**Nom:**

**Activité 5: Somme et différence de cubes**

**Partie I (avec calculatrice): De la forme factorisée à la forme développée**

Les formes factorisées suivantes sont différentes de celles que nous avons déjà rencontrées. Utilise la commande EXPAND de ta calculatrice pour voir si ces produits de facteurs une fois développés produisent des résultats intéressants.

|  |  |
| --- | --- |
| Forme factorisée | Forme développée affichée par la calculatrice |
| 1. | *x3+8* |
| 2. | *x3-27* |
| 3. | *x3+343* |
| 4. |  |
| 5. |  |

**Partie II (avec papier-crayon et calculatrice):**

**Construction et vérification d’une règle algébrique générale**

II*a)* Regarde attentivement la forme de tous les résultats développés produits par ta calculatrice. Décris les régularités que tu remarques entre la forme factorisée et la forme développée.

La forme du résultat est un binome composé du cube du premier terme du premier facteur, suivi par le signe du premier facteur, suivi par le cube du deuxième terme du premier facteur. On remarque aussi que le second facteur est constitué du carré du premier terme du premier facteur, suivi par le signe opposé à celui du premier facteur et du produit des deux termes du premier facteur, suivi par le même signe que celui du premier facteur et du carré du second terme du premier facteur.

II*b)* Peux-tu énoncer la régularité que tu as décelée dans les cinq exemples précédents en complétant les deux règles algébriques suivantes:

Règle 1: *(a + b)(a2 – ab + b2) = a3 + b3*

Règle 2: *(a — b)(a2 + ab + b2) = a3 — b3*

II*c)* Utilise des calculs papier-crayon pour montrer que les deux règles trouvées ci-dessus fonctionnent, en développant les membres de gauche.

*(a + b)(a2 – ab + b2) = a3 — a2b + ab2 + a2b — ab2  + b3 = a3 + b3*

*(a — b)(a2 + ab + b2) = a3 + a2b + ab2 — a2b — ab2 — b3 = a3 — b3*

II*d)* Comment pourrais-tu utiliser ta calculatrice pour vérifier que les deux règles algébriques que tu as trouvées à la question *b* ci-dessus sont des équivalences.   
Utilise le tableau suivant pour décrire ton travail.

|  |  |
| --- | --- |
| Instruction tapée à la calculatrice | Résultat affiché par la calculatrice |
|  |  |
| EXPAND(*(a + b)(a2 – ab + b2))* | *a3 + b3* |
|  |  |
| EXPAND(*(a — b)(a2 + ab + b2))* | *a3 — b3* |
| OU |  |
| FACTOR(*a3 + b3)*  FACTOR(*a3 — b3)*  OU  *(a + b)(a2 – ab + b2) = a3 + b3*  *(a — b)(a2 + ab + b2) = a3 — b3* | *(a + b)(a2 – ab + b2)*  *(a — b)(a2 + ab + b2)*  True  True |

## Discussion en classe des parties I et II

##### **Partie III (papier-crayon): De la forme développée à la forme factorisée**

III(A) Factorise complètement chacune des expressions suivantes en utilisant seulement papier-crayon.   
Tu peux utiliser les règles algébriques énoncées précédemment.   
Montre tout ton travail dans la colonne de droite ci-dessous:

|  |  |
| --- | --- |
| Expression donnée | Travail pour factoriser l’expression donnée |
| 1. | *8u3—v3 = (2u-v)(4u2 + 2uv + v2)* |
| 2. | *27w3 + 8z3 = (3w + 2z)(9w2—6wz + 4z2)* |
| 3. | *(u + 2)3 — (u—2)3 = ((u + 2)—(u—2))((u + 2)2 + (u + 2)(u—2) + (u—2)2)*  *= (u + 2—u + 2)(u2 + 4u + 4 + u2—4 + u2—4u + 4)*  *= 4(3u2 + 4)* |

4. Explique comment tu as fait le lien entre les règles algébriques générales précédentes et les expressions données ci-dessus.

|  |
| --- |
| J’ai fait correspondre le premier terme de l’expression donnée à a3, et le second terme de l’expression donnée à b3. Par exemple, dans la second expression, *27w3* est (*3w*)*3* et *8z3* est *(2z)3*. J’ai ensuite factorisé comme si l’expression était *a3+b3* ou *a3—b3.* J’ai procédé de façon semblable pour les autres expressions données.  La troisième expression ci-dessus a nécessité des manipulations algébriques supplémentaires pour arriver à la forme factorisée finale. |

