Utilisation de SPAF pour la représentation de surfaces paramétriques

On trouve dans le dossier « Exemples/Graphes/FonctionParam » une version spéciale de SPAF utilisable pour représenter des surfaces paramétriques. En fait la seule chose qui est « spéciale » c'est que le dossier « Figure » n'est pas vide mais contient déjà certains éléments de programmation.
Nous allons voir comment utiliser cette version de SPAF en plusieurs étapes :

1. Un peu de théorie pour expliquer le contexte.
2. Comment utiliser cette version pour représenter des surfaces paramétriques.
3. Cas particuliers
   - Représentation de graphes de fonctions $F:[a,b]\times[c,d]\rightarrow\mathbb{R}$.
   - Représentation de surfaces de révolution.

Le contexte

Une surface paramétrique dans $\mathbb{R}^3$ est obtenue en transportant une région du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide d'une fonction

$$F:D\subseteq\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3 \qquad F(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$$

La surface est F(D), l'image de D par F.

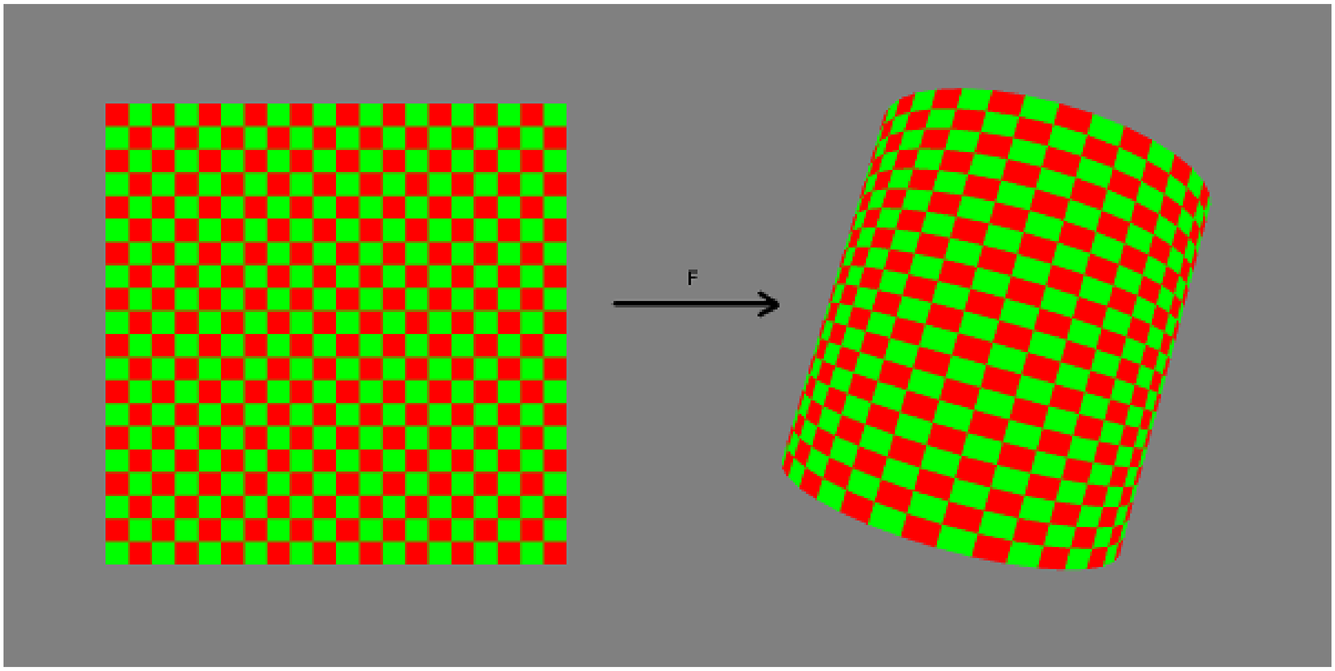
Avec SPAF on se limite à des régions rectangulaires de la forme $D=[a,b]\times[c,d]$.

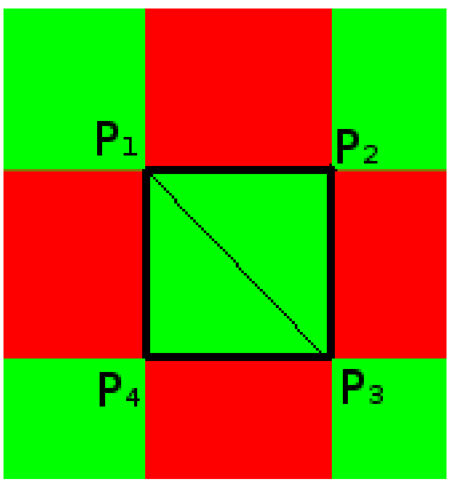
On commence par diviser le segment $[a,b]$ en ***n*** sous-segments de longueur $du=\frac{b-a}{n}$ et le segment $[c,d]$ en ***m*** sous segments de longueur $dv=\frac{d-c}{m}$.

