Équations différentielles ordinaires, MAT3190

Vestislav Apostolov

UQAM, Session H-2024

Plan du cours

Consultez en tout temps

`http://www.cirget.uqam.ca/~apostolo/MAT3190.html`

Un système des équations différentielles ordinaires (EDO)

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue de $(1+nk)$-variables. Elle définie un système des ÉDO d'ordre k:

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)), \tag{1}$$

où $x = x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction k-fois continument dérivable, définie sur une intérvalle $I \subset \mathbb{R}$. [1]. Toute fonction $x(t)$ qui vérifie (1) s'appèle une solution de l'ÉDO. Une **condition initiale** pour (1) est la contrainte

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0',\ldots,\ x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)},\ t_0 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

où $(t_0, x_0, x_0', \ldots, x_0^{(k-1)})$ sont des réels donnés.

[1] Nous notons par $x^{(\ell)}(t)$ la ℓ-ème dérivée de $x(t)$

Motivation

Slogan : L'objet de ce cours est l'étude **qualitative** d'une équation différentielle ordinaire. Que peut-on dire de ses solutions lorsqu'on ne sait pas la résoudre explicitement (ce qui est la règle plutôt que l'exception) ?

Motivation/Exemples

Example (Les EDO de prédation)

Les équations de prédation de Lotka–Volterra sont un système des EDO non-linéaires du premier ordre, couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur ($b(t)$= #**brochets** dans un étang) et sa proie ($p(t)$ = # **percahudes**) interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1951 et Vito Volterra en 1962.

Motivation/Exemple

Example (Les EDO de prédation)

Figure: $b(t) = \#$ de brochets

Figure: $p(t) = \#$ de perchaudes

Motivation/Exemples

Example (Les EDO de prédation)

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = p(t)\left(\alpha - \beta b(t)\right), \\ \dot{b}(t) = b(t)\left(\delta p(t) - \gamma\right), \end{cases}$$

où:

- t est le temps $t \in [0, \infty)$;
- $\dot{b}(t) := \frac{d}{dt} b(t)$, $\dot{p}(t) := \frac{d}{dt} p(t)$ sont les variations de populations de brochets/perchaudes ;
- α taux de reproduction intrinsèque de proies;
- β taux de mortalité des proies causée par les prédateurs ;
- δ taux de reproduction de prédateurs (en fonction de proies mangées) ;
- γ taux de mortalité intrinsèque des prédateurs.

Motivation/Exemples

Par la théorie qualitative des EDO nous allons démontrer :

Théorème

- *si pour un temps $t = t_0$ on a*

$$b(t_0) = b_0 > 0, \qquad p(t_0) = p_0 > 0,$$

  alors il existe unique solution maximale $(b(t), p(t))$ qui est définie pour tout réel t et $b(t) > 0, p(t) > 0$;

- *la fonction*

$$\Phi(x_1, x_2) := \beta x_2 + \delta x_1 - \alpha \log x_2 - \gamma \log x_1$$

  est une intégrale première, c.-à. d. $\Phi(p(t), b(t)) = const.$

- *les solutions sont périodiques, et leur trajectoire est fermée et bornée*

Motivation/Exemple

Example (Les EDO de prédation)

La trajectoire de la solution de

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = p(t)\left(\alpha - \beta b(t)\right), \\ \dot{b}(t) = b(t)\left(\delta p(t) - \gamma\right), \\ p(t_0) = p_0, \qquad b(t_0) = b_0 \end{cases}$$

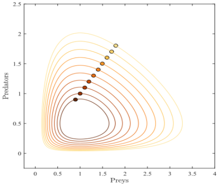

Figure: Trajectoires fermées = