Activité 6 : Factorisation

# *Point d’insertion :* après que les élèves aient étudié les identités impliquant la somme et la différence de cubes.

**Objectifs :** établir des liens entre les notions déjà connues des élèves à propos de l’application des formules

 ;  ; ,

et développer la généralisation donnée par .

# Partie I (Papier-crayon et calculatrice, 20 minutes) :

# Découverte de régularités parmi les facteurs

1. (a) Avant d’utiliser ta calculatrice, essaie de te souvenir de la factorisation de chaque expression algébrique, et écris dans la colonne de gauche du tableau

|  |  |
| --- | --- |
| Factorisation avec **papier-crayon** | Vérification avec la commande FACTOR (écris le résultat affiché par ta **calculatrice** *s’il est différent de ce que tu as obtenu*) |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

### Discussion en classe de la Partie I, 1a, suivie par le travail des élèves et la discussion sur les parties 1b et 2a-2d

Réflexion sur les résultats obtenus en 1a. Nous souhaitons considérer ces mêmes identités, mais sous un point de vue différent. À cette fin, regardons les formes factorisées de  et  pour voir si nous pouvons déceler des signes de régularité. « Que remarquez-vous à propos de ces deux formes ? » Parmi les réponses souhaitées des élèves, certaines devraient être liées au fait que (*x*− 1) est un facteur des polynômes  et . Encourager les élèves à faire le lien entre les formes factorisées et développées de ces deux exemples peut les aider à comprendre les composantes de la nouvelle régularité qui émergera de ces factorisations. Nous suggérons que l’enseignant écrive au tableau les expressions suivantes tout en demandant aux élèves :

 ...................... et  ............................

« Qu’obtient-on lorsqu’on multiplie ces expressions factorisées ? »

Demandez à chaque élève d’inscrire les réponses correspondantes sur les feuilles d’activité (Question 1b). En effectuant cette multiplication, les élèves devraient obtenir de nouveau la forme développée avec laquelle ils ont débuté à la Question 1a. Les questions 2a et 2d peuvent maintenant être faites en groupe-classe, les élèves partageant leurs réponses et leurs raisonnements à mesure qu’ils parcourent les questions.

Nous obtenons (les élèves écriront aussi sur leurs feuilles réponses) :

1. (b) Effectue les opérations indiquées (avec papier-crayon)

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
|  |

2. (a) Sans faire quelque manipulation algébrique que ce soit, essaie de prévoir le résultat du produit suivant : .

2. (b) D’abord avec papier-crayon (dans l’espace ci-dessous), puis avec ta calculatrice, vérifie le résultat prévu ci-dessus.

|  |
| --- |
|  |

*Note à l’enseignant :* il est important de discuter l’idée que certains termes s’annulent.

2. (c) Qu’est-ce que les trois expressions suivantes ont en commun ? Et en quoi diffèrent-elles ?

, , et .

2. (d) Comment expliques-tu que des produits de facteurs de plus en plus longs donnent un simple binôme ?

**Discussion en classe à la suite de la Question 2d**

*Discussion :* À ce moment, la classe peut aborder les différentes méthodes de multiplication, en faisant un lien avec les « termes télescopés » des produits résultants. Par exemple, avec la distributivité de la multiplication sur l’addition,

,

|  |  |
| --- | --- |
| ou avec la forme verticale de l’algorithme de multiplication |  |

2. (e) En te basant sur les expressions obtenues jusqu’à présent, prédis la factorisation de l’expression .

2. (f) Explique pourquoi le produit (*x* –1) (*x*15 + *x*14 + *x*13 + … + *x*2 + *x* + 1) donne le résultat *x*16– 1 ?

*Remarque :* l’objectif est de savoir si, à ce point, les élèves sont capables de prévoir l’expression résultante en prenant en considération les termes qui seront annulés par la multiplication.