## Discussion en classe des parties III A

III(B) 1. Factorise l’expression suivante en utilisant papier-crayon: .

|  |
| --- |
| *v9 + w9 = (v3)3 + (w3)3*  *= (v3 + w3)(v6—v3w3 + w6)* [on pourrait s’arrêter ici, mais on peut aussi continuer...]  *= (v + w)(v2—vw + w2)(v6—v3w3 + w6)* |

2. Quelle(s) identité(s) t’ont aidé à factoriser l’expression de la question ci-dessus?   
 STP décris comment tu as appliqué ces identités.

|  |
| --- |
| J’ai tout d’abord exprimé *v9 + w9* comme *(v3)3 + (w3)3*. Comme c’est évidemment une somme de cubes, j’ai utilisé la règle pour *a3 + b3* et j’ai fait correspondre *v3* à *a* et *w3* à *b*. Après avoir factorisé, j’ai remarqué que le premier facteur était *v3 + w3*. J’ai donc pu factoriser cette partie de façon semblable, en utilisant la même règle. |

3. Factorise l’expression suivante en utilisant papier-crayon: .

|  |
| --- |
| *x6—y6 = (x3)2—(y3)2*  *= (x3 + y3)(x3—y3)*  *= (x + y)(x2—xy + y2)(x—y)(x2 + xy + y2)*  OU  *x6—y6 = (x2)3—(y2)3*  *= (x2—y2)((x2)2 + x2y2 + (y2)2)*  *= (x—y)(x + y)(x4 + x2y2 + y4)*   [on peut alors vérifier qu’on peut obtenir la même factorisation que ci-dessus]  *= (x—y)(x + y)(x2 + xy + y2)(x2—xy + y2)* |

4. Quelles identités t’ont aidé à factoriser ? Explique comment tu as appliqué ces identités.

|  |
| --- |
| Il y a deux façons de voir l’expression .  Une première façon est de la voir comme une différence de carrés (le premier cas ci-dessus), d’appliquer d’abord l’identité pour la différence de carrés, puis d’appliquer ensuite les deux règles pour la somme et la différence de cubes.  L’autre façon est de la voir d’abord comme une différence de cubes (le second cas ci-dessus), d’appliquer ensuite la règle pour la différence de cubes, puis d’appliquer l’identité pour la différence de carrés. Le facteur de degré quatre peut aussi se factoriser complètement, comme ci-dessus. |

## Discussion en classe des parties III B

**Partie IV (Devoir-défi avec papier-crayon): Application des identités**

Problème 1:

Pierre affirme que “ Si la différence deux entiers est de 2, alors la différence de leurs cubes est toujours un entier pair”.

Argumente pour ou contre cette affirmation de Pierre. Montre ton travail dans l’espace ci-dessous.

Supposons qu’on représente nos deux entiers par *x* et *x—2*.

La différence de leurs cubes est *x3—(x—2)3*, expression qu’on peut ré-exprimer comme suit en appliquant la règle pour la différence de cubes:

*x3—(x—2)3 = (x—(x—2))(x2 + x(x—2) + (x—2)2)*

*= (x—x + 2)(x2 + x2—2x + x2—4x + 4)*

*= 2(3x2—6x + 4)*

Un des deux facteurs du résultat final est 2. Ce résultat est donc un nombre pair. De plus, puisque nos deux nombres de départ, *x* et *x—2*, étaient entiers, le résultat sera aussi un entier.

Problème 2:

Éric affirme à son tour que: “Prends un entier, élève-le à la puissance 6, puis soustrais 1 au résultat. Le nombre final ainsi obtenu est toujours divisible par l’entier initial moins un, ainsi que par l’entier initial plus un”.

Argumente pour ou contre cette affirmation d’Éric. Montre ton travail dans l’espace ci-dessous.

Soit *x* l’entier initial. Si on l’élève à la puissance 6, on obtient *x6*. Si on soustrait ensuite un, on a *x6—1*.

On peut ré-écrire *x6—1* comme suit:

*x6—1 = (x2)3—13*

*= (x2—1)(x4 + 1x2 + 1)*

*= (x—1)(x + 1)(x4 + 1x2 + 1)*

Puisque *x—1* et *x + 1* sont deux des facteurs de *x6—1*, ceci montre que *x6—1* est toujours divisible par chacun de ces facteurs. De plus, on a clairement que *x—1* est “ l’entier initial moins un” et que

*x + 1* est “ l’entier initial plus un”.