Actividad 7: Factorización y solución de ecuaciones que involucran expresiones con radicales (una actividad de Integración)

Una lección (75 minutos); el último problema será asignado como tarea

Esta actividad será introducida durante la primera secuencia sobre manipulaciones algebraicas, después de que los estudiantes hayan adquirido habilidades básicas de factorización y de solución de ecuaciones. Esta actividad tiene por objeto que el estudiante pueda integrar varios contenidos del conocimiento algebraico que ellos han adquirido desde el inicio del año escolar.

*Idea central*: la factorización (obtención de factores comunes) como herramienta para resolver ecuaciones; particularmente, cuando se usa en conjunción con el teorema del “cero como producto de factores”. Es decir, “si el producto de varios factores es cero, entonces al menos uno de ellos es cero”.

*Ideas secundarias*:

* La factorización (obtención de factores comunes) puede ser aplicada no sólo con constantes y variables, sino también con expresiones algebraicas compuestas; las cuales pueden ser tomadas como objetos para operar con ellas.
  + Los estudiantes deben ser capaces de recordar o reactivar, en cierto momento, los métodos aprendidos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Ellos debieran ser capaces de usar esos métodos como apoyo, cuando resuelven ecuaciones que no son lineales ni cuadráticas, *per se*;
* Simplificar una ecuación mediante la división de ambos lados por algún factor común puede llevar a la pérdida de soluciones. En ecuaciones en las que tales simplificaciones son posibles, la estrategia es despejar de un lado de la ecuación y usar el teorema del “cero como producto de factores”; el cual nos permite tener un mejor control en torno a la búsqueda sistemática de soluciones;
* En ecuaciones que involucran variables bajo el signo de radical, la verificación después de resolverlas no sólo es aconsejable, sino necesaria.

## Duración anticipada:

De manera aproximada, 25 minutos para cada uno de los problemas 1, 2, y 3, incluyendo la discusión con el grupo completo. El problema 4 se deja de tarea.

### Pre-requisitos en torno a conocimientos y habilidades:

* Reglas de manipulación, propiedades de radicales y de exponentes. Por ejemplo:

, , 

* Solución de ecuaciones y sustituciones numéricas.
* La factorización (obtención de factores comunes) de variables en una expresión algebraica compuesta; reconocer la estructura que resulta de tal factorización.
* Ecuaciones lineales (problemas 2 y 3) y ecuaciones cuadráticas (problemas 1 y 4).
* Comandos de CAS: SOLVE, FACTOR, ENTER, TAL QUE (« **|** »), y comprensión de algunas de las limitaciones de CAS.
* Dominio de definición de expresiones algebraicas que involucran radicales. Interpretación del significado de «false» mostrado en la pantalla de CAS.
* Teorema del cero como producto. Los problemas de división por cero se introducen cuando se multiplican ambos lados de una ecuación por un factor común; cuyo propósito es la simplificación.

1. Suponga que preguntamos al estudiante que resuelva la ecuación:

 (\*)

¿Cómo procedería cuando es enfrentado a una ecuación “monstruosa” como la precedente?

Usando papel y lápiz, observa si primero puede resolver la siguiente ecuación; que es análoga, de algún modo, a la ecuación “monstruosa” precedente:

(y-2)3 –10(y-2) = y(y-2)

*Sugerencia*:la factorización (obtención de factores comunes) puede ser de utilidad aquí.

Compara tus soluciones con las obtenidas, usando el comando SOLVE de la calculadora. Si las soluciones obtenidas son diferentes, verifica tu trabajo algebraico, usando papel y lápiz. Si la calculadora da una solución adicional de las que encontraste, determina qué manipulaciones algebraicas con papel y lápiz, que usaste, te condujeron a la pérdida de la solución adicional.

El propósito de buscar el factor común (*y*-2) es relativamente fácil de motivar, ya sea en la expresión (*y*-2)3 –10(*y*-2) o en esta otra (*y*-2)3 –10(*y*-2) – *y*(*y*-2).

En cada caso, la obtención del factor común permite a los estudiantes reducir el problema a la solución de una ecuación cuadrática (cuyas soluciones son *y* = 6 y *y* = -1), si factorizamos (*y*-2) en ambos lados de la ecuación (*y*-2) ((*y*-2)2 – 10) = *y*(*y*-2), o si involucramos el teorema del “cero como producto de factores” (*y*-2) ((*y*-2)2 – 10 – *y*) = 0. Más aún, el propósito es orientar a los estudiantes hacia la posibilidad de “sacar el factor común”, involucrando las expresiones con radicales en los dos problemas subsecuentes.

De entre aquellos estudiantes, quienes hayan sacado el factor común *y*-2 en ambos lados de la ecuación, es probable que algunos hayan “perdido” la solución *y* = 2. Sea este o no el caso, no obstante, tomando como base este ejemplo, el profesor debe conducir la discusión del grupo en torno a la precaución que se debe tener antes de eliminar un factor común en ambos lados de una ecuación. En efecto, ¡para qué valores de la variable donde ésta se vuelve cero, la simplificación en ambos lados de una ecuación es equivalente a dividir entre cero! Esos valores de la variable deben por tanto siempre ser tratados (i.e., verificados como posibles soluciones) uno por uno antes de simplificarlos. La simplificación es obvia para la solución *y* = 2. Si se hace con la calculadora, puede perderse, aunque esperamos que los estudiantes la retengan.

El profesor puede ayudar a los estudiantes en ver cómo evitar este problema mediante el uso de estrategias consistentes en llevar todos los términos de un lado de la ecuación



e invocar el teorema “un producto de dos factores es cero sí y sólo sí alguno de los factores es cero”.

1. Tomando como base las estrategias usadas para resolver la ecuación previa, usa papel y lápiz para encontrar la solución de la siguiente ecuación:

 (\*\*)

Después verifica que esos valores son, en efecto, soluciones: sustituye los valores dados por la calculadora en la variable *u* de la ecuación (\*\*). ¿Hay algunas soluciones que puedes descartar? ¿Por qué sí o por qué no? Si sustituiste esos valores en su calculadora “con el operador” ( | ), ¿qué muestra la calculadora como resultado? ¿Ves alguna contradicción entre algunos de los resultados mostrados por la calculadora respecto de esta ecuación?

La factorización de  será incluso fácil de hacer una vez que se haya resuelto el último problema y haya sido discutido en clase. Sin embargo, el profesor no debe esperar la discusión de la solución *u =* 0 en esta parte; otra cosa por mencionar es que el problema de la simplificación del factor  es análogo exacto de la pregunta 1 planteada con el factor *y* – 2.

Aquí, nuestro propósito es, más bien, volver la discusión hacia la segunda solución *u* = –11/2, dada por el comando SOLVE de la calculadora, y que muchos estudiantes darán por ellos mismos. La consecuencia de esto es que los estudiantes se den cuenta de que esta solución es inadmisible (cuando se trabaja en R), dado que se tiene la raíz cuadrada de un negativo. Del mismo modo, se espera que los estudiantes adopten una actitud crítica hacia la calculadora que da *u* = –11/2 como solución, aún cuando muestra “false” al pedirle que resuelva la ecuación:

SOLVE ( |  ).

El profesor podría discutir el significado de “false” mostrado por la calculadora. Él o ella debiera insistir en la necesidad de verificar todas las soluciones de una ecuación que contiene radicales; dado que el comando SOLVE de la calculadora no incluye tal verificación.

1. Continuando con el trabajo en papel y lápiz, trata de resolver la ecuación (\*). Determina primero las condiciones bajo las cuales la solución es admisible, dado los radicales. Después, compara tus soluciones con aquellas producidas por la calculadora y discute la validez de cada valor mostrado en la pantalla de la calculadora.

Los estudiantes deben ahora integrar varios elementos surgidos de los dos últimos problemas. La condición que les pediremos es que determinen los valores de *x* tales que *x* ≥ 4. La calculadora dará como soluciones *x* = 10/3 y *x* = 4 en respuesta al comando “SOLVE”, el primero de los cuales debe ser descartado. Sin embargo, la falsedad de  parecerá menos obvia para los estudiantes.

El manejo efectivo de la factorización mediante la búsqueda del factor común presenta aquí dificultades adicionales. Esperamos que muchos estudiantes cometan errores en los siguientes tipos de ecuaciones:







Aunque la verificación con la calculadora servirá como método de control, esperamos que los estudiantes, quienes hayan cometido tales errores, sean conminados a volver a hacer sus cálculos después de haberlos verificado con la calculadora.

1. *Un desafío*: resuelva la siguiente ecuación, usando papel y lápiz.



¿Qué soluciones da la calculadora para esta ecuación? Discute la validez de esas soluciones.

El siguiente problema se deja de tarea. Los elementos a ser abordados en este problema son los mismos que antes, pero tomados con un grado mayor de dificultad con relación al manejo de radicales y de exponentes.



Además, este problema implica un mayor nivel de dificultad por la complejidad de los cálculos; esto se nota al resolver la ecuación cuadrática 4*x*2 – 6*x* – 4 = 0. Esta ecuación tiene dos soluciones *x* = -1/2 y *x* = 2, una de las cuales es válida mientras que la otra debe ser descartada dada la presencia de la raíz cuadrada en la ecuación inicial. Como antes, la solución *x* = 1/2, la cual elimina todos los radicales, debe ser conservada.