Activité 7 : Factorisation et résolution d’équations comportant des expressions avec radicaux

Cette activité d’une leçon sera introduite durant la première séquence portant sur les manipulations algébriques en secondaire IV, à la fin du matériel traitant des équations quadratiques, et après que les élèves aient développé des habiletés élémentaires en factorisation et en résolution d’équations. Cette activité a pour objectif d’amener les élèves à regrouper plusieurs éléments variés des connaissances algébriques qu’ils auront acquises depuis le début de l’année scolaire.

*Idée principale :* voir la factorisation (la mise en évidence d’un facteur commun) comme un outil pour résoudre des équations, particulièrement lorsqu’elle est utilisée conjointement avec le « théorème du produit nul ».

*Idées secondaires :*

* + Comprendre que la factorisation (mise en évidence d’un facteur commun) peut être appliquée non seulement aux constantes et aux variables, mais aussi aux expressions algébriques composées, qui peuvent être considérées comme des objets sur lesquels on peut opérer.
  + Pouvoir réutiliser, lorsque nécessaire, les méthodes apprises pour résoudre les équations linéaires et quadratiques. Les élèves doivent également pouvoir utiliser ces méthodes lorsque les équations à résoudre ne sont ni linéaires ni quadratiques.
* Comprendre que la simplification d’une équation, en divisant ses deux côtés par un facteur donné, peut conduire à une perte de solutions. Lorsque de telles simplifications sont possibles, la stratégie consistant à isoler les termes d’un côté de l’équation et à utiliser le théorème du produit nul permet généralement un meilleur contrôle dans la recherche systématique de solutions.
* Comprendre la nécessité de vérifier ses solutions dans le cas d’équations où certaines variables se retrouvent sous des radicaux.

## Durée prévue : approximativement 20 à 25 minutes pour chacun des items 1, 2 et 3, incluant les discussions en groupe-classe. L’item 4 est laissé en problème-défi.

### Connaissances et habiletés préalables :

* Règles de manipulation et propriétés des radicaux et des exposants

, , 

* Résolution d’équations et substitutions numériques.
* Factorisation (mise en évidence d’un facteur commun) de variables et d’expressions algébriques ; reconnaître la structure commune résultant d’une telle factorisation.
* Équations linéaires (items 2 et 3) et équations quadratiques (items 1 et 4).
* Commandes de la calculatrice : SOLVE, FACTOR, ENTER, opérateur de substitution (“**|**”) ; comprendre certaines limites de la calculatrice.
* Domaine de définition des expressions algébriques comportant des radicaux. Interprétation du sens de « false » affiché par la calculatrice.
* Théorème du produit nul. Les problèmes de division par zéro qui sont introduits lorsqu’on multiplie les deux côtés d’une équation par un facteur commun dans le but de simplifier.

1. Suppose qu’on te demande de résoudre cette équation :

 (\*)

Comment procéderais-tu face à un tel « monstre » ?

Avec papier-crayon, vois d’abord si tu peux résoudre l’équation suivante, qui est un peu analogue au « monstre » ci-dessus, mais tout de même plus facile :

(*y* – 2)3 – 10 (*y* – 2) = *y* (*y* – 2) (\*\*)

*Indice :*  la factorisation (mise en évidence d’un facteur commun) pourrait être utile ici.

Compare ta solution de l’équation (\*\*) à celle obtenue en utilisant la commande SOLVE de ta calculatrice. Si les solutions obtenues sont différentes, vérifie ton travail algébrique avec papier-crayon. Si la calculatrice a produit une ou plusieurs solutions additionnelles, détermine quelles étapes de tes manipulations algébriques ont causé cette perte de solution(s). STP, montre tout ton travail dans l’espace ci-dessous.

**Pour la discussion**

Dans le manuel du cours, éliminer un facteur commun est traité sans que les motivations sous-jacentes soient abordées. Dans le cas présent, le but d’éliminer le facteur commun *y* – 2 est relativement facile à expliquer, celui-ci étant dans l’expression (*y* – 2)3 –10(*y* – 2) ou l’expression (*y* – 2)3 –10(*y* – 2) – *y* (*y* – 2).

Dans chacun des cas, enlever le facteur commun permet aux élèves de réduire le problème à la résolution d’une équation quadratique (de solutions *y* = 6 et *y* = -1), que ce soit en factorisant *y* – 2 des deux côtés de l’équation (*y* – 2) ((*y* – 2)2 – 10) = *y*(*y* – 2), ou en utilisant le théorème du produit nul avec l’équation (*y* – 2) ((*y* – 2)2 – 10 – *y*) = 0. De plus, le but est d’orienter les élèves vers l’élimination possible du facteur commun dans certaines expressions comportant un radical.

