De la compréhension et de la certitude en mathématiques : le cas de la commutativité de la multiplication des naturels.

par André Boileau
Université du Québec à Montréal

En guise d'introduction, je désire soumettre à votre réflexion le court texte suivant, paru dans un numéro récent du New England Journal of Mathematics (Vol XXVII#2, p.217).

Une loi mathématique fondamentale prise en défaut.

Le professeur John W. Blackwell du département de mathématiques de l'université de Houston vient d'annoncer, au cours d'une conférence de presse, qu'il a découvert une exception à une loi mathématique qu'on croyait universelle et qui est connue des mathématiciens sous le nom de commutativité de la multiplication.

Pour ce faire, le professeur Blackwell a utilisé un prototype du super ordinateur Cray III, qui dispose d'une rapidité et d'une quantité de mémoire inégalée, ce qui lui a permis d'opérer sur les nombres naturels tellement grands qu'ils dépassent l'imagination. C'est au cours de tests de routine qu'il a demandé au Cray III de multiplier deux nombres choisis « en alignant une série astronomique de chiffres générés aléatoirement » d'une première façon, puis dans l'ordre inverse. Il a alors constaté avec stupéfaction que les deux calculs donnaient des résultats différents.

Il s'est par la suite lancé à la recherche de nouvelles exceptions à cette loi de commutativité de la multiplication, mais sans succès. Il s'est dit convaincu de trouver d'autres exemples prenant cette loi en défaut, mais n'a pas écarté la possibilité qu'on soit en présence d'un phénomène unique.

Dans la communauté mathématique, c'est la consternation. Cette découverte a pris les mathématiciens par surprise et tous s'accordent pour dire qu'un réexamen complet de l'édifice mathématique sera nécessaire, tant cette loi était fondamentale.

Certains cependant ont émis des doutes sur l'exactitude du résultat annoncé. Le professeur Michael Ozoroff, du Massachusett Institute of Technology, a souligné qu'on n'avait pas encore écarté d'autres possibilités telles une défaillance des circuits électroniques du Cray III, ou même une erreur dans sa programmation.

De son côté, le professeur Blackwell a tenu à répondre à ses détracteurs en soulignant que le programme utilisé n'est pas très complexe, et qu'il a été vérifié et contre vérifié plusieurs fois par de nombreuses personnes. Il a ajouté qu'il serait « étonnant qu'il (Cray III) fonctionne toujours bien, sauf lorsqu'il multiplie ces deux nombres particuliers. »

Quoi qu'il en soit, aucun ordinateur autre que le Cray III n'est en mesure d'entreprendre de tels calculs à l'heure actuelle : il semble donc qu'il faudra patienter encore quelques mois avant d'effectuer des vérifications concluantes. En attendant, nous invitons nos amis lecteurs à nous faire part de leurs commentaires sur cette découverte qui risque d'être historique.

Avant de poursuivre votre lecture, j'aimerais que vous preniez le temps de répondre aux deux questions suivantes :

1) **D'après vous qui, de Blackwell ou d'Ozoroff, a raison ?**
2) **Pourquoi?**

Le contexte de l'enquête

J'ai proposé la même démarche à 57 étudiants de l'UQAM inscrits dans un programme de formation initiale des maîtres en mathématiques au secondaire. Les réponses obtenues m'ont paru si intéressantes que j'ai répété l'enquête auprès d'autres clientèles : 7 étudiants de maîtrise en didactiques des mathématiques, 14 étudiants en mathématiques (de premier cycle et de cycles supérieurs), et finalement 28 étudiants inscrits au Baccalauréat international (options Sciences et Sciences Humaines) au collège Édouard-Montpetit.[1]

J'ai obtenu ainsi 106 réponses au total. Dans ce qui suit, j'aimerais vous faire part de la variété des réponses obtenues, et y aller de quelques commentaires. Mais avant de commencer, je veux souligner que, mis à part les étudiants du Baccalauréat international (qui ont disposé de plusieurs jours pour répondre), tous les étudiants ont répondu « à chaud », dans les quinze ou vingt minutes suivant la lecture du texte : c'était voulu car je désirais connaître leurs réactions « spontanées » sur le sujet.

Par la suite, il m'est arrivé d'utiliser cette activité dans une rencontre de conseillers pédagogiques en mathématiques, ainsi que lors d'une journée pédagogique avec des maîtres en exercice. Je vous ferai aussi part de quelques-unes de leurs réactions bien que, contrairement aux répondants précédents, ils ne m'aient pas remis de réponses écrites.

Bien entendu, après avoir laissé à tous les répondants le temps de me faire part de leurs réponses, je leur ai avoué que j'avais inventé cette « nouvelle » de toutes pièces, et je leur ai expliqué pourquoi je les avais ainsi « trompés ». Heureusement, la très grande majorité d'entre eux a paru plus soulagée qu'irritée par mes aveux. Il faut dire que, pour leur laisser encore plus de liberté pour répondre, je leur avais suggéré au départ de répondre de façon anonyme.

Avant de passer à l'examen des réponses obtenues, j'aimerais vous expliquer à votre tour la raison de tout ceci. J'avais choisi une propriété mathématique simple (la commutativité de la multiplication des entiers naturels) que je savais acceptée pour vraie par tous. Je voulais connaître les raisons intimes, personnelles à chacun, de cette acceptation. Pour ce faire, je ne pouvais pas poser la question de « prouver ladite propriété », étant bien entendu que le cadre académique pourrait bien fortement suggérer une démarche centrée plus sur *ce qui ferait plaisir à celui qui pose la question* que sur ce qui les convainc intimement[2].

---

1 Je profite de l'occasion pour remercier Madame Michèle Gingras du Collège Édouard-Montpetit, ainsi que Messieurs Louis Charbonneau, Gilbert Labelle et Pierre Bouchard de l'UQAM qui ont accepté de collaborer à ces enquêtes. Je veux aussi remercier les deux arbitres qui ont lu ce texte et qui m'ont fait des suggestions qui ont certainement contribué à l'améliorer.