En traçant les droites *u* = cte et *v* = cte par les extrémités de ces sous segments on obtient une grille et les points d'intersection de ces droites sont de la forme

$$(a+i\,du,c+j\,dv) \quad \text{où} \quad 0\leq i\leq n \quad \text{et} \quad 0\leq j\leq m$$

Les images $F(a+i\,du,c+j\,dv)$ de ces points seront les sommets des faces de la représentation graphique de notre surface.





Considérons maintenant un petit rectangle de la grille et appelons P_1 , P_2 , P_3 , P_4 ses 4 sommets. Leurs images $F(P_1)$, $F(P_2)$, $F(P_3)$, $F(P_4)$ forment un quadrilatère dans $\mathbb{R}^3$, malheureusement rien n'assure que ce quadrilatère est plan (ça dépend de la nature de la fonction F), il ne peut donc pas constituer une face. Pour contourner ce problème nous traçons la diagonale P_1P_3 et nous prenons pour faces les triangles $F(P_1)F(P_2)F(P_3)$ et $F(P_3)F(P_4)F(P_1)$.

La partie préprogrammée consiste à calculer les sommets et les faces. Noter, que pour des raisons d'esthétique, on a donné la même couleur aux triangles mentionnés ci-dessus (c'est toujours modifiable si vous n'avez pas la même notion d'esthétique).

Comment utiliser cette version

1. Il faut déterminer le domaine $D=[a,b]\times[c,d]$ pour cela il faut donner des valeurs aux variables a,b,c,d déjà présentes dans le fichier « Figure ».
2. Il faut déterminer le nombre de sous-segments désirés sur $[a,b]$ et $[c,d]$

   en donnant des valeurs aux variables ***n*** et ***m*** déjà présentes. C'est les valeurs de ces variables qui déterminent les nombres de sommets et de faces.
3. Il faut définir la surface à représenter en définissant la fonction F par ses trois composantes

   $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$, $z=h(u,v)$

Si ces fonctions utilisent des variables il faut d'abord donner des valeurs à ces variables.

4. Il faut déterminer les deux couleurs à donner aux différentes faces. Ces couleurs sont déterminées les quantités de rouge de vert et de bleu qu'elles contiennent. Cela se fait en donnant des valeurs (réels entre 0 et 255) aux variables *couleur1R* (le rouge), *couleur1*G (le vert) et *couleur1B* (le bleu) pour la première couleur et *couleur2R* (le rouge), *couleur2G* (le vert) et *couleur2B* (le bleu) pour la seconde.

Exemple

En fait dans le dossier « FonctionParam » le fichier « Figure » contient déjà un exemple : la représentation d'un cylindre.

Pour cela on a posé :

a =-2   b =2   c =0   d =2 PI   n =20   m= 40,

défini la fonction *F* par ses composantes

x = f(u, v) = r cos(v)   y = g(u, v) = r sin(v)   z = h(u, v) = u

et défini les couleurs par

couleur1R = 255   couleur1G = 0   couleur1B = 0   et

couleur2R = 255   couleur2G = 0   couleur2B = 0

En plus, comme nos fonctions utilisent une variable ***r*** (le rayon du cylindre) on a précédé la définition des fonctions par l'instruction : ***r = 2***.

