**Actividad 1: Equivalencia de expresiones**

Punto de inserción sugerido: iniciando el año escolar, después de que los estudiantes hayan adquirido técnicas básicas con la calculadora, tales como las listadas abajo (vea inicios de la Parte 1).

[En las Partes III-IV de esta actividad, los estudiantes aprenderán el uso de dos comandos algebraicos de CAS y la verificación de equivalencia]

**Lección 1**

# Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

**Propósito:** un enfoquenumérico como base para la discusión en torno a la equivalencia de expresiones.

Nota para el profesor: en esta actividad se evita, deliberadamente, el término “equivalencia” o “expresiones equivalentes” hasta la conclusión de la discusión completa de la clase, siguiendo la Parte III.

Suponemos que los estudiantes habrán adquirido esas técnicas básicas de CAS, para el trabajo que sigue:

1. Insertar paréntesis en el numerador y el denominador de expresiones racionales;
2. Insertar el operador explícito de la multiplicación (\*) cuando se multipliquen dos variables, o cuando se multiplique una variable en la posición del primer lugar por una constante o alguna otra expresión;
3. Saber cómo usar el operador “tal que” (|**)** para evaluar expresiones dado cualquier valor de *x*;
4. Saber cómo usar la flecha para borrar la parte seleccionada y hacer los cambios pertinentes del texto en la línea de entrada;
5. Saber cómo reemplazar textos en la línea de entrada con cualquiera de las expresiones en el “área de historia” de la pantalla de la calculadora;
6. Saber cómo borrar la línea de entrada o cualquier otra línea de la pantalla de historia de la calculadora;
7. Tener el hábito para verificar por inspección visual, expresiones introducidas en la línea de entrada.

(A) Trabajo individual (25 minutos, suponiendo habilidades precedentes)

La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles para *x*.

Usando los dos valores dados de *x* (i.e., 1/3 y –5) y otros dos de su propia elección, calcula los valores que resultan para cada expresión por medio de la herramienta de evaluación de la calculadora [i.e., el “operador tal que”, (|**)**].

Registra tu elección para los valores adicionales de *x* en la fila de arriba de la tabla, y escribe los resultados en las celdas apropiadas mostradas abajo.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Para *x* = | 1/3 | -5 |  |  |
| Expresión | Resultado | Resultado | Resultado | Resultado |
| 1. (*x*–*3)(4x*–*3*) |  |  |  |  |
| 2. (*x2+x*–*20)(3x2+2x*–*1*) |  |  |  |  |
| 3. |  |  |  |  |
| 4. *(-x+3)2 +x(3x–9)* |  |  |  |  |
| 5. *(3x–1)(x2–x–2)(x+5)* |  |  |  |  |

(B) Compara los resultados obtenidos, de las diversas expresiones, en la tabla de abajo. Registra, en el rectángulo que sigue, lo que hayas observado.

(C) Pregunta de reflexión:

Con base en sus observaciones extraídas de la tabla precedente (en (A)), ¿qué puedes conjeturar respecto de lo que sucede si extiendes los valores de la tabla e incluyes otros valores de *x*?

|  |
| --- |
|  |

## Discusión en el salón de clase de las Partes I A, B, C

La discusión con todo el grupo (será guiada después de completar la Parte I, A, B, C, 20 minutos)

Un punto de partida para la discusión será las respuestas que den los estudiantes a la pregunta de reflexión. El profesor puede empezar con la pregunta, “entonces, ¿qué fue lo que notaste?” y “¿qué puedes concluir?”

Resultados de la discusión propuesta[[1]](#footnote-1):

* Algunos estudiantes pueden llegar al hecho de que no todas las celdas contienen algún resultado (i.e., ellos pudieron haberlo visto a través de la tabla de igualdades). Otros estudiantes pueden notar de otro modo los resultados de la igualdad. En respuesta a la pregunta posterior: “¿qué parejas de expresiones producen resultados iguales?”
* Supongamos que algunos estudiantes proponen las expresiones 1 y 4 como aquellas que producen resultados iguales para cada uno de los valores dados de *x*, entonces esta pregunta puede ser presentada: “¿alguien más nota que esto fue el caso para sus elecciones de los valores de *x* (para qué par de expresiones)? ¿Están sorprendidos por este hecho? ¿Por qué? O ¿Por qué no?” Anticipamos que algunos estudiantes estarán sorprendidos por el hecho de que las dos expresiones tienen formas diferentes; el profesor debe propiciar en los estudiantes la construcción de nuevas ideas con la pregunta: “¿en qué formas esas expresiones son diferentes?”
* Continuación de preguntas sugeridas: “¿Hay otro par de expresiones, de diferente forma, tal que produzca resultados iguales?”, “¿Cuáles?”