2 En d'autres mots, je voulais minimiser ce que la didactique française appelle les «effets de contrat didactique».
L'idée de cette «fausse nouvelle» a été inspirée en partie par les célèbres expériences de Stanley Milgram sur la soumission, évoquées dans le film *I... comme Icare*. (Voir Milgram (1974).)

C'est ainsi que j'ai imaginé sortir entièrement du contexte académique pour me placer dans le monde réel en faisant un compte-rendu d'une soi-disant conférence de presse, ce qui impliquait une contextualisation (le recours à un super-ordinateur, l'évocation de certaines réactions, etc.) qui ajoutait des éléments arbitraires non essentiels et qui, nous le verrons, a vraisemblablement influencé certaines des réponses.

En préparant cette mise en scène, je ne m'attendais pas à ce que la conviction de mes participants soit ébranlée. Ce qui m'intéressait, c'était de connaître les raisons qui allaient être évoquées pour la justifier. Or, à ma grande surprise, plusieurs se sont mis à hésiter ou à pencher du côté de Blackwell (bien que parfois à contrecœur). Et de plus, la très grande majorité de ceux qui restaient convaincus que la multiplication des naturels est commutative n'ont pas apporté d'arguments sérieux pour justifier leur point de vue, qui prend donc l'allure d'une simple croyance.

En parcourant les diverses réponses qui m'ont été communiquées, j'ai eu l'impression de jeter un coup d'œil sur une terre fascinante et inexplorée. Veuillez noter que je n'ai pas voulu corriger l'orthographe des extraits que je vais vous présenter, afin de conserver toute leur authenticité.

Les réponses : réactions globales

Disons tout d'abord que plusieurs affirment clairement leur appui à la loi de la commutativité de la multiplication de nombres naturels, sans pour autant apporter une argumentation sérieuse pour appuyer leurs dires. Leurs réactions dénotent parfois une émotivité qui peut aller de l'agacement au procès d'intentions, comme en font foi les extraits suivants :

> *« qu'on laisse la commutativité en paix et que le professeur Blackwell gagne son salaire à quelque chose de plus utile »* (B.E.)[3]
>
> *« Ozoroff. Pourquoi ? Évident!!! »* (B.M.)
>
> *« C'est un mathématicien qui veut se rendre célèbre avec une petite exception. »* (B.E.)
>
> *« la hâte de M. Blackwell à énoncé une exception à une loi jusque là universelle, sans autre preuve qu'un seul ordinateur, et ses arguments faibles me porte à douter de son honnêteté. »* (B.I.S.)

---

[3] Après chaque citation, on indiquera le groupe auquel appartient l'auteur: B.E. (Baccalauréat d'Enseignement des Mathématiques), M.D. (Maîtrise en Didactique des mathématiques), B.M. (Baccalauréat en Mathématiques), M.M. (Maîtrise en Mathématiques), B.I.S. (Baccalauréat International - option Sciences), ou B.I.H. (Baccalauréat International - option Sciences Humaines).

D'autres, moins nombreux, donnent leur appui à la découverte du professeur Blackwell. Ici aussi, l'émotivité est parfois au rendez-vous, et l'on passe du simple espoir à la revanche face à des mathématiques oppressantes.

> *« Aussi improbable que cette découverte soit, je garde un espoir en sa vérité. »* (B.I.S.)

> *« Je pense que le professeur Blackwell a sûrement fait une très grande découverte. »* (B.E.)

> *« L'homme se croit puissant ; il est capable de grandes choses et surtout de grands calculs avec ses chères mathématiques qui régissent sa vie entière. Il devrait se faire plus modeste car il est peu de chose.... Cette exception à la règle servira peut-être simplement à faire comprendre à l'homme qu'il ne peut être certain de rien »* (B.I.H.)

Enfin il y a tous ceux qui hésitent : les réactions sont alors plus prudentes, moins émotives.

> *« M. John Blackwell peut avoir raison. Bien que je ne suis pas convaincu »* (M.D.)

> *« On ne peut pas avoir de certitude absolue que le résultat est exact. »* (M.M.)

Les réponses : impact éventuel de la découverte

Étant données les nombreuses applications des mathématiques à d'autres disciplines, on peut s'interroger sur les impacts d'une telle « découverte ». Certains en prévoient en mathématiques, en sciences expérimentales et même en arts.

> *« si cette découverte s'avère vraie, la mathématique en prendra un méchant coup! »* (B.M.)

> *« Mais, considérant l'éventualité que le défaut s'avère vrai, toute l'expérience scientifique serait remise en question : toutes les preuves des lois physiques et chimiques reposent en grande partie sur la commutativité, donc seraient soumises à un remaniement entier. »* (B.I.S.)

> *« Il serait effrayant de devoir recommencer à apprendre toutes les lois mathématiques et de procéder à une restructuration totale. Les répercussions se feraient sentir dans tous les domaines, de l'économie jusqu'aux arts! »* (B.I.H.)

Pour d'autres, les conséquences d'une telle découverte seraient somme toute assez marginales, peut-être parce qu'il s'agit d'un phénomène *unique*, portant sur des nombres *astronomiques*.

« Si cette découverte s'avérait véritable, les conséquences sembleraient, pour certains, insignifiantes. Elles n'affecterait pas la vie de tous les jours des gens ordinaires. Seuls les départements des sciences et des mathématiques seraient affectés. » (B.I.S.)

« il est facile de prédire que dans le futur proche, cette présumée exception à la loi ne sera guère utilisée dans le monde pratique. C'est à ce point que l'on réalise que cette découverte n'est que théorique et inutile. » (B.I.H.)

« Et si cette découverte s'avérait vraie, serions-nous vraiment obligé de faire un réexamen complet de les mathématiques étant donné son unicité et la grandeur astronomique de la série ? » (B.E.)

« et surtout parce qu'il s'agit de deux nombres 'astronomiques' qui ne servent qu'aux chercheurs et même là ce n'est pas sûr que de si grands nombres soient utiles. En tant qu'étudiant en enseignement des maths ça ne changera pas mon comportement envers la loi de la commutativité sur la multiplication, car elle demeure vraie lors de cas enseigné ou utilisé. » (B.E.)

« Mais si la découverte du professeur Blackwell s'avérait juste, je pense qu'il ne faudrait pas en faire un drame. Le système d'éducation ne devrait pas être changé et les scientifiques ne devraient pas abandonner toutes leurs recherches. Les deux nombres sont tellement grands et inimaginables, que rares seront ceux qui se serviront de ces nombres dans leur vie. Il ne serait même pas nécessaire de mentionner l'exception. Les seuls qui devraient l'apprendre seraient ceux qui auraient des relations directes avec ces nombres. » (B.I.S.)

Les deux derniers intervenants proposent même de cacher cette découverte, qui semble déranger leurs habitudes et dont ils ne prévoient pas de conséquences pratiques. Ceci n’est pas sans rappeler l’attitude des Pythagoriciens qui voulaient garder secrète la découverte des nombres irrationnels.

Les réponses : considérations historiques

Les mathématiques se développent-elles par ajouts successifs, sans que rien ne soit falsifié par la suite ? Ou au contraire vivent-elles des crises où il faut abandonner ce qu’on croyait vrai au profit de nouvelles découvertes ? Il s’en est trouvé quelques-uns pour défendre la première thèse.

« Je ne crois pas réellement qu'une loi mathématique établit déjà depuis des siècles puisse être prise en défaut. » (B.I.S.)

Mais la plupart de ceux qui ont évoqué l'histoire l'ont fait pour appuyer la thèse d'une découverte révolutionnaire qui viendrait invalider des connaissances mathématiques reconnues.

> *« Je n'exclus pas la possibilité qu'il existe un contre exemple à la loi de la commutativité car le monde des mathématiques est en éternel mouvement. Ce qui a été prouvé quelques siècles plutôt peut être démenti ou renforcé par d'autres lois le siècle suivant. Cela, l'histoire le démontre admirablement bien. »* (B.I.S.)

> *« Dr. Blackwell a probablement raison... Nous avons trouvé tellement de contre exemple à des notions fondamentales des maths qui étaient acquises depuis longtemps qu'il se peut qu'il existe vraiment un nombre particulier qui en étant inversé dans une multiplication change le résultat. »* (B.E.)

> *« Il y a eu aussi, dans le passé, des découvertes faisant que $p \times q \neq q \times p$. Parmi celles-ci furent le produit vectoriel et les tables de calculs matriciels »* (B.I.S.)

C'est le seul cas où l'on illustre cette thèse par des exemples. Mais ces exemples ne viennent pas invalider des propriétés d'objets mathématiques existants, puisqu'ils s'appliquent à des objets mathématiques *nouvellement créés*.

Les réponses : la foi en les mathématiques

Pour certains, les mathématiques apparaissent être une source de certitudes qui semble apaisante et qu'il serait traumatisant de remettre en question. La foi dont il est question ici ne paraît pas être basée sur une démarche quelconque de validation (déductive, expérimentale, ou autre), mais plutôt sur la réputation des mathématiques.

> *« elle (cette découverte) est difficile à croire étant donné qu'on a grandi dans la foi de la commutativité de la multiplication. »* (B.E.)

> *« Et pour le moment présent, qu'il s'agisse ou non d'une découverte juste, elle vient de secouer une croyance des plus profondément encrée dans chacun de nous et , du même coup, d'ouvrir grand une fenêtre sur la validité des axiomes reçus et acceptés comme vrais. »* (B.I.S.)

> *« Seul le temps nous dira si la machine a raison et qu'il nous faudra commencer à douter de tout, même des lois généralement admises, chose assez facile à faire pour un philosophe ou un scientifique mais péniblement traumatisant pour la plupart des gens qui ont comme 'couverte de sécurité' la logique et la certitude absolue des mathématiques! »* (B.I.H.)

Les réponses : les règles et leurs exceptions possibles

En mathématiques, c’est bien connu, quand on affirme qu’une propriété est vérifiée, on sous-entend qu’elle est vérifiée dans *tous* les cas. Et si jamais il y a des exceptions, celles-ci sont intégrées explicitement à l’énoncé. Par exemple : « tout réel **non nul** admet un inverse multiplicatif ». C’est ce que nous rappellent les intervenants suivants, bien que les intentions du deuxième ne soient pas très claires.

> *« De plus, un seul exemple jusqu'à présent existe, bien qu'il n'en faille pas davantage pour chambouler une loi. »* (B.I.H.)

> *« Je crois plutôt inutile de faire un réexamen de l'édifice mathématique, on a qu'a le prendre comme cas particulier »* (M.M.)

Mais est-ce que cette interprétation universelle des propriétés mathématiques est vraiment si bien connue ? On peut en douter en lisant les premiers intervenants suivants, mais on voit clairement par la suite qu’on doit commencer à se poser de sérieuses questions sur le statut donné aux énoncés mathématiques par le commun des mortels.

> *« rares sont les lois mathématiques où il y a des exceptions »* (B.I.H.)

> *« D'après moi, lorsque nous avons qu'un seul exemple d'exception, ce n'est pas suffisant pour dire que la loi est 'brisée'. »* (B.E.)

> *« je crois qu'étant donné qu'on a trouvé qu'une seule exception et que de plus celle-ci concerne deux nombres naturels qui dépassent l'imagination, il n'y a pas de quoi remettre en cause la commutativité de la multiplication. »* (B.E.)

> *« Même si les mathématiciens n'ont pas souvent la chance d'admettre la validité de cette phrase célèbre 'L'exception confirme la règle', je pense qu'ils devraient davantage s'ouvrir aux différentes possibilités proposées et ne pas se borner à leurs règles. »* (B.I.H.)

Les réponses : effets possibles de la grandeur des nombres

Une variante sur l’interprétation universelle des propriétés mathématiques : se pourrait-il qu’une propriété soit vérifiée pour des *petits nombres*, alors qu’elle serait prise en défaut pour certains *grands nombres*. Ici encore, il y a ceux qui pensent que la grandeur n’a pas d’importance : la propriété est vraie pour **tous** les nombres naturels.