Parmi les élèves qui simplifient le facteur commun *y* – 2 des deux côtés de l’équation, certains vont probablement « perdre » la solution *y* = 2. Que ce soit le cas ou non, l’enseignant devrait, en se référant à cet exemple, mener une discussion en classe sur les précautions à prendre avant d’annuler un facteur commun aux deux côtés d’une équation. En effet, pour les valeurs de la variable pour lesquelles le facteur commun s’annule, cette simplification équivaut à une division par zéro ! Ces valeurs de la variable doivent donc être traitées (c’est-à-dire qu’on doit vérifier s’il s’agit d’une solution possible) une à une, avant la simplification. Nous espérons que cette simplification particulière, pour laquelle la solution *y* = 2 (donnée par la calculatrice) est perdue, sera retenue par les élèves.

L’enseignant peut également aider les élèves à voir comment éviter ce problème en utilisant la stratégie qui consiste à amener tous les termes du même côté de l’équation



… et à évoquer le théorème « le produit de deux facteurs est nul si et seulement si (au moins) l’un des facteurs est nul ».

2. En te basant sur les stratégies employées pour résoudre l’équation précédente (\*\*), trouve les solutions de l’équation suivante avec papier-crayon:

 (\*\*\*)

Substitue les valeurs que tu as obtenues comme solutions de l’équation (\*\*\*) en utilisant l’opérateur de substitution (“**|**”) de ta calculatrice. Qu’est-ce que la calculatrice affiche comme résultat ? Y a-t-il des solutions que tu éliminerais ? Explique pourquoi.

**Pour la discussion**

La factorisation de  sera encore plus facile à faire une fois que la résolution du dernier item aura été discutée en classe. Malgré tout, à ce point, il n’est pas attendu de l’enseignant qu’il mène une discussion sur la solution *u =* 0, sinon de mentionner que le problème de simplification du facteur  est analogue à celui posé à la question 1 avec le facteur *y* – 2.

Ici, notre but est plutôt d’orienter la discussion vers la deuxième solution *u* = –11/2, donnée par la commande SOLVE de la calculatrice, et que plusieurs élèves produiront eux-mêmes. L’objectif est que des élèves soient conscient que compte tenu de la racine carrée, la solution est inadmissible (quand on travaille dans ). L’objectif est également de faire en sorte que les élèves soient plus critiques face à la calculatrice, laquelle produit *u* = –11/2 comme solution, et affiche « false » pour la commande:

 **|** 

L’enseignant peut discuter du sens du « false » qui est affiché. Il devrait insister sur la nécessité de vérifier toutes les solutions d’une équation qui comporte un radical, puisque la commande SOLVE de la calculatrice n’inclut pas une telle vérification.

3. De retour au papier-crayon, essaie maintenant de résoudre l’équation initiale (\*). Détermine d’abord la condition pour que des solutions soient admissibles, compte tenu des radicaux. Puis compare ta ou tes solution(s) avec celle(s) produite(s) par ta calculatrice, et discute de la validité de chaque valeur affichée.

**Pour la discussion**

Les élèves doivent maintenant combiner plusieurs éléments développés dans les deux derniers items. La condition que nous leur demandons de déterminer est *x* ≥ 4. La calculatrice va afficher les solutions *x* = 10/3 et *x* = 4 comme réponse à la commande SOLVE et la première solution doit être rejetée. Mais le rejet de  comme valeur réelle possible sera moins évidente pour les élèves.

Ici, la factorisation par le retrait d’un facteur commun présente des difficultés supplémentaires. Nous croyons que plusieurs élèves feront les erreurs suivantes :





 ...

Mais la vérification à l’aide de la calculatrice servira de méthode de contrôle, et nous espérons que les élèves qui ont fait de telles erreurs seront contraints à refaire leurs calculs après avoir vérifié avec la calculatrice.

4. *Un problème-défi :* Résous l’équation suivante avec papier-crayon.

.

Quelles sont les solutions de cette équation qui sont affichées par la calculatrice ? Discute de la validité de ces solutions.

**Pour la discussion**

Les éléments à travailler dans ce problème sont les mêmes qu’auparavant, mais à un niveau de difficulté supérieur, eu égard à la manipulation des radicaux et des exposants



De plus, ce problème implique un plus grand niveau de complexité calculatoire, incluant notamment la résolution de l’équation quadratique 4*x*2 – 6*x* – 4 = 0. Ceci produit les deux solutions suivantes *x* = -1/2 et *x* = 2, dont une est valide tandis que l’autre doit être rejetée, compte tenu de la présence de la racine carrée dans l’équation initiale. Comme auparavant, la solution *x* = 1/2, qui annule tous les radicaux, doit être retenue.