2. (g) Est-ce que ton explication (en (f), ci-dessus) reste valide pour l’égalité suivante :

(*x* –1) (*x*134 + *x*133 + *x*132 + … + *x*2 + *x* + 1) = *x*135– 1 ?

Explique :

\*\*\*\*\*

# Discussion en classe sur la Partie I

Les résultats que nous avons obtenus ci-dessus peuvent nous aider à prévoir une factorisation générale pour l’expression , pour des valeurs entières de *n*. L’enseignant pourrait poser la question suivante :

« Pouvons-nous prévoir le résultat avant d’avoir recours à la calculatrice? »

À ce moment de la discussion, on peut souligner l’importance du facteur  et aborder le fait qu’en multipliant ce binôme par n’importe quel polynôme de la forme

,

le résultat est une somme du premier et du dernier termes du produit. Ce résultat est obtenu en distribuant le facteur *x*, puis le facteur –1, à chacun des termes du second polynôme, menant ainsi à l’annulation de tous les termes « intérieurs ».

En somme, pour des valeurs entières de *n*, nous avons :



\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## Partie II (40 minutes) : Vers une généralisation (activité avec *papier-crayon* et avec *calculatrice*).

II (A) 1. Dans cette activité, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau suivant doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas.

Si, pour une ligne donnée, les résultats de la colonne de gauche et du milieu diffèrent, cherche à concilier, dans la colonne de droite, les deux résultats à l’aide de manipulations algébriques.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorisation avec **papier-crayon** | Résultat obtenu via la  commande **FACTOR** | Si, dans la colonne de gauche, tu n’es pas arrivé au résultat de la calculatrice (colonne du centre), poursuis tes calculs pour y arriver. |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

II. (A). 2. Pour quelles valeurs de *n* obtient-on une factorisation de  qui :

1. comporte exactement deux facteurs ?
2. comporte plus de deux facteurs ?
3. comporte le facteur  ?

Explique STP

**Discussion en classe sur la Partie II A**

Avant de demander les conjectures des élèves, la discussion devrait couvrir les différentes façons de factoriser *x*6 – 1, qui est une expression où *n* est un multiple à la fois de 2 et de 3.

Conjectures : nous prévoyons que les élèves vont, dans un premier temps, distinguer les cas où *n* est pair de ceux où il est impair. Nous croyons que plusieurs d’entre eux vont (incorrectement) conjecturer qu’il y a plus de deux facteurs pour les nombres pairs *n* > 2 et seulement deux facteurs quand *n* est impair.

L’enseignant peut utiliser  comme contre-exemple à cette conjecture puisque sa forme factorisée comporte trois facteurs.

Nous recommandons qu’à ce stade, les élèves travaillent individuellement ou en groupe pour revoir leurs conjectures. Ils travailleront sur la Partie II B.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**Partie II, suite (avec *papier-crayon* et *calculatrice*)**

II (B) 1. Comme dans la partie A ci-dessus, chaque ligne (avec ses trois cases) du tableau doit être complétée avant de passer à la ligne suivante. Commence par la ligne du haut, et continue vers le bas. Si, pour une ligne donnée, les résultats de la colonne de gauche et du milieu diffèrent, concilie, dans la colonne de droite, les deux résultats à l’aide de manipulations algébriques.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Factorisation avec **papier-crayon** | Résultat obtenu via la  commande **FACTOR** | Si, dans la colonne de gauche, tu n’es pas arrivé au résultat de la calculatrice, poursuis tes calculs pour y arriver. |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

II (B) 2. Sur la base des régularités que tu as observées dans le tableau II (B) ci-dessus, complète ou ajuste (si nécessaire) ta prédiction de la partie A à savoir, pour quelles valeurs de *n* obtient-on une factorisation de  qui :

i) comporte exactement deux facteurs ?

ii) comporte plus de deux facteurs ?

iii) comporte le facteur *x* + 1 ?

Explique STP :

II (C) Réponds aux questions suivantes **sans utiliser ta calculatrice** :

1. Est-ce que 

* 1. comporte plus de deux facteurs ?
  2. Comporte le facteur ?