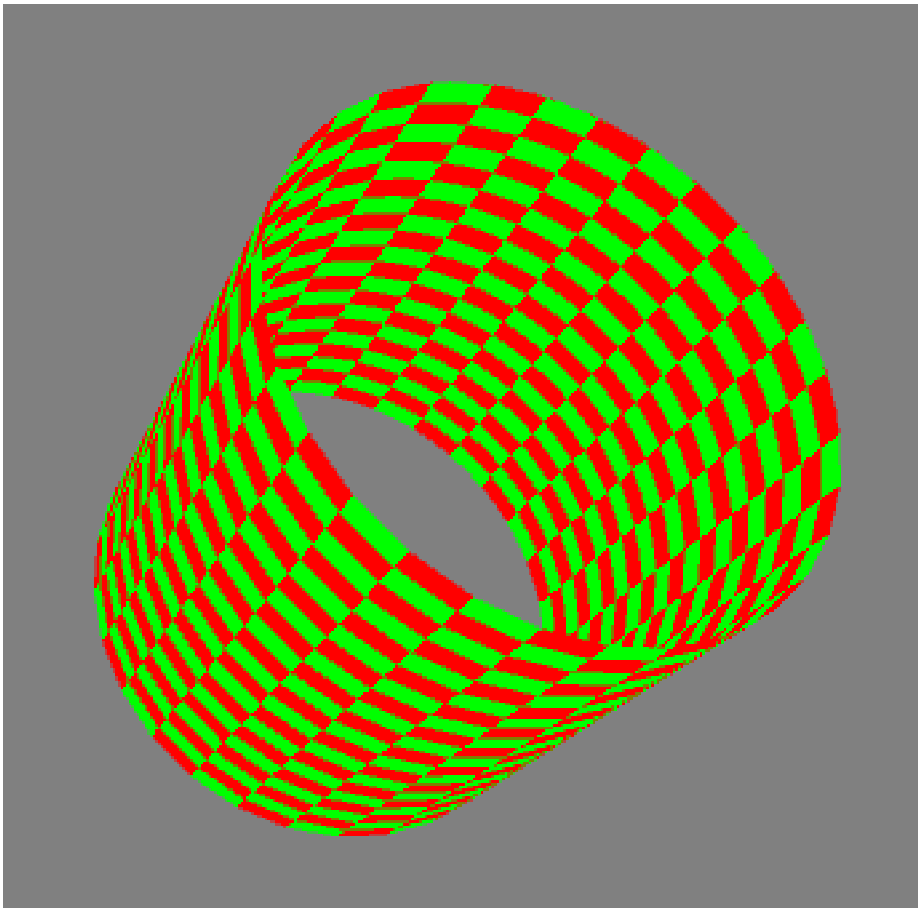
Ce qui donne dans le fichier :

```
/* VARIABLES GÉNÉRALES
** valeurs à déterminer par l'utilisateur
*/
float a = -2, b = 2; // intervalle u
float c = 0, d = 2*PI; // intervalle v
int n = 20, m = 40;// n=nombre de divisions de [a, b], m pour [c, d]
// Les couleurs
float couleur1R = 255;
float couleur1G = 0;
float couleur1B = 0;
float couleur2R = 0;
float couleur2G = 255;
```

```
float couleur2B = 0;


// Le rayon du cercle
float r = 2;


/* LES FONCTIONS COORDONNÉES :
** doivent toujours être présentes et leur contenu
** détermine la figure qui sera tracée.
*/
float f(float u, float v){
  return r*cos(v);
}


float g(float u, float v){
  return r*sin(v);
}


float h(float u, float v){
  return u;
}
```

C'est tout!

Le calcul des sommets et des faces est préprogrammé dans la procédure « definirFigure() » et lorsqu'on exécute SPAF on obtient le résultat suivant :



Pour programmer vos propres représentations graphiques de surfaces paramétriques le plus simple est le partir de la version contenue dans le dossier « Exemples/Graphes/FonctionsParam » et de modifier le fichier « Figure »