> *« Je ne vois pas pourquoi une loi valable pour des nombres plus petits ne le serait plus pour des grands nombres. »* (B.E.)

> *« Il me semble impossible que la commutativité de la multiplication...soit non vérifiée, même pour des nombres naturels tellement grand qu'ils dépassent l'imaginaire. »* (M.D.)

Mais il y a aussi ceux qui pensent que la grandeur des nombres en présence peut avoir un effet sur la véracité de la propriété[4]. Les tenants de cette interprétation se retrouvent dans une position bien inconfortable : pour quelles valeurs de a et de b pourront-ils dire que $ab = ba$? On note aussi parfois une confusion entre « très grand » et « infini ».

> *« il se peut fort bien que lorsqu'on arrive avec d'énorme nombre il y ait une autre règle à suivre ... et ... d'autres mathématiques. »* (B.E.)

> *« Il est peut-être possible que le docteur Blackwell ait fait une découverte, car le monde des nombres infiniment grand est 'obscure' à nos yeux. »* (B.E.)

> *« Je crois que cela n'aura pas d'effet sur les petits nombres et qu'il s'agit que d'exceptions. »* (B.E.)

> *« si l'on considère que la physique newtonienne n'est plus valable en présence de vitesses dépassant celle de la lumière, dans ces cas il faut faire appel à la physique relativiste, il pourrait en être de même pour les nombres. Ainsi, à un certain ordre de grandeur, les lois mathématiques que l'on connaît céderaient leur place à de nouvelles lois. »* (B.I.S.)

Les réponses : l'ordinateur en mathématiques

Vient ensuite le problème de savoir si on doit faire confiance à l'ordinateur en mathématiques. Un tel problème a déjà été soulevé dans la communauté mathématique, à l'occasion de la preuve du théorème des quatre couleurs, qui fait appel à de longs calculs effectués par un ordinateur. Après avoir considéré la chose, il est apparu que le fait de faire refaire les calculs par d'autres ordinateurs (programmés indépendamment) est aussi essentiel et n'apporte pas moins de certitude que le fait de faire vérifier une preuve classique par des mathématiciens indépendants. Le problème véritable se situe à un autre niveau : existe-t-il une preuve moins complexe, source d'une plus grande compréhension ?

---

[4] En fait, il y a une part de vérité dans cette affirmation, mais on peut douter qu'elle soit conçue clairement. En effet, dans le cadre de la théorie des ensembles, on peut définir les ensembles cardinaux et ordinaux (ainsi que des opérations d'addition et de multiplication). Dans le cas fini, ces deux concepts sont identiques et coïncident avec les entiers naturels. Dans le cas infini, les deux concepts diffèrent: par exemple, la multiplication est commutative pour les cardinaux et ne l'est pas pour les ordinaux. Notons cependant qu'il ne s'agit pas ici de la distinction entre *grands* et *petits* nombres, mais plutôt entre ensembles *infinis* et *finis*.

Dans le cas qui nous intéresse, le contexte de notre nouvelle inventée a donné lieu à plusieurs réactions prévisibles. Il y a tout d'abord ceux qui font confiance à l'ordinateur et à sa programmation.

> *« Si l'ordinateur excelle dans tous les autres domaines, pourquoi devrait-il fausser les résultats sur ce problème. »* (B.E.)

> *« je ne vois pas pourquoi l'ordinateur ou le programme ferait défaut seulement pour ces deux nombres précis. »* (B.E.)

Puis il y a ceux, plus prudents, qui acceptent le bien fondé de vérifications indépendantes avec d'autres ordinateurs.

> *« S'ils peuvent reproduire ce résultat avec un ou plusieurs autres ordinateurs alors là...»* (B.E.)

Il y a aussi ceux qui évoquent de possibles erreurs de la part de l'ordinateur, en essayant parfois d'en préciser des causes éventuelles.

> *« Je préfère faire confiance à l'esprit humain plutôt qu'à la machine. »* (B.M.)

> *« Il serait plus probable que M. Blackwell est fait une erreur ou que l'ordinateur est fait une erreur. »* (B.E.)

> *« La programmation du Cray III peut être erronée »* (B.I.S.)

> *« L'erreur est dite humaine mais elle peut tout aussi bien être électronique. »* (B.I.H.)

> *« il est fort possible que le programme n'arrondisse*[5] *pas de la même manière 2 fois. »* (B.E.)

> *« Étant donné que l'ordinateur joue avec de très grands nombres, voire des nombres qui tendent vers l'infini, une imprécision aussi minime qu'elle soit peut causer une erreur. »* (B.E.)

> *« on peut se demander si dans un ordinateur avec cette grande quantité de mémoire et cette rapidité pour les calculs, il n'y a pas d'autres facteurs qui entrent en considération. On peut prendre comme exemple la théorie de relativité où à de très grandes vitesses, les lois ne sont*

---

5 Rappelons cependant que tous les nombres dont il est question dans notre « contreverse » sont des entiers naturels.

plus les mêmes. Il faut dire que les différences de tension dans un ordinateur sont tellement infimes qu'à cette vitesse il y a peut-être de nouveaux phénomènes. » (B.I.S.)

Il y a encore ceux qui réclament un calcul à la main.

« *un calcul à la 'mitaine' s'impose* » (B.E.)

Ces personnes ne semblent pas réaliser la taille inhumaine pouvant être atteinte par des nombres finis. Lors de discussions, je leur ai proposé de prendre deux gros livres (des dictionnaires par exemple) et de remplacer toutes les lettres par des chiffres ou groupes de chiffres (par exemple : A par 1, ..., Z par 26) et de considérer les nombres obtenus en mettant bout à bout tous les chiffres ainsi substitués. Et si ça ne les impressionne pas, on peut toujours utiliser ces deux grands nombres (appelons-les A et B) pour en fabriquer de plus grands (par exemple A^B et B^A, etc). On voit mal dans un tel contexte comment une vérification par l'homme pourrait être supérieure à celle de la machine.

Les réponses : les justifications proposées

Enfin un petit nombre de répondants font appel à une argumentation. Je les commenterai de façon plus détaillée puisqu'il s'agit précisément du phénomène que je voulais mettre en lumière.

Il y a tout d'abord les arguments imprécis, à peine évoqués.

« *Je ne crois pas du tout que la loi sur la commutativité de la multiplication ait été prise en défaut. Supposons. ... $\infty(\infty+1) = (\infty+1)\infty$.* » (B.E.)

« *Je crois que M. Ozoroff a raison car une multiplication, c'est une addition répétée donc en plus de dire que la multiplication n'est pas commutative, on dira également que l'addition n'est pas commutative.* » (B.E.) [6]

« *en percevant la multiplication comme une méthode abrégée d'addition...* » (B.I.H.)

On évoque aussi un argument heuristique pour appuyer ses dires. Si la loi n'était pas vérifiée alors il est très probable qu'on l'aurait découvert avant, étant donné ses ramifications multiples. Cet argument heuristique n'est pas dénué de tout fondement, mais il n'est pas toujours correct. Par exemple : la mécanique de Newton semblait irréprochable jusqu'à ce que des instruments plus précis nous permettent de découvrir certains phénomènes non conformes, qui ont mené à la

---

[6] Malheureusement pour cet argument, l'exponentiation est une multiplication répétée qui n'est pas commutative.

relativité d'Einstein. En mathématiques, des phénomènes nouveaux (notamment dans le domaine du chaos) ont dû attendre les ordinateurs pour être mis en évidence.

> *« Cependant, il serait étonnant que le Pr. Blackwell ait raison puisque les lois scientifiques basées sur la commutativité de la multiplication n'ont pas encore montrées de failles. »* (B.I.S.)

> *« Mais, considérant l'éventualité que le défaut s'avère vrai, toute l'expérience scientifique serait remise en question : toutes les preuves des lois physiques et chimiques reposent en grande partie sur la commutativité, donc seraient soumises à un remaniement entier. Or il se trouve que les lois actuelles vérifient les phénomènes physiques et chimiques concrètement. »* (B.I.S.)

Il y a ensuite les cas où une preuve est évoquée, sans être faite. On ne décrit pas dans quel contexte (théorie des ensembles, arithmétique de Peano, etc.) ladite preuve serait effectuée. Dans le premier cas, on prend tout de même la précaution d'admettre la possibilité que cette preuve elle-même pourrait admettre une faille. Dans le second cas, on réclame par la même occasion une preuve de la non-commutativité de la multiplication, comme si un contre-exemple ne suffisait pas à invalider un énoncé.

> *« La commutativité de la multiplication a été démontré et si cette démonstration est sans faille c'est probablement l'ordinateur qui en a une. »* (B.E.)

> *Je serais sûrement plus convaincu (de même pour Ozoroff) si Blackwell était passé par une preuve pour démontrer la non-commutativité de la multiplication. Après tout, c'est une preuve qui nous a convaincu de la commutativité de cette opération. »* (M.D.)

À deux occasions, on a référé explicitement à une preuve par récurrence, mais toujours sans tenter de la produire. Nous reviendrons plus tard sur le statut éventuel d'une telle preuve dans le présent contexte.

> *« Puisqu'il existe une preuve, par récurrence, de la commutativité, je serai porté à croire M. Ozoroff. »* (B.E.)

> *« Faite une preuve par récurrence et vous verrez bien que Cray III est dans les 'vaps'. Bref, je fais plus confiance en l'homme qu'en la machine en <u>mathématiques</u>. »* (B.M .)

Certaines argumentations sont basées sur le fait que les mathématiques sont une science hypothético-déductive, plutôt qu'une science expérimentale. Il est donc vrai qu'une règle démontrée ne saurait souffrir d'exceptions, *si la preuve est correcte* ***e****t la théorie sous-jacente est* *consistante*. Ce dernier point modère quelque peu la liberté revendiquée dans le deuxième extrait ci-dessous.

> *« les mathématiques ne se fondent pas sur des observations, mais sur des théorèmes et des règles prouvées et démontrées. Il n'y a donc pas d'exceptions en mathématiques, comme il peut y en avoir en physique ou en chimie, domaines où l'on observe pour trouver des lois. »* (B.I.S.)

> *« Les mathématiques sont-elles des sciences empiriques ?*
> *Si oui, alors on a raison d'être consterner par cette flagrante contradiction. (...)*
> *Si non, alors toute cette controverse tombe à l'eau. La multiplication est commutative parce qu'il nous plaît qu'elle le soit.*
> *Réponse : NON. »* (M.M.)

Il n'est pas exact de dire qu'on peut ajouter selon notre bon vouloir n'importe quelle règle à un système mathématique : ainsi, on ne peut décréter que l'exponentiation sera une opération commutative, puisqu'on sait par ailleurs que $2^3 \neq 3^2$. Outre des critères de nécessité, d'importance, d'économie et même de beauté qu'on peut considérer comme subjectifs (ou à tout le moins intersubjectifs), il y a le critère essentiel de consistance : nos axiomes ne doivent pas nous permettre de prouver à la fois un énoncé et sa négation. Il est arrivé par le passé que des systèmes que l'on croyait sans failles se soient avérés inconsistants.[7] Si une découverte comme celle évoquée dans notre fausse nouvelle venait à survenir vraiment, ce serait le signe (que dis-je, la preuve) que toutes les théories pouvant servir à prouver la commutativité de la multiplication de naturels (arithmétique de Peano, théorie des ensembles, etc.) sont inconsistantes, et donc incapables de produire la moindre information valable. Inutile de dire que nous ne prévoyons pas qu'une telle éventualité se produise un jour.[8]

Nous arrivons enfin aux quatre personnes qui ont esquissé des arguments se rapprochant le plus d'une discussion satisfaisante. Ils font tous appel au calcul de l'aire d'un rectangle, parfois avec diagrammes à l'appui.

> *« Et qu'arrive-t-il de l'aire du rectangle engendré par ces deux nombres astronomiques?!!! »* (accompagné d'un dessin de deux rectangles : base x et hauteur y ; base y et hauteur x) (B.M.)

---

7 À une certaine époque, on croyait qu'étant donné une propriété P quelconque, on pouvait définir l'ensemble correspondant E constitué de tous les ensembles x vérifiant la propriété P (c.-à.-d. $E = \{x: P(x)\}$), ensemble qui jouit (par définition) de la propriété suivante: $x \in E$ *si et seulement si* $P(x)$. En fait, ceci semblait être une supposition très naturelle et inoffensive. Or, on s'est aperçu que, lorsque $P(x)$ était la propriété $x \notin x$, on obtenait une contradiction. En effet, soit $D = \{x: x \notin x\}$. Pour tout ensemble x, on a $x \in D$ *si et seulement si* $x \notin x$. En particulier, dans le cas où $x = D$, on a $D \in D$ *si et seulement si* $D \notin D$, ce qui est contradictoire.

8 Pourquoi ne peut-on pas être plus affirmatif ici ? Tout simplement parce qu'on sait depuis Gödel qu'il est impossible de prouver la consistance d'une théorie consistante contenant l'arithmétique sans faire appel à une théorie encore plus puissante, et donc encore plus sujette à être inconsistante. (Voir par exemple Nagel et al. (1989).)

« Si on considère par exemple que ces deux nombres représentent la longueur et la largeur d'un rectangle, cela voudrait dire que l'aire du rectangle est différente selon qu'on fait b × h ou h × b. Cela n'a pas de sens. » (B.E.)

« Parce qu'elle a été vérifiée par plusieurs nombres, et c'est tellement évident quand on pense à son application, par exemple Aire = b × h = h × b »
(accompagné d'un dessin d'un rectangle de base b et hauteur h) (M.D.)

« on peut aussi représenter la multiplication par un simple calcul d'aire... » (B.I.H.)

On peut cependant se demander si la formule du calcul de l'aire du rectangle (sur laquelle repose l'argument) n'est pas elle-même remise en cause par la « découverte » d'Ozoroff. En fait, nous verrons plus tard que l'argument est en fait inutilement complexe[9].

Pourquoi la multiplication des naturels est-elle commutative ?

En citant divers extraits de réponses, j'ai parfois fait quelques commentaires sur le bien fondé de l'argumentation proposée. Comme je ne semble pas complètement satisfait d'aucune des réponses examinées, on est en droit de me demander ce qui constitue, d'après moi, une réponse adéquate. Loin de prétendre pouvoir donner des critères généraux pour évaluer si une réponse est adéquate ou pas (ceci varie peut-être d'un individu à l'autre), je vais essayer de vous proposer une argumentation qui me semble être une bonne candidate à ce titre, en ce qu'elle apporte à la fois une certitude logique et une compréhension profonde, tout en restant d'une très grande simplicité[10].

La commutativité de la multiplication des nombres naturels a été prouvée de plusieurs façons[11] par les mathématiciens. Mais je veux ici me placer dans un contexte scolaire et songer aux moyens que pourrait utiliser un enseignant de mathématiques pour faire comprendre à ses élèves la loi de la commutativité de la multiplication des naturels. À ce niveau, il est hors de question d'utiliser un procédé de calcul formel. Il faut plutôt se placer dans un contexte qui donne un sens aux nombres

---

9 En effet, la définition **générale** de l'aire des rectangles et l'établissement **général** des propriétés usuelles (comme la formule permettant de calculer l'aire en fonction des longueurs des côtés) sont relativement subtils (car devant tenir compte du cas des mesures irrationnelles). Nous verrons plus loin qu'on peut simplifier considérablement cette argumentation en se limitant à un cas particulier, où tout se ramène à de simples dénombrements.

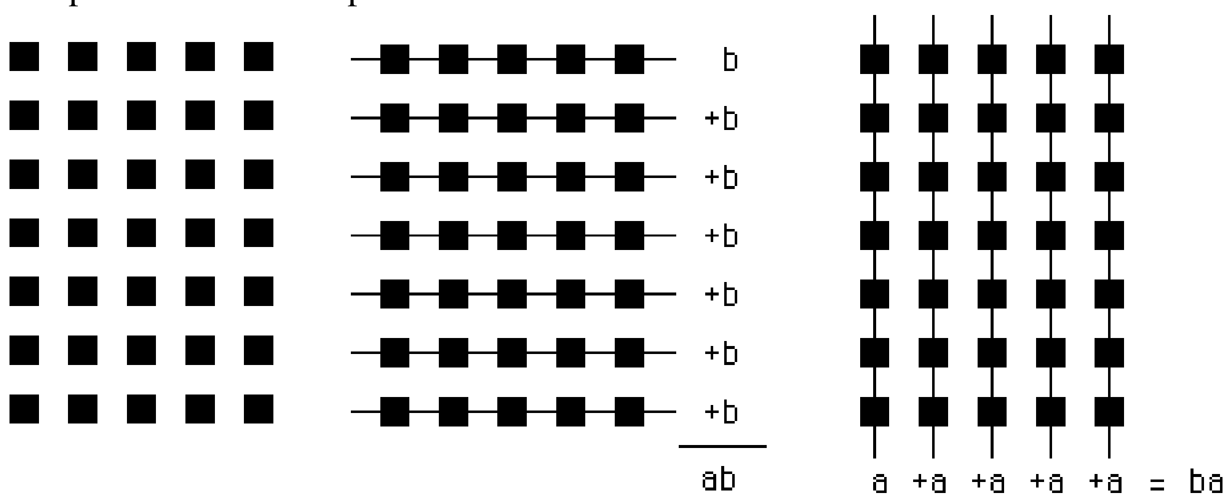
10 Je ne prétends pas être l'auteur de cette argumentation : elle ferait plutôt partie du « folklore mathématique ». Entre autres sources, elle est brièvement évoquée dans le célèbre livre de Courant et Robbins (1996) au début du chapitre I.

