Equivalencia de expresiones algebraicas

En este documento exploramos un concepto simple, en apariencia, enseñado en escuelas de nivel secundaria: la equivalencia de dos expresiones algebraicas. Empecemos nuestra discusión, considerando un primer ejemplo: la equivalencia entre $(x+1)^2$ y x^2+2x+1. En general, se *prueba la equivalencia* de dos expresiones simbólicas de *modo sintáctico*, por medio de manipulaciones sobre sus términos, como mostramos en seguida:

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 &= (x+1)(x+1) && \text{por definición de exponente 2}\\
&= (x+1)x+(x+1)1 && \text{por la propiedad distributiva}\\
&= (x+1)x+x+1 && \text{ya que 1 es neutro multiplicativo}\\
&= xx+x+x+1 && \text{de nuevo, por la propiedad distributiva}\\
&= x^2+x+x+1 && \text{por definición de exponente 2}\\
&= x^2+2x+1 && \text{reagrupando los términos en } x
\end{aligned}
$$

Sin embargo, en el contexto de la enseñanza escolar, de nivel secundaria, usualmente, no se explicita de forma exhaustiva un conjunto de reglas que puedan ser utilizadas en las manipulaciones sintácticas[1], y no siempre se hacen explícitas todas las reglas utilizadas. Por ejemplo, en las manipulaciones precedentes, la propiedad asociativa de la adición (y las simplificaciones escritas relacionadas) es sobreentendida como recurso previo, proveniente de conocimientos aritméticos[2].

Todo profesor de matemáticas sabe que el significado de tales manipulaciones sintácticas escapa a ciertos estudiantes y que, incluso, inventan nuevas reglas, como:

$$(x+1)^2 = x^2+1^2 = x^2+1$$

Estos estudiantes pierden de vista el hecho de que los símbolos utilizados se refieren a objetos matemáticos –números en el contexto del álgebra elemental–. De igual modo, ellos olvidan que la cadena de igualdades precedente tiene el siguiente significado: las igualdades se satisfacen para todo número x. En particular, cuando $x = 1$, si ellos aplican la regla inventada, obtendrían:

$$(1+1)^2 = 1^2+1^2 = 1^2+1$$

Es decir, 4 = 2 = 2, lo cual es, evidentemente, falso[3].

---

[1] Y menos aún existe preocupación por plantearse la pregunta de completez: ¿nuestras reglas son suficientes para establecer todas las equivalencias?

[2] Podríamos explicitar las reglas aritméticas usadas, como sigue:

$$x+x=(1\cdot x)+(1\cdot x)=(1+1)\cdot x=2\cdot x=2x$$

Para el profesor de matemáticas de secundaria, esto es un nivel de detalle bastante sofisticado e, incluso, improductivo. Para el matemático esto es, simplemente, un nivel de detalle, entre otros; el cual incluso podría ser expandido; por ejemplo, mediante el uso de los axiomas de Peano.

[3] A propósito, podríamos acordar que las igualdades referidas no son de un conjunto usual de números, sino más bien de un cuerpo de números enteros módulo dos. En ese caso, tales igualdades se satisfacen, ya que la regla $x^2 = x$ es verdadera en este cuerpo de enteros. Tendríamos, entonces: $(x+1)^2 = x+1 = x^2+1$.

En general, se *prueba la no equivalencia de dos expresiones de manera semántica*[4], encontrando un contraejemplo. Esto presupone hacer referencia a **un conjunto ξ de números** (naturales, enteros relativos, decimales, racionales, reales o complejos) en los cuales están definidas las operaciones (adición, multiplicación, y tal vez sustracción y división).

Restrinjámonos, por el momento, a expresiones con una sola variable. Acabamos de ver, implícitamente, que hay dos definiciones de equivalencia de dos expresiones: $f(x)$ y $g(x)$, equivalencia para la cual usaremos la notación común: $f(x) \equiv g(x)$:

- Una *definición sintáctica*: $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes si y sólo si podemos establecer su igualdad por medio de manipulaciones simbólicas, usando reglas reconocidas como verdaderas en el conjunto ξ.
- Una *definición semántica*: $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes si y sólo si para todo elemento *a* en ξ, tenemos la igualdad entre $f(a)$ y $g(a)$ [nos referiremos a esta definición particular como: **definición semántica de equivalencia, Versión 1**].

