Équivalence d'expressions algébriques

Nous allons nous intéresser à un concept simple en apparence, qui est enseigné à l'école secondaire : l'équivalence de deux expressions algébriques. Commençons notre discussion en considérant un premier exemple : l'équivalence entre $(x+1)^2$ et x^2+2x+1. En général, on *prouve l'équivalence* de deux telles expressions *de façon syntaxique*, au moyen de manipulations symboliques, comme ci-dessous

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x+1)(x+1) \quad \text{par définition de l'exposant 2}\\ &= (x+1)x+(x+1)1 \quad \text{par distributivité}\\ &= (x+1)x+x+1 \quad \text{car 1 est neutre multiplicatif}\\ &= xx+x+x+1 \quad \text{encore par distributivité}\\ &= x^2+x+x+1 \quad \text{par définition de l'exposant 2}\\ &= x^2+2x+1 \quad \text{en regroupant les termes en } x\end{aligned}$$

Dans le contexte de l'enseignement secondaire, on ne spécifie habituellement pas une liste exhaustive de règles pouvant être utilisées dans les manipulations syntaxiques[1], et on ne cherche pas toujours à expliciter toutes les règles utilisées. Dans les manipulations précédentes, par exemple, l'associativité de l'addition (et les simplifications d'écritures qu'elle permet) est sous-entendue, tout comme le recours à des connaissances arithmétiques[2].

Tout professeur de mathématiques sait que la signification de telles manipulations syntaxiques échappe à certains élèves, qui vont même jusqu'à inventer de nouvelles règles comme

$$(x+1)^2 = x^2+1^2 = x^2+1.$$

Ces élèves ont perdu de vue que ces écritures réfèrent à des objets mathématiques, les nombres dans le contexe de l'algèbre élémentaire. La chaîne d'égalités précédente a donc le sens suivant: pour tout nombre *x*, les égalités sont vérifiées. En particulier, dans le cas où *x*=1, on devrait avoir

$$(1+1)^2 = 1^2+1^2 = 1^2+1$$

c'est-à-dire 4 = 2 = 2, ce qui est manifestement faux[3].

---

[1] Et encore moins se soucie-t-on de la question de la complétude : nos règles suffisent-elles pour établir toutes les équivalences ?

[2] On pourrait chercher à rendre explicite le recours à l'arithmétique comme suit :

$$x+x=(1\bullet x)+(1\bullet x)=(1+1)\bullet x = 2\bullet x = 2x.$$

Pour le professeur de mathématiques au secondaire, c'est un niveau de détails trop grand et contre productif. Pour le mathématicien, c'est un niveau parmi d'autres, qu'on peut encore continuer de détailler, par exemple en ayant recours à l'axiomatique de Peano.

[3] Notons en passant que si on convenait que ces égalités se réfèrent non pas à un ensemble usuel de nombres, mais plutôt au corps des entiers modulo deux, alors elles seraient

En général, on *prouve la non-équivalence* de deux expressions de façon sémantique[4], en trouvant un contre-exemple. Ceci présuppose donc qu'on se réfère à **un ensemble $\mathscr{E}$ de nombres** (naturels, entiers relatifs, décimaux, rationnels, réels ou complexes) sur lesquels sont définis des opérations (addition, multiplication et parfois soustraction division).

Limitons-nous, pour le moment, aux expressions ayant une seule variable. Nous venons implicitement de voir qu'il y a deux définitions de l'équivalence de deux expressions *f(x)* et *g(x)*, équivalence que nous dénoterons comme suit $f(x) \equiv g(x)$:

- Une *définition syntaxique* : *f(x)* et *g(x)* sont équivalentes si et seulement si on peut établir leur égalité par des manipulations syntaxiques faisant appel à des règles reconnues vraies pour l'ensemble $\mathscr{E}$.
- Une *définition sémantique* (version 1) : *f(x)* et *g(x)* sont équivalentes si et seulement si pour tout élément *a* dans $\mathscr{E}$ nous avons l'égalité entre *f(a)* et *g(a).*

Nous avons déjà souligné la difficulté d'énoncer la définition syntaxique de façon plus précise, car ceci supposerait de faire une énumération exhaustive des règles reconnues. Nous ne poursuivrons pas dans cette voie, et choisissons plutôt de considérer la définition sémantique, qui semble moins problématique. Cette définition ne pose aucun problème dans le cas où les expressions *f(x)* et *g(x)* sont des polynômes. Mais nous allons voir que la situation se complique si on accepte, dans nos expressions, des opérations comme la division, les racines, ou d'autres fonctions comme les fonctions trigonométriques.