Explique STP :

2. Est-ce que 

1. comporte plus de deux facteurs ?

ii) comporte le facteur  ?

Explique STP:

3. Est-ce que 

1. comporte plus de deux facteurs ?

ii) comporte le facteur  ?

Explique STP :

**Discussion en classe sur les Parties II B et C**

# Discussion en groupe-classe

Le but de la Partie II est d’inciter les élèves à découvrir, pour des valeurs entières de *n*, la relation générale

,

Plus spécifiquement, nous voulons que les élèves prennent conscience que pour *n* premier, la factorisation sera de cette forme; tandis que pour *n* pair, la forme de la factorisation complète, laquelle nécessite une refactorisation du second facteur, comportera (*x* – 1) et (*x* + 1) comme facteurs.

Dans la discussion suivant la Partie II A, le contre-exemple



vise à faire la distinction entre les cas où *n* est un nombre premier, un nombre pair *n* > 2, et le cas *n* impair, mais non premier.

**Si *n* est pair et *n* > 2**, alors  et  sont deux facteurs du polynôme factorisé.









**Si *n* est un nombre premier**, l’expression factorisée comporte seulement deux facteurs :











**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Partie III: Défi**

Explique pourquoi (*x* + 1) est facteur de  pour toutes les valeurs paires de *n* ≥ 2.

|  |
| --- |
|  |

**Investigation optionnelle**

**(Il est à noter que ces deux pages ne sont pas incluses dans la version de l’élève)**

**Note à l’enseignant :** si nous souhaitons encourager l’étude des racines complexes des polynômes que nous avons développés jusqu’à maintenant, nous devons faire en sorte que les élèves approfondissent les idées que nous voulons développer ultérieurement. Dans le cas présent, les élèves devront savoir comment multiplier deux nombres complexes.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

En prenant en considération les différents polynômes sur lesquels nous avons travaillé jusqu’à maintenant et notre but, qui était de trouver les racines de ces polynômes, nous orientons maintenant notre étude vers ce que nous appelons les **« racines de l’unité »**.

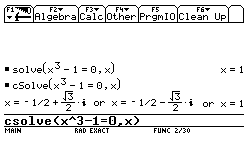
Par exemple, pour calculer les racines réelles de l’équation polynomiale, qui est équivalente à *x*4 = 1, il est possible de procéder via la factorisation:

.

Cette factorisation nous donne la solution suivante, ,  et , qui sont quatre racines dans le plan complexe.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Un autre exemple : trouver les racines réelles du polynôme *x*3 – 1 revient à résoudre l’équation, ce qui peut être fait à l’aide de la commande SOLVE de la calculatrice. Mais on peut aussi trouver les racines réelles et *complexes* de ce polynôme en cherchant les solutions complexes de  à l’aide de la commande CSOLVE de la calculatrice:



Ceci revient à dire que l’équation  est équivalente à

.

Il est à noter que ,  et *x3* =. Ces trois nombres complexes, *x*1, *x*2 et *x*3, appelés « *les trois racines troisièmes de l’unité*», sont les trois solutions de l’équation , qui est équivalente à *x*3 = 1. Donc, les solutions sont des racines troisièmes de 1. Ces trois nombres complexes ont la propriété d’être localisés sur le cercle unité (c’est-à-dire le cercle centré en (0, 0) et ayant un rayon de longueur 1) dans le plan complexe.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

En fait, *x*2 et *x*3 sont des racines du polynôme *x*2 + *x* + 1, c’est-à-dire qu’ils sont des solutions de l’équation *x*2 + *x* + 1 = 0. De plus, le produit de n’importe quelles de ces racines complexes redonne toujours une de ces racines.

Peut-on continuer de la même manière avec d’autres expressions que nous avons déjà développées ?

Avez-vous remarqué certaines régularités dans l’obtention des racines de l’unité ?