Hemos ya señalado la dificultad de enunciar la definición sintáctica [de equivalencia] de forma precisa, pues tal enunciación supondría hacer una enumeración exhaustiva de reglas reconocidas. No continuaremos en esta dirección, y preferimos, más bien, considerar la definición semántica [de equivalencia], que nos parece menos problemática. Esta definición no causa dificultades, cuando las expresiones $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios. Sin embargo, veremos que la situación se complica si aceptamos, en nuestras expresiones, operaciones como la división, las raíces [por ejemplo, de funciones algebraicas] u otras funciones [trascendentes], como las trigonométricas.

Consideremos, por ejemplo, las "equivalencias" siguientes:

$$\frac{x-1}{x-1} \equiv 1,\ \sqrt{4x} \equiv 2\sqrt{x} \text{ y } \cos(x)\times\tan(x) \equiv sen(x).$$

Si aplicamos la versión 1 de nuestra definición semántica de equivalencia, todas estas "equivalencias" son falsas, ya que podemos encontrar, para cada una de ellas, un contraejemplo.

$$\frac{1-1}{1-1} \neq 1,\ \sqrt{4(-1)} \neq 2\sqrt{-1} \text{ y } \cos(90^0)\times\tan(90^0) \neq sen(90^0)$$

En cada caso[5], en efecto, al menos una de las dos expresiones no está definida.

Ahora bien, en la práctica usual de las manipulaciones simbólicas, las reglas correspondientes a estas tres "equivalencias" son utilizadas y acompañadas, a veces, de ciertas "precauciones".

---

[4] El término *semántica* es usado aquí en su sentido matemático; el cual es opuesto a la sintaxis (las notaciones usadas) y la semántica (el significado de los objetos referidos a esas notaciones).

[5] Para el segundo caso, asumimos que trabajamos con números reales. También se hace notar que al afirmar la veracidad de $f(a) = g(a)$ presupone que tanto $f(a)$ como $g(a)$ son dos números bien definidos.

Pretendemos que esta práctica [de manipulaciones simbólicas] se refleje en nuestra teoría; tal pretensión nos impulsa a buscar una definición de equivalencia de alcance general.

Definición semántica de equivalencia, Versión 2: $f(x) \equiv g(x)$ si y sólo si

1. para todo elemento *a* de ξ, se tiene que: $f(a)$ está definido si y sólo si $g(a)$ está definido;
2. para todo elemento *a* de ξ, para el cual $f(a)$ y $g(a)$ están definidos, tenemos $f(a) = g(a)$.

Vemos, enseguida, que esta nueva definición justifica que $\sqrt{4x} \equiv 2\sqrt{x}$, pero no las de $\frac{x-1}{x-1} \equiv 1$ y de $\cos(x) \times \tan(x) \equiv sen(x)$. En efecto, en estos dos últimos casos, la expresión de la derecha está bien definida [para cualquier valor de *x* real], pero no la expresión de la izquierda. Esperamos corregir esta problemática, proponiendo una nueva definición:

Definición semántica de equivalencia, Versión 3: $f(x) \equiv g(x)$ si y sólo si para todo elemento *a* de ξ, para el cual $f(a)$ y $g(a)$ están bien definidos, tenemos $f(a) = g(a)$.

Podemos verificar, fácilmente, que los tres ejemplos antes discutidos son, en efecto, equivalencias, de acuerdo con esta nueva definición. Sin embargo, aún tenemos algunas dificultades: contrario a las definiciones precedentes, esta nueva definición conduce a una equivalencia no-transitiva, tal como lo ilustra el ejemplo siguiente:

se tiene $|x| \equiv \left(\sqrt{x}\right)^2$ y $\left(\sqrt{x}\right)^2 \equiv x$, pero no $|x| \equiv x$.

En este último ejemplo, en efecto, las dos primeras equivalencias son verificables (ya que ambos miembros están definidos y son iguales en los números no negativos), mientras que la tercera equivalencia no es verificable (pues ambos miembros están definidos, pero no son iguales en el conjunto de los números negativos).

Sin embargo, es pertinente preguntarse, ¿por qué es importante que la equivalencia sea transitiva? Una razón crucial es que la transitividad constituye una parte esencial de las pruebas, mediante el enfoque sintáctico. Consideremos, simplemente, nuestro ejemplo inicial:

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 &= (x+1)(x+1) = (x+1)x + (x+1)1 = (x+1)x + x + 1 \\
&= xx + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1
\end{aligned}
$$

Cada una de las reglas utilizadas, nos permite tener certeza de que cada expresión es equivalente a la siguiente. Pero, ¿cómo podemos concluir que la primera expresión es equivalente a la última? Precisamente, ¡por la transitividad!

En lo que sigue, tratamos de formular una definición [de equivalencia] que concilie: la transitividad con la presencia de valores, donde las expresiones no estén definidas. La idea es de restringirse a un subconjunto *D* de ξ en el cual las dos expresiones analizadas estén definidas.

Definición semántica de equivalencia, Versión 4: Sea D un subconjunto del conjunto ξ. Diremos que $f(x) \equiv_D g(x)$ (léase "$f(x)$ es equivalente a $g(x)$ sobre D") si y sólo si para todo elemento a en D, tenemos que $f(a)$ y $g(a)$ están bien definidos y son iguales.

Esta nueva definición satisface una forma restringida de transitividad:

$f(x) \equiv_A g(x)$ y $g(x) \equiv_B h(x)$ implica $f(x) \equiv_{A \cap B} h(x)$.

Veamos cómo esta definición de equivalencia puede ser usada en la práctica. Para ello, echemos de nuevo una mirada a un ejemplo precedente:

Tenemos que $|x| \equiv (\sqrt{x})^2$ en el conjunto de los números positivos y $(\sqrt{x})^2 \equiv x$ en el conjunto de los números positivos; entonces, tendríamos que $|x| \equiv x$ en el conjunto de los números positivos.

Veamos ahora otro ejemplo:

Tenemos que $\frac{x-1}{x-1} \equiv 1$, para todo número real, excepto en 1, y también $1 \equiv \frac{x-2}{x-2}$ para todo número real, excepto en 2. Entonces, tendremos: $\frac{x-1}{x-1} \equiv \frac{x-2}{x-2}$ para todo número real, excepto en 1 y en 2.

Note que usamos, en este último ejemplo, una variante de la Versión 4 de nuestra definición [de equivalencia], donde el énfasis está puesto no sobre un conjunto D de números, donde todo funciona bien, sino más bien sobre un conjunto N de números, donde hay dificultades [restricciones]. Podemos suponer, en la Versión siguiente, que $N = \xi \setminus D$:

Definición semántica de equivalencia, Versión 5: Sea N un subconjunto de ξ. Decimos que $f(x) \equiv g(x)$, excepto para N (léase "$f(x)$ es equivalente a $g(x)$ excepto en N") si y sólo si para todo elemento a de ξ, y que no pertenece a N, tenemos que $f(a)$ y $g(a)$ están bien definidos y son iguales.

He aquí la forma que toma la transitividad con esta Versión 5 de nuestra definición:

$f(x) \equiv g(x)$ excepto en A y $g(x) \equiv h(x)$ excepto en B, implica $f(x) \equiv h(x)$ excepto en $A \cup B$.

Aunque, *a priori*, el conjunto N puede ser cualquier subconjunto de ξ, se requeriría tomarlo tan pequeño como fuera posible. Sin embargo, eso no siempre se logra. A veces, N tiene que ser finito; en otras, numerable, e incluso, cofinito, tal como es mostrado en los siguientes ejemplos:

- $\frac{x-1}{x-1} \equiv \frac{x-2}{x-2}$, excepto en 1 y en 2
- $\cos(x) \times \tan(x) \equiv sen(x)$, excepto cuando $x = 90^0 + k \cdot 180^0$, donde k es un entero
- $(\sqrt{x})^2 \equiv x$, excepto cuando x es negativo
- $\sqrt{x} \equiv \sqrt{-x}$, excepto cuando x es diferente de cero.

Entonces, la Versión 5 de nuestra definición [de equivalencia] parece ser necesaria y apropiada en situaciones donde las expresiones no son polinomios (un caso donde la Versión 1 es suficiente) o funciones racionales (un caso donde la Versión 3 es suficiente[6]). Sin embargo, debemos admitir que la Versión 5 [de nuestra definición de equivalencia] parece ser bastante compleja para estudiantes de secundaria: se debe, por tanto, efectuar una transposición de esta Versión para ser discutida [y entendida] en el medio escolar.

He aquí algunas sugerencias que nos parecen razonables:

1. En lugar de usar la Versión 5 de nuestra definición de equivalencia, podríamos optar, cuando sea necesario, por decir: " $f(x) = g(x)$, excepto para los números siguientes".
2. Cuando apliquemos una sucesión de reglas [que conduzcan a nuevas equivalencias], debemos motivar a los estudiantes para que ellos se refieran a la semántica de la situación, usando frases como: "sin restricción", "para todo número", "para todo número, excepto para...", "excepto para...", etc., para *restringir* sus igualdades.
3. Cuando usemos una forma u otra de transitividad [de equivalencias], debemos considerar la unión de todas las restricciones [i.e., todos aquellos valores que restringen la igualdad de dos expresiones] detectadas en todos los pasos previos, usados en la transformación de una expresión simbólica.
4. Si quisiéramos usar el término "equivalencia", podemos optar por utilizar la Versión 3 de nuestra definición, que parece ser la mejor, de acuerdo con los usos cotidianos de escolaridad de nivel secundaria. En caso de que se quisiera adaptar la Versión 3 de equivalencia, debemos llevar a cabo verificaciones suplementarias para convencerse de que se puede "eliminar" ciertas restricciones, obtenidas durante la sucesión de manipulaciones simbólicas.

Ilustremos las sugerencias precedentes mediante un ejemplo simple, aunque éste es un poco artificial: la sucesión de igualdades siguiente:

$1 = \frac{x}{x}$, excepto en 0

$\frac{x}{x} = \frac{x-1}{x-1}$, excepto en 0 y en 1

$\frac{x-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-2}$, excepto en 1 y en 2

Debemos hacer notar que aquellos valores de x [restricciones] para los cuales las igualdades de la izquierda no se satisfacen, sólo se aplican a las igualdades localizadas sobre la misma línea. Ellas no son acumulables.

Al aplicar la transitividad, debemos considerar la unión de todas las restricciones (i.e., aquellos valores para los cuales las igualdades referidas no se satisfacen): al hacerlo, podemos concluir que:

---

[6] En efecto, si $f(x)$ y $g(x)$ son cocientes de polinomios; que toman los mismos valores para un número infinito de elementos de ξ, entonces ellos toman los mismos valores para todos los elementos de la intersección de sus dominios.

$$1 = \frac{x-2}{x-2}\text{, excepto en 0, 1 y 2.}$$

Podemos verificar, directamente[7] (mediante la sustitución de valores) que esta igualdad, también se conserva cuando x tiene como valores al 0 y al 1. Tendremos, finalmente:

$1 = \frac{x-2}{x-2}$, excepto en 2; es decir, $1 \equiv \frac{x-2}{x-2}$ (en virtud de la Versión 3 de nuestra definición).

Apliquemos ahora las sugerencias precedentes en circunstancias más realistas. Supongamos que deseamos resolver la ecuación: $\cos^2(x) \cdot \tan(x) = 0$. Un procedimiento posible es reemplazar la expresión de la izquierda por una expresión "equivalente" más simple, como lo mostramos en seguida:

$$\cos^2(x) \cdot \tan(x) = \cos^2(x) \cdot \frac{sen(x)}{\cos(x)}\text{, excepto cuando } \cos(x) = 0$$

$$= \cos(x) \cdot sen(x)\text{, excepto cuando } \cos(x) = 0$$

Notemos que, en este ejemplo, las restricciones (es decir, aquellos valores de x para los cuales no es válida la igualdad) son descritas mediante una propiedad característica: $(\cos(x) = 0)$, y no mediante una descripción explícita:

(x de la forma $90^0 + k \cdot 180^0$, donde k es un entero)

El problema es entonces reducido a una ecuación simple:

$$\cos(x) \cdot sen(x) = 0\text{, excepto cuando } \cos(x) = 0$$

Cuyas soluciones consisten en la unión de las soluciones de las dos ecuaciones siguientes:

$$\cos(x) = 0\text{, excepto cuando } \cos(x) = 0$$

$$sen(x) = 0\text{, excepto cuando } \cos(x) = 0$$

La primera ecuación, no tiene, evidentemente, solución, mientras que las soluciones de la segunda son simplemente, aquellas cuando $sen(x) = 0$, ya que las funciones seno y coseno no se anulan en los mismos valores de sus dominios; es decir, sus raíces son distintas.

Podemos entrever aquí las consecuencias de nuestro tratamiento de equivalencia en la resolución de ecuaciones; sin embargo, no iremos más lejos en esta dirección. Sólo deseamos agregar los siguientes dos comentarios, a manera de conclusión:

- Incluso, en álgebra elemental, cuando trabajamos con otras expresiones, en lugar de cociente de polinomios, la noción de equivalencia se vuelve más compleja, ya que debemos tomar en consideración, aquellos valores especiales de esas expresiones (i.e., los valores para los cuales las expresiones no están definidas).

[7] Como lo mencionamos en la nota precedente, esta verificación no es necesaria, pues tenemos una relación [igualdad] de dos funciones racionales que coinciden en un número infinito de valores de su dominio. Sin embargo, un tal resultado general no siempre estará disponible.

- En este contexto es, tal vez, más prudente insistir menos en la noción de **equivalencia**, y más en el dominio de validez (o de no validez) de las **igualdades**. Además, este enfoque tiene la ventaja de que los alumnos recuerdan los fundamentos numéricos de las expresiones simbólicas involucradas.