Considérons, par exemple, les « équivalences » suivantes :

$$\frac{x-1}{x-1} \equiv 1,\ \sqrt{4x} \equiv 2\sqrt{x} \text{ et } \cos(x)\times\tan(x) \equiv \sin(x).$$

Si nous appliquons la version 1 de notre définition sémantique d'équivalence, ces « équivalences » sont toutes fausses car nous pouvons pour chacune trouver un contre-exemple

$$\frac{1-1}{1-1} \neq 1,\ \sqrt{4(-1)} \neq 2\sqrt{(-1)} \text{ et } \cos(90°)\times\tan(90°) \neq \sin(90°).$$

Dans chaque cas[5], en effet, au moins une des deux expressions n'est pas définie.

Or, dans la pratique usuelle des manipulations syntaxiques, les règles correspondant à ces trois « équivalences » sont utilisées, accompagnées parfois de certaines « précautions ».

---

vérifiées puisque la règle $x^2 = x$ est vérifiée dans ce contexte. Nous aurions alors : $(x+1)^2 = x+1 = x^2+1$.

[4] Ce mot est utilisé ici dans le sens mathématique, qui oppose syntaxe (les écritures utilisées) et sémantique (les objets auxquels ces écritures réfèrent).

[5] Pour le second cas, on suppose que nous travaillons avec des nombres réels. Notons au passage que, pour nous, affirmer la véracité de *f(a) = g(a)* présuppose que *f(a)* et *g(a)* sont tous deux définis.

Nous voudrions donc que cette pratique se reflète dans notre théorie, ce qui nous pousse à chercher une définition de portée plus générale de l'équivalence :

Définition sémantique de l'équivalence (version 2) : $f(x) \equiv g(x)$ si et seulement si

1. pour tout élément *a* de $\mathscr{E}$, on a : *f(a)* est défini ssi *g(a)* est défini
2. pour tout élément *a* de $\mathscr{E}$ pour lequel *f(a)* et *g(a)* sont définis, on a *f(a) = g(a).*

On voit tout de suite que cette nouvelle définition règle le cas $\sqrt{4x} \equiv 2\sqrt{x}$, mais pas les cas de $\frac{x-1}{x-1} \equiv 1$ et de $\cos(x) \times \tan(x) \equiv \sin(x)$. En effet, dans ceux-ci, l'expression de droite est partout définie mais pas celle de gauche. On peut espérer améliorer la situation en proposant une nouvelle définition :

Définition sémantique de l'équivalence (version 3) : $f(x) \equiv g(x)$ **ssi** pour tout élément *a* de $\mathscr{E}$ pour lequel *f(a)* et *g(a)* sont tous deux définis, on a *f(a) = g(a).*

On vérifie facilement que les trois exemples mentionnés ci-dessus sont bel et bien des équivalences au sens de cette nouvelle définition. Mais tous nos problèmes ne sont pas résolus pour autant : contrairement aux définitions précédentes, cette nouvelle définition ne nous donne pas une équivalence transitive, comme l'illustre l'exemple suivant :

on a $|x| \equiv \left(\sqrt{x}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2 \equiv x$, mais pas $|x| \equiv x$.

Dans ce dernier exemple, en effet, les deux premières équivalences sont vérifiées (puisque leurs deux membres sont définis et égaux sur les nombres non négatifs), tandis que la troisième équivalence n'est pas vérifiée (car ses deux membres sont définis mais non égaux sur les nombres négatifs).

Mais au fait, est-il si important que l'équivalence soit transitive? C'est essentiel dans les preuves par manipulations syntaxiques. Considérons simplement notre exemple initial :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x+1)(x+1) = (x+1)x + (x+1)1 = (x+1)x + x + 1 \\ &= xx + x + x + 1 = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

Chacune des règles utilisées nous assure que chaque expression est équivalente à l'expression qui la suit immédiatement. Mais qu'est-ce qui nous permet de conclure que la première expression est équivalente à la dernière? C'est précisément la transitivité!

Essayons donc de formuler une définition conciliant la transitivité et la présence de valeurs où les expressions en présence ne sont pas définies. L'idée est de se restreindre à un sous-ensemble D de $\mathscr{E}$ sur lequel les deux expressions en question sont définies.

Définition sémantique de l'équivalence (version 4) : Soit D un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{E}$. On dira que $f(x) \equiv_D g(x)$ (lire « *f(x)* est équivalent à *g(x)* sur D ») **ssi** pour tout élément *a* de D on a que *f(a)* et *g(a)* sont tous deux définis et égaux.

Cette nouvelle définition nous assure d'une forme restreinte de transitivité :

$$f(x) \equiv_A g(x) \text{ et } g(x) \equiv_B h(x) \text{ implique } f(x) \equiv_{A \cap B} h(x).$$

Voyons donc comment ceci pourrait concrètement être utilisé. Jetons un coup d'œil renouvelé sur un exemple précédent :

On a $|x| \equiv \left(\sqrt{x}\right)^2$ sur les positifs et $\left(\sqrt{x}\right)^2 \equiv x$ sur les positifs

On aura donc $|x| \equiv x$ sur les positifs.

Examinons ensuite un autre exemple :

On a $\dfrac{x-1}{x-1} \equiv 1$ partout sauf en 1, et on a aussi $1 = \dfrac{x-2}{x-2}$ partout sauf en 2.

On aura donc $\dfrac{x-1}{x-1} \equiv \dfrac{x-2}{x-2}$ partout sauf en 1 et en 2.

On notera que nous avons utilisé, dans ce dernier exemple, une variante de la version 4 de notre définition, où l'accent est mis non pas sur un ensemble D de nombres où tout va bien, mais bien sur un ensemble N de nombres où l'on rencontre des problèmes. On peut imaginer, dans la version suivante, que N = $\mathscr{E} \setminus$ D :

Définition sémantique de l'équivalence (version 5) : Soit N un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{E}$. On dira que $f(x) \equiv g(x)$ sauf sur N (lire « *f(x)* est équivalent à *g(x)* sauf sur N ») **ssi** pour tout élément *a* de $\mathscr{E}$ qui n'est pas dans N on a que *f(a)* et *g(a)* sont tous deux définis et égaux.

Voici quelle forme prend la transitivité avec cette version 5 de notre définition :

$$f(x) \equiv g(x) \text{ sauf sur A et } g(x) \equiv h(x) \text{ sauf sur B implique } f(x) \equiv h(x) \text{ sauf sur A} \cup \text{B}$$

Même si, a priori, l'ensemble N peut être quelconque, on voudra le rendre aussi petit que possible. Mais ça ne sera pas toujours possible. Il pourra tantôt être fini, tantôt dénombrable , mais parfois même cofini, comme nous le montrent les exemples suivants :

- $\dfrac{x-1}{x-1} \equiv \dfrac{x-2}{x-2}$ sauf en 1 et en 2
- $\cos(x) \times \tan(x) \equiv \sin(x)$ sauf quand *x* = 90° + *k*•180°, où *k* est un entier relatif
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 \equiv x$ sauf quand *x* est négatif
- $\sqrt{x} \equiv \sqrt{-x}$ sauf quand *x* est non nul

La version 5 de notre définition semble être la mieux adaptée dans des situations où les expressions ne sont pas limitées à des polynômes (cas où la version 1 est suffisante) ou à

des fonctions rationnelles (cas où la version 3 est suffisante[6]). Mais il faut avouer qu'elle semble trop complexe pour un usage quotidien au niveau secondaire : il faudra donc en effectuer une transposition pour le milieu scolaire.
Voici quelques suggestions qui nous paraissent raisonnables :

1. Nous n'utiliserons pas la version 5 de notre définition d'équivalence. Quand ce sera nécessaire, nous dirons plutôt « *f(x) = g(x)* sauf pour les nombres suivants ».
2. Dans une suite d'applications de règles, nous inviterons les étudiants à faire référence à la sémantique de la situation, en utilisant des locutions comme « sans exceptions », « pour tous les nombres », « pour tous les nombres sauf… », « sauf pour… » , etc pour « commenter » leurs égalités.
3. Quand viendra le moment d'utiliser une forme ou une autre de transitivité, il faudra cumuler la totalité des exceptions issues des étapes précédentes.
4. Si nous devons utiliser le terme « équivalent », nous utiliserons la version 3 de notre définition, qui semble être la mieux en accord avec les usages courants.
   Le cas échéant, il nous faudra faire des vérifications supplémentaires pour se convaincre qu'on peut « effacer » certaines exceptions obtenues lors des manipulations.

Illustrons les suggestions ci-dessus par un exemple simple, quoique un peu artificiel : la suite d'égalités suivante

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x}{x} && \text{sauf en 0} \\ &= \frac{x-1}{x-1} && \text{sauf en 0 et en 1} \\ &= \frac{x-2}{x-2} && \text{sauf en 1 et en 2} \end{aligned}$$

Il est à noter que les exceptions mentionnées ne s'appliquent qu'à l'égalité placée sur la même ligne. Elles ne sont pas cumulatives.

Pour appliquer la transitivité, on doit cumuler les exceptions : on peut donc conclure que

$$1 = \frac{x-2}{x-2} \quad \text{sauf en 0, 1 et 2.}$$

On peut vérifier directement[7] (par des substitutions) que cette égalité est aussi vraie quand x vaut 0 ou 1. On aura donc finalement :

$$1 = \frac{x-2}{x-2} \text{ sauf en 2, c'est-à-dire } 1 \equiv \frac{x-2}{x-2} \text{ (en vertu de la version 3 de notre définition).}$$

---

[6] En fait, si *f(x)* et *g(x)* sont des quotients de polynômes qui prennent les mêmes valeurs pour un nombre infini d'éléments de $\mathcal{E}$, alors ils prennent les mêmes valeurs pour tous les éléments de l'intersection de leurs domaines.

[7] Comme nous l'avons mentionné à la note précédente, cette vérification n'est pas nécessaire, puisque nous avons affaire à deux fractions rationnelles qui coïncident en un nombre infini de valeurs de leur domaine. Mais un tel résultat général ne sera pas toujours disponible.

Appliquons maintenant les suggestions ci-dessus dans des circonstances plus réalistes. Supposons qu'on veuille résoudre l'équation $\cos^2(x) \bullet \tan(x) = 0$. Une démarche possible est de remplacer l'expression de gauche par une expression « équivalente » plus simple, comme suit:

$$\begin{aligned} \cos^2(x) \bullet \tan(x) &= \cos^2(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{sauf quand } \cos(x) = 0 \\ &= \cos(x) \bullet \sin(x) \quad \text{sauf quand } \cos(x) = 0 \end{aligned}$$

On notera ici que les exceptions sont décrites par une propriété les caractérisant $\left(\cos(x) = 0\right)$ et non pas à l'aide d'une énumération explicite

$$\left(x \text{ de la forme } 90°+k180°\text{, où } k \text{ est un entier}\right).$$

On se ramène ainsi à une équation plus simple

$$\cos(x) \bullet \sin(x) = 0 \quad \text{sauf quand } \cos(x)=0$$

dont les solutions consistent en la réunion des solutions des deux équations suivantes

$$\cos(x) = 0 \quad \text{sauf quand } \cos(x)=0$$
$$\sin(x) = 0 \quad \text{sauf quand } \cos(x)=0 .$$

La première équation n'a évidemment pas de solution, tandis que les solutions de la seconde sont simplement celles de $\sin(x) = 0$, puisque les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

On entrevoit ici les conséquences de notre traitement de l'équivalence sur la résolution d'équations. Mais nous ne poursuivrons pas plus avant dans cette direction. Nous nous contenterons des deux remarques suivantes en guise de conclusion:

- Même en algèbre élémentaire, quand on travaille avec des expressions autres que des quotients de polynômes, la notion d'équivalence devient plus complexe car on doit tenir compte des valeurs singulières des expressions en présence.
- Dans ce contexte, il est peut-être plus avisé d'insister moins sur la notion d'**équivalence**, et plus sur le domaine de validité (ou de non-validité) des **égalités**. Ceci aura potentiellement un effet bénéfique chez les élèves, soit de leur rappeler le sens numérique des expressions symboliques en présence.