combiné des métaconnaissances*

Le suivi des différentes genèses instrumentales permet de situer chaque élève dans la topographie générale de la classe (cf. 4.2), de mettre en oeuvre des dispositifs adaptés aux comportements de chacun:

- par le biais des activités proposées: à des élèves travaillant de façon très linéaire (par exemple des comportements plutôt rationnels), on proposera des situations nécessitant la mobilisation de plusieurs applications de la calculatrice, la confrontation de plusieurs cadres d'étude;
- par le biais des dispositifs de travail: les travaux pratiques présentent de nombreux avantages: le temps de travail est celui des élèves (et non plus celui du maître), les élèves peuvent exprimer plus facilement leurs doutes et leurs difficultés, ils peuvent emprunter des impasses et analyser leurs erreurs;
- par le biais de la constitution des binômes: si le maître associe dans le même groupe deux élèves qui ont les mêmes comportements, il risque de renforcer les points faibles de chacun. Par contre, s'il associe des comportements différents, il pourra modifier les habitudes de travail et provoquer un déséquilibre/re-équilibre des comportements qui profite à chacun des participants.

Paradoxe apparent: partant des 'machines', nous nous sommes rapprochés pour les besoins de notre étude des savoirs et des élèves. Cela indique d'ailleurs les limites de notre parabole introductive sur le gaucher et la casserole:

- il ne s'agit pas ici de consommation, mais d'apprentissage;
- l'élève n'est pas seul devant l'outil, mais son activité se déploie dans une institution d'enseignement;
- l'outil est plus complexe qu'une casserole et les métaconnaissances d'un élève ne peuvent pas se réduire à la distinction gaucher/droitier. . .

C'est justement dans la mesure où il est conscient de la diversité des élèves de sa classe et de la diversité des instruments qui peuvent émerger d'un outil donné que le maître peut contribuer à organiser l'étude.

En apprenant à contrôler individuellement et collectivement un outil qui devient un instrument, c'est leur rapport au savoir, leur rapport à eux-mêmes et aux autres que les élèves construisent et reconstruisent. Dans une société où les images, les écrans et les claviers sont multiples, la responsabilité du professeur de mathématiques dépasse ainsi la seule formation de l'esprit scientifique: ce qu'il fait relève aussi de la formation du citoyen.

REFERENCES

Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Jug, G. et Lagrange, J.-B.: 1997, *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques*, Didirem, IREM, Université de Paris VII.

Balacheff, N.: 1994, 'La transposition informatique, note sur un nouveau problème pour la didactique', in M. Artigue et al. (eds.) *Vingt ans de didactique en France*, La pensée Sauvage, Grenoble, pp. 364–370.

Berger, M.: 1998, 'Graphic calculators: an interpretative framework', *For the Learning of Mathematic* 18(2), 13–20.

Bernard, R., Faure, C., Noguè, M., Nouazé, Y. et Trouche, L.: 1998, *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en lycée*, IREM, Université Montpellier II.

Bkouche, R.: 1996, 'Point de vue sur l'enseignement de l'analyse: des limites et de la continuité dans l'enseignement', *Repères-IREM* 24, 66–76.

Dubinsky, E. et Tall, D.: 1991, 'Advanced mathematical thinking and the computer', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, Nederland, pp. 231–248.

Faure, C., Noguès, M., Nouazé, Y. et Trouche, L.: 1993, *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée,* IREM, Université Montpellier II.

Guin, D. et Delgoulet, J.: 1997, *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de seconde,* IREM, Université Montpellier II.

Guin, D. et Trouche, L.: 1999a, 'Environnements calculatrices symboliques, nécessité d'une socialisation du processus d'instrumentation, évolution des comportements d'élèves au cours de ce processus', in *Actes du colloque européen de Montpellier sur les calculatrices symboliques et géométrique* (Guin ed.) 61–78, IREM, Université de Montpellier II.

Guin, D. et Trouche, L.: 1999b, 'The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: the Case of Calculators', *The International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3(3), 195–227.

Hershkovitz, S. and Nesher, P.: 1996, 'The role of schemes in designing computerized environments', *Educational Studies in Mathematics* 30, 339–366.

Houdé, O.: 1995, *Rationalité, développement et inhibition. Un nouveau cadre d'analyse,* PUF, Paris.

Lemberg, H.: 1996, *TI-92, du lycée à la prépa*, Texas Instruments, Dunod, Paris, France.

Noss, R. et Hoyles, C.: 1996, *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Nederland, pp. 153–166.

Pitrat, J.: 1990, *Métaconnaissance, futur de l'Intelligence Artificielle*, Hermès, Paris, France.

Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

Robert, A. et Robinet, J.: 1996, 'Pour une prise en compte du méta en didactique des mathématique', *Recherche en Didactique des mathématiques* 16(2), 145–176.

Sauter, M: 1998, 'Narrations de recherche: une nouvelle pratique pédagogique', *Repères-Irem* 9–21.

Shoaf, M.:1997, 'Using the Total Power of the TI-92! From Discovery Explorations to Complete Lab Reports', *The International Journal of Computer Algebra in Education* 4(3).

Sierpinska, A.: 1985, 'Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite' 5–67, *Recherche en Didactique des Mathématiques* 6(1), 295–299.

Tall, D. et Vinner, S.: 1981, 'Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169.

Texas Instruments: 1995, *Analyse, calculatrices graphiques TI-80, TI-81, TI-82,* Texas Instruments, Paris.

Trouche, L.: 1996, *Enseigner en Terminale S avec des calculatrices graphiques et formelles* (deux tomes), IREM, Université Montpellier II.

Trouche, L.: 1997, *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation,* thèse de doctorat, IREM, Université Montpellier II.

Vagost, D. et Verdier, J.: 1993, *TI-82, Mathématiques au lycée*, Texas Instruments, Dunod, Paris.

Vergnaud, G.: 1996, 'Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation', *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques,* IREM, Clermont-Ferrand.

Vygotski, L.S.: 1985, *Pensée et langage,* Éditions sociales, Paris.

Université Montpellier II,
Département de Mathématiques, E.R.E.S.,
Place Eugène Bataillon,
34095 Montpellier Cedex 5, France
E-mail: trouche@math.univ-montp2.fr