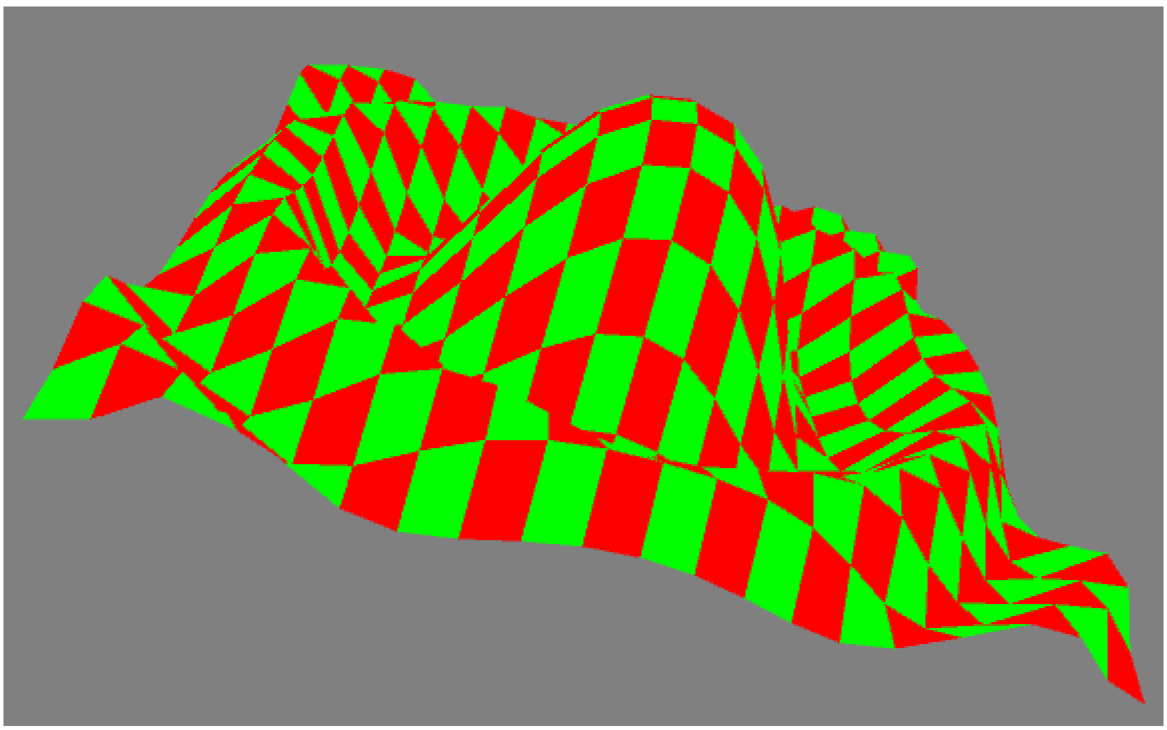
Cas particuliers

<u>Graphes de fonctions</u> $F:[a,b]\times[c,d]\rightarrow \mathbb{R}$

Dans ce cas on se ramène au cas des surfaces paramétriques en posant :

$f(u,v)=u \qquad g(u,v)=v \qquad h(u,v)=F(u,v)$.

Exemple : le graphe de la fonction $2\cdot\cos\frac{(2\cdot(u^2+v^2))}{1+u^2+v^2}$ (voir « Exemples/Graphes/Exemple6 »)



Pour obtenir vos propres graphes le plus simple est de « Exemple6 » et de modifier le fichier « Figure » selon vos besoins.

Surfaces de rotation

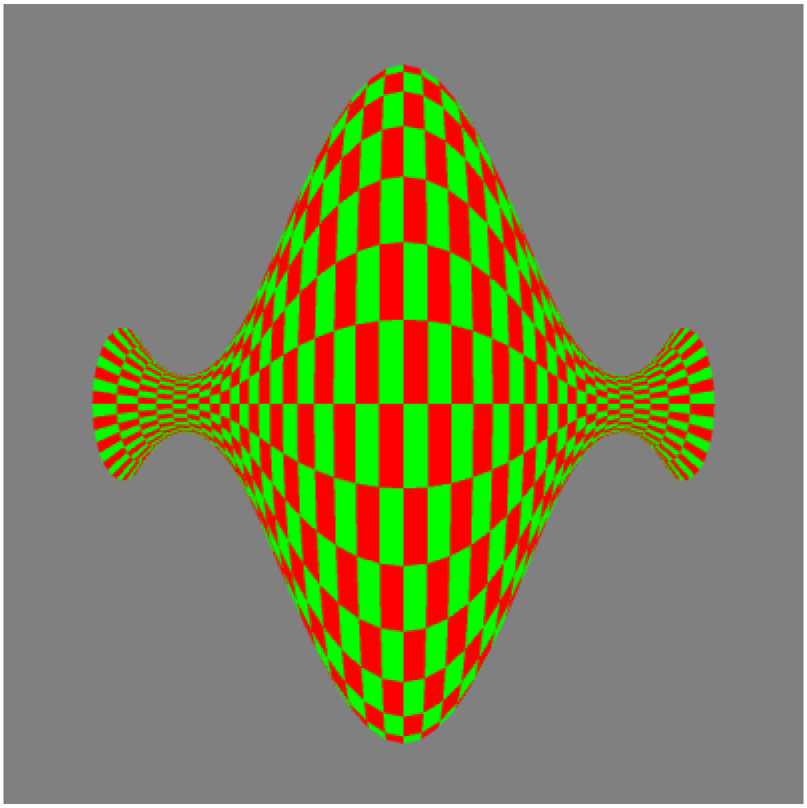
Pour représenter une surface de rotation, par exemple autour de l'axe des X, il faut une fonction

$p:[a,b] \to \mathbb{R}$ qui donne le profil de la surface et on prend alors :

$$D=[a,b]\times[0,2\,PI]$$

$$f(u,v)=u \qquad g(u,v)=p(u).\cos(v) \qquad h(u,v)=p(u).\sin(v)$$

Exemple : la surface de révolution, autour de l'axe des X, de profil $p(u)=1.2+\cos(2\cdot u)$ (voir « Exemples/Graphes/Exemple5 »)



Pour obtenir vos propres surfaces de rotation le plus simple est de partir de « Exemple5 » et de modifier le fichier « Figure » selon vos besoins.