11 Notons que la preuve par induction dans l'arithmétique de Peano est plus éloignée des intuitions élémentaires qu'une preuve dans un cadre ensembliste, qui pourrait se lire comme suit: si $a = \mathrm{card}(A)$ et $b=\mathrm{card}(B)$, alors on a par définition que $ab=\mathrm{card}(A\times B)$ et que $ba=\mathrm{card}(B\times A)$, où $A\times B = \{(x,y): x\in A \text{ et } y\in B\}$; or puisque la fonction qui associe au couple (x,y) de $A\times B$ le couple (y,x) de $B\times A$ établit une bijection entre ces deux ensembles, on en conclut que $ab=\mathrm{card}(A\times B)=\mathrm{card}(B\times A)=ba$.

naturels ainsi qu'à leur multiplication. Ainsi, on peut voir un nombre naturel comme le compte-rendu d'un dénombrement (exemple : on a compté 32 objets dans cette boîte), l'addition comme le dénombrement d'une réunion de deux collections disjointes (exemple : il y a 32 objets dans cette boîte, et 16 dans cette autre ; il y en a donc 32+16 en tout), et la multiplication comme une addition répétée[12].

Dans ce contexte, ab signifie $b + \cdots + b$, où l'on additionne a termes égaux à b. De même ba signifie $a + \cdots + a$, où cette fois on additionne b termes égaux à a. Il est important de réaliser que ces deux calculs sont très différents l'un de l'autre, et qu'il n'est pas du tout évident que les résultats de ces deux calculs soient identiques. Comme c'est souvent le cas en mathématiques, il faudra trouver une bonne façon de regarder la situation pour que tout s'éclaire.

Disposons donc des objets en une configuration rectangulaire[13], à raison de a rangées de b objets. La figure suivante illustre le cas où a = 7 et b = 5, mais l'argument qui va suivre ne dépendra évidemment pas de ces valeurs particulières.



Si nous comptons les objets rangée par rangée (dessin du centre), nous devons additionner les b objets de la première rangée, plus les b objets de la seconde rangée, ... et ainsi de suite jusqu'à la a ième rangée : nous obtenons donc une addition répétée de a termes égaux à b, soit ab objets. De façon semblable, si nous comptons les objets colonne par colonne (dessin de droite), nous obtenons une addition répétée de b termes égaux à a, soit ba objets. Or notre expérience cognitive nous a tous convaincus (à partir d'un certain âge, nous disent les psychologues) du principe général de **conservation du nombre** : le résultat d'un dénombrement ne dépend pas de la

---

12 On pourrait aussi décrire directement la multiplication en rapport avec le dénombrement d'objets disposés en une configuration rectangulaire (on y viendra plus tard), ou comme moyen de changer d'unité de dénombrement. Mais la description en termes d'addition répétée est la plus répandue et c'est celle que nous adoptons pour le moment.

13 Cette disposition en configuration rectangulaire n'est pas sans rappeler le produit cartésien, utilisé dans la preuve ensembliste évoquée à la note 11.

nature ou de la disposition des objets, non plus que de l'ordre dans lequel ce dénombrement a été effectué. Dans notre cas, cela signifie que le nombre d'objets ne doit pas dépendre du fait que le dénombrement soit fait par rangées ou par colonne. On obtient donc que $ab = ba$.

L'argumentation précédente est en fait une simplification allant à l'essentiel des explications en termes d'aires de rectangles. En effet, on peut définir l'aire comme une mesure, en prenant un carré (de côté 1) comme unité. Ce processus peut devenir complexe, même pour un rectangle (si les longueurs de ses côtés sont irrationnelles, par exemple), car il peut nécessiter de subdiviser indéfiniment l'unité de mesure et de « passer à la limite ». Mais dans le cas d'un rectangle dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers (disons une hauteur de a unités et une base de b unités), le recouvrement avec des carrés unités arrive juste, et mesurer revient à dénombrer ces carrés, qui sont disposés en configuration rectangulaire, ce qui nous ramène à l'argumentation précédente.[14]

En fait, il me semble que l'argument se référant au dénombrement d'une configuration rectangulaire d'objets et à la conservation du nombre soit le mieux adapté pour se convaincre en profondeur et pour **faire comprendre** à des élèves **pourquoi** la multiplication de nombres naturels est commutative. Bien sûr, selon l'âge des élèves, on pourra argumenter non pas dans le cas général mais sur plusieurs cas particuliers, avec dessins ou mêmes objets concrets à l'appui. Ce qui importe, c'est de constater qu'il existe une approche simple et éclairante pour comprendre cette loi mathématique.

En guise de conclusion

Notre analyse des réponses obtenues révèle quelques faits étonnants. Tout d'abord le fait qu'un nombre non négligeable de répondants soient prêts à remettre en question la loi de commutativité de la multiplication[15]. Ensuite le fait que, pour plusieurs, cette loi constitue plus une croyance qu'un énoncé susceptible d'explications ou de justifications. Et encore le fait de l’apparition surprenante de certains arguments erronés (par exemple : *une exception ne suffit pas à invalider une loi ;* ou une sorte de variation sur ce thème : *les grands nombres peuvent être exceptionnels*). Enfin et surtout le fait que très peu de répondants élaborent des arguments articulés, allant nettement au-delà de l'énoncé de généralités[16].

---

14 Il faut noter qu'une étape importante dans la définition générale d'une mesure est de démontrer un principe de conservation, à savoir que la mesure obtenue ne dépend pas de la position de la figure, non plus que de la façon dont la mesure a été effectuée. Cependant, dans un contexte élémentaire, on peut passer ceci sous silence. (À ce sujet, voir l’excellent livre d’Henri Lebesgue (1975).)

15 Ceci fait aussi ressortir la méthodologie choisie pour étudier le phénomène: en dépit des interférences provoquées par la contextualisation de la question, il me semble clair que cette mise en situation a fait ressortir des opinions et des argumentations qui seraient restées cachées dans un cadre purement scolaire.

16 Bien sûr il ne faut pas oublier qu'on demandait à (presque) tout le monde de répondre spontanément. Mais cela souligne en fait qu'il s'agissait pour la plupart d'entre eux d'un problème nouveau dont la solution n'était pas évidente.

Même si nous avons peu parlé de nos rencontres avec des professeurs en exercice et des conseillers pédagogiques (qui discutaient oralement des mêmes questions et que nous n'avons pas voulu citer à peu près), nous pouvons dire que leurs réactions ne diffèrent pas de façon significative de celles que nous avons évoquées précédemment.

Notre enquête, si limitée soit elle, semble donc indiquer que bien peu de gens, même parmi les professeurs (en formation ou en exercice) et les conseillers pédagogiques en mathématiques, pensent à évoquer un argument simple et éclairant pour expliquer cette loi. De plus, au cours des discussions avec les groupes ayant tenté de répondre (par écrit ou oralement) à mes deux questions sur « la controverse Blackwell versus Ozoroff », j'en venais toujours à demander « Pourquoi cette loi est-elle vraie ? Est-ce un simple acte de foi de votre part, ou au contraire pouvez-vous suggérer une argumentation quelconque pour la soutenir ? » Mais, en dépit de tous mes efforts, je n'obtenais jamais une argumentation fondamentalement nouvelle.

Mais pourquoi donc cette loi, pourtant si simple, s'avère si difficile à justifier[17] *?* Tout simplement parce qu'en général personne ne prend la peine de l'expliquer. En effet, lorsqu'on rencontre cette loi pour les premières fois, elle est utilisée implicitement (par exemple : quand on apprend les tables de multiplication). Beaucoup plus tard, lorsqu'on rend cette loi explicite, on se contente de remarquer qu'elle est, au fond, « bien connue » (d'ailleurs on l'énonce souvent pour tous les nombres à la fois : entiers, rationnels et réels). Et si jamais on en vient à tenter de la prouver, c'est dans le cadre de systèmes axiomatiques formels (tels l'arithmétique de Peano) qui ne visent pas une compréhension en profondeur d'une telle règle en particulier.

Faut-il pour autant s'inquiéter de la situation révélée par notre petite enquête ? Je dirais à la fois oui et non. Ce qui m'inquiète le plus, ce sont les conceptions erronées de plusieurs répondants sur les énoncés mathématiques et sur les méthodes utilisables pour les établir. Je ne m'attendais pas du tout à me faire dire que les règles mathématiques pouvaient avoir des exceptions, et qu'on était autorisé au besoin à les camoufler pour se simplifier la vie.

D'un autre côté, même si les diverses propriétés des nombres forment la base essentielle des manipulations symboliques utilisées en algèbre, je ne m'inquiète pas outre mesure de ce qu'on ne puisse justifier l'une ou l'autre d'entre elles. Ce qui serait vraiment inquiétant (et la présente recherche ne nous permet pas de conclure quoi que ce soit à ce sujet), c'est que ce manque de compréhension soit généralisé. Permettez-moi cette métaphore : comparons le cheminement mathématique d'un individu à une route et chaque problème (conceptuel ou méthodologique) à un trou. Il n'est qu'humain pour un individu d'avoir quelques trous dans sa route, mais il ne faudrait

---

[17] Cette loi est souvent présentée ultérieurement comme un axiome, dont la vérité doit être acceptée sans démonstration. Mais cette vérité doit être établie avant de pouvoir affirmer d'une situation qu'elle est un modèle des axiomes en question. Par exemple, avant de dire que les nombres naturels vérifient cet axiome (et que les matrices ne le vérifient pas toujours).

pas que celle-ci ressemble trop à une passoire, spécialement si cet individu a pour mission d'aider les autres à construire leur propre route.

Doit-on obligatoirement justifier cette loi, tant dans l'enseignement secondaire que lors de la formation des maîtres ? Comme je l'ai dit précédemment, ce n'est pas tant notre attitude face à cette loi particulière que face à l'ensemble des propriétés mathématiques qui me préoccupe. Dans l'enseignement secondaire, on a trop souvent tendance (dans les manuels destinés aux élèves) à vérifier un énoncé mathématique sur quelques exemples pour en « affirmer » la validité. Je ne dis pas qu'il faut systématiquement éviter de telles démarches, mais il faut alors dire très clairement qu'une telle vérification n'est pas suffisante en mathématiques. Par ailleurs, il faut fournir plus souvent aux élèves des justifications complètes, tout en soulignant qu'elles sont correctes d'un point de vue mathématique. Il ne s'agit pas ici de vouloir tout prouver (ce qui serait trop long et trop difficile au niveau secondaire) ; il faut plutôt que l'élève sache très clairement quand un énoncé a été prouvé et quand il n'a été que « vérifié dans quelques cas », quand une argumentation est « mathématique » et quand elle ne l'est pas.

En ce qui a trait à la formation des maîtres, lorsque des explications simples et éclairantes de concepts centraux sont disponibles, il me paraît avisé de les faire connaître. Dans notre cas précis, l'idée de voir la multiplication en termes de configurations rectangulaires est très riche et pourra être réinvestie par l'étudiant lorsque viendra le temps de discuter d'autres propriétés, telle la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Notons par contre que ce type d'explication n'est valable que lorsque tous les nombres en présence sont des entiers naturels, car la multiplication est alors une addition répétée. Pour d'autres types de nombres (négatifs, rationnels, irrationnels), on pourrait alors se demander à quoi correspond la multiplication, et si une représentation en termes d'aires (éventuellement signées) peut nous aider ou si, au contraire, on doit avoir vérifié la commutativité de la multiplication avant de pouvoir établir la formule d'aire d'un rectangle. Je vous laisse y réfléchir...

Références bibliographiques

R. Courant et H. Robbins (1996), *What is Mathematics ?*, Oxford University Press.
[Second Edition, revised by Ian Stewart]
Henri Lebesgue (1975), *La mesure des grandeurs*, Librairie Albert Blanchard, Paris.
S. Milgram (1974), *Soumission à l'autorité*. Paris, Calmann-Levy.
E. Nagel, J. R. Newman, K. Gödel et J.-Y. Girard (1989), *Le théorème de Gödel*, Ed. du Seuil.