Suponemos que algunos estudiantes propondrán las expresiones 3 y 5 (preguntas: “¿están sorprendidos por este hecho?” “¿Por qué? O “¿Por qué no?”) Pregunte también: “¿qué sucede con la expresión 2?”; “¿qué puede decir acerca de esto y de otras expresiones?”

* La siguiente es una narrativa retórica e intuye que el profesor puede involucrar a los estudiantes con: en el caso de que cada una de éstas o de esos dos pares de expresiones (1 y 4; 3 y 5), notemos que para cada valor, en un conjunto variado de valores de *x* elegidos, las expresiones 1 y 4 siempre dan resultados iguales. Lo mismo fue cierto para las expresiones 3 y 5. “¿Piensas que ese será siempre el caso para esos dos pares de ecuaciones?” En este punto, la discusión se bifurca en dos resultados: (i) uno que trata con el dominio de definición de expresiones, y (ii) el otro que trata con la motivación de técnicas algebraicas.

(i) Preguntas sugeridas en este punto: “¿Podemos elegir *cualquiera* de los valores de *x* para estas expresiones?” “¿Cuál es el dominio de definición de cada una de las expresiones dadas?” (Aquí, esperamos que se tenga una discusión acerca de las limitaciones que tiene *x* en estas expresiones.)

(ii) “Para cada uno de ese par de expresiones, habiendo tomado en cuenta las limitaciones de *x*, dado *cualquier* valor de *x*, ¿éste produce los mismos resultados? En otras palabras, ¿podemos encontrar un valor de *x* para el cual, en un par de expresiones, éste produzca resultados *diferentes*? ¿Cómo podemos responder esta pregunta sin haber verificado todos los valores posibles de *x*? (Nota: esta última pregunta está diseñada para motivar el uso de métodos algebraicos y de propiedades para verificar la equivalencia de expresiones).

* Incluso, si algunos estudiantes proponen re-escribir las *formas* de las expresiones, obtienen una forma común para cada una de ellas; el profesor puede intervenir como sigue, para ayudar a los estudiantes a hacer la transición de un enfoque numérico a uno algebraico:

El profesor dice, mientras escribe en el pizarrón al mismo tiempo: “Podemos multiplicar estos dos factores y llevar las expresiones a formas diferentes”.

(*x*+1)(*x*+2) = *x*(*x*+2) + 1(*x*+2)

= *x*2 + 2*x* + *x* +2

= *x*2 + 3*x* + 2

Note que las expresiones original y final (así como las expresiones intermedias) tienen formas diferentes. Ahora, elija cualquier valor numérico para *x* y sustitúyalo en las cuatro expresiones (dé a los estudiantes algunos minutos para que hagan esto). ¿Qué observa? ¿Por qué sucede que todas esas expresiones diferentes producen el mismo valor numérico, cuando *x* es reemplazado por un número cualquiera?

Ahora, en forma recíproca, hemos visto en la tabla anterior de expresiones dadas que algunas parejas siempre nos conducen a valores iguales cuando sustituimos un valor dado de *x* (i,e., las expresiones 1 y 4 así como la 3 y 5). Tomando en cuanta el ejemplo anterior, ¿podemos usar álgebra para convertir una expresión de un par en la forma de otra expresión, o cada una de ellas en alguna forma común? Si podemos hacer esto, entonces estamos probando que cada sustitución numérica de *x* siempre nos lleva a un mismo valor para esas dos expresiones.

Una idea que el profesor debiera fomentar: “Llevando a cabo las operaciones indicadas, re-escribamos una expresión dada en forma diferente”. Esta idea es abordada en la parte II de esta actividad.

Nota para el profesor:

Si hay algunos alumnos, quienes tengan dificultad en comprender qué significado tiene “una forma común”, el profesor puede usar el ejemplo anterior para ilustrar que, por ejemplo, *x*2 + 3*x* + 2 es una forma común de las expresiones (*x*+1)(*x*+2) y *x*(*x*+2) + 1(*x*+2), respectivamente.

**Parte II (con papel y lápiz, 20 minutos): Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica**

**Propósito:** usando álgebra, obtener formas comunes de expresiones dadas.

(A) Con base en tus observaciones de la Parte I A y en la subsiguiente discusión en clase, ¿es posible establecer una conjetura, respecto de que las expresiones anteriores dadas pueden, en efecto, ser re-expresadas en una forma común?

|  |
| --- |
|  |

(B) Verifica tu conjetura, usando álgebra en papel y lápiz; re-escribe las expresiones dadas abajo en otra forma (no necesariamente en forma desarrollada). Muestra todo tu trabajo en la columna de la parte derecha de la tabla.

|  |  |
| --- | --- |
| Expresiones dadas | Forma re-escrita de la expresión dada |
| 1. *(x*–*3)(4x*–*3)* |  |
| 2. *(x2+x*–*20)(3x2+2x*–*1)* |  |
| 3. |  |
| 4. *(-x+3)2 +x(3x–9)* |  |
| 5. *(3x–1)(x2–x–2)(x+5)* |  |

(C) En la Parte I C, hiciste algunas conjeturas basadas en evaluaciones numéricas de expresiones. Explica en qué forma las manipulaciones algebraicas en la Parte II B ayudó (o no) al planteamiento de cada una de esas conjeturas.

Tarea

(Permita que los estudiantes lleven a casa su trabajo de la Parte II. Sin embargo, ellos DEBEN regresar dicho trabajo, junto con esta tarea).

En esta asignación, usa álgebra en papel y lápiz. No uses calculadora. Muestra todo tu trabajo en una hoja adjunta.

Considera las discrepancias observadas entre tu trabajo con álgebra en papel y lápiz de la Parte II B y las conjeturas hechas en la Parte II A.

Determina si puede eliminar esas discrepancias.

Enlista algunas de esas discrepancias que sean susceptibles de eliminar.

Hoja de trabajo

|  |
| --- |
|  |

**Lección 2**

**Parte III** **(con CAS, 20 minutos con discusión):**

**Verificación de la equivalencia, mediante la re-escritura de la forma de una expresión algebraica dada, usando el comando EXPAND**

**Propósito:** usarCAS como herramienta para proveer información en torno a la equivalencia de expresiones.

Dos posibles estrategias esperadas: (i) Usando el comando EXPAND de la calculadora para re-escribir formas algebraicas dadas; (ii) Usando CAS para verificar la equivalencia sin la re-escritura de formas, mediante la verificación de la igualdad.

La columna de la parte izquierda de la tabla de abajo contiene las expresiones de la lección previa. Usando tu calculadora, escribe en la columna de la parte derecha de la tabla las expresiones producidas al usar el comando EXPAND (considera el uso de F2 del menú de la calculadora).

Sintaxis: EXPAND (*expresión*)

|  |  |
| --- | --- |
| **Expresión dada** | **Resultado producido por EXPAND** |
| 1. *(x*–*3)(4x*–*3)* |  |
| 2. *(x2+x*–*20)(3x2+2x*–*1)* |  |
| 3. *(3x–1)(x2–x–2)(x+5)* |  |
| 4. *(-x+3)2 +x(3x–9)* |  |
| 5. |  |

## Discusión en el salón de clase de la Parte III

Preguntas de discusión:

1. “¿Qué es lo que el comando EXPAND parece que hace?” (Vea la página 96 del manual de la versión en español de la TI-92 para una descripción del comando EXPAND.)
2. Respecto a las expresiones 1 y 4:

*a*) “¿Se produjo la misma forma expandida al usar calculadora en las expresiones 1 y 4?”

*b*) “Toma la parte encerrada entre paréntesis de las expresiones 1 y 4. ¿Es posible transformar la expresión 4 en la misma forma de la expresión 1?”

*c*) “Nota que hemos llegado a formas comunes de las expresiones dadas 1 y 4 en dos formas diferentes: (i) expandiendo las expresiones 1 y 4, y produciendo la forma común 4*x*2-15*x*+9; (ii) factorizando la expresión 4, nos permite re-escribirla en la forma de la expresión 1. “¿Qué piensas de esos dos métodos diferentes para obtener formas comunes?”

1. “¿Pueden tener, las expresiones 3 y 5, la misma forma sin expandirlas?” (por medio de la factorización o la simplificación).
2. “Tu trabajo algebraico en papel y lápiz y de CAS de la lección previa, ¿te dio resultados semejantes? ¿En qué forma?” (esta pregunta pretende sólo *introducir*, pero no desarrollar estas dos formas de trabajo; el resultado de las formas producidas por CAS puede ser diferente de las formas producidas con el trabajo de papel y lápiz).
3. Conclusiones: “Basados en nuestro trabajo algebraico y en la verificación usando CAS, ¿podemos ahora concluir que las expresiones 1 y 4 (lo mismo sucede para las expresiones 3 y 5) pueden ser re-escritas en la misma forma algebraica?”

Definición de **equivalencia de expresiones:**

Especifiquemos un conjunto de valores posibles para *x* (e.g., excluyendo aquellos números donde la expresión no está definida). “Si, para cualquier número posible que reemplaza a *x*, cada una de las expresiones dadas tienen el mismo valor, se dice que esas expresiones son equivalentes en el conjunto de valores posibles.”

“Entonces, podemos concluir que, en el conjunto de números reales, las expresiones 1 y 4 son equivalentes. De igual forma, en el conjunto de los números reales, excluyendo –2, las expresiones 3 y 5 son equivalentes.”

**Parte IV (con CAS, 20 minutos):**

**Verificación de la equivalencia, sin re-escribir la forma de una expresión, mediante el uso de una prueba de igualdad**

**Propósitos:** comprender qué sucede cuando introducimos en CAS dos expresiones que son: *a*) equivalentes, y *b*) no equivalentes.

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones 3 y 5:

*(3x–1)(x2–x–2)(x+5)* = 

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

|  |
| --- |
|  |

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

|  |
| --- |
|  |

3. Usa tu calculadora con el operador “tal que” (|**)** y reemplaza *x* por –2 en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

|  |
| --- |
|  |

## Discusión en el salón de clases de la Parte IV A

Discusión breve en torno a la Parte IV A: “Al mostrar el resultado ‘true’, nota que la calculadora no tomó en consideración los valores posibles que puede tomar *x*.”

(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de su calculadora la ecuación formada por las expresiones 2 y 3:

 = 

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

|  |
| --- |
|  |

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

|  |
| --- |
|  |

## Discusión en el salón de clases de la Parte IV B

Discusión breve en torno a la Parte IV B: “¿Qué resultado muestra la calculadora?” “¿Por qué la calculadora no mostró ‘false’ en el caso posterior?” (i.e., en la pregunta B. 2) Respuesta: esta ecuación, formada por las expresiones 2 y 3, no es ni siempre cierta ni siempre falsa. Más bien, sólo para algunos valores de *x*, cuando sustituimos en ambos lados de la ecuación, nos da valores iguales. Note, de nuevo, que al mostrar ‘true’ o ‘false’, la calculadora no toma en consideración los valores posibles de *x*.

**Parte V (con CAS, 20 minutos):**

**Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS**

He aquí un nuevo conjunto de expresiones.

|  |
| --- |
| Expresión dada |
| 1. |
| 2. |
| 3. |
| 4. |

(A) Usa CAS para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Usa cualquiera de los métodos de CAS que prefieras. Muestra todo tu trabajo con CAS en la tabla de abajo:

(Nota para el profesor: Esta pregunta está planteada de manera deliberada, y de forma relativamente abierta. El equipo de investigación está interesado en obtener información de las “orientaciones naturales” de los estudiantes en este aspecto de la actividad; en particular, cuando los métodos de sustituciones numéricas son vistos por ellos como adecuados para determinar la equivalencia de expresiones.)

|  |  |
| --- | --- |
| **Qué introduces en CAS** | **Resultado mostrado por CAS** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

(B) Con base en tu trabajo precedente, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de *x*). Por favor, explica tus decisiones respecto de la equivalencia.

|  |
| --- |
|  |

1. Nota del equipo de investigación: procuramos dirigir muchos resultados profundos en esta discusión. Permítasenos ser armoniosos con la posibilidad de que bien podríamos haber creado actividades donde se señale que esos resultados son considerados o desarrollados por los estudiantes de la manera que se desee. Necesitamos estar MUY atentos en lo que sucede en todo el grupo durante esta actividad. [↑](#footnote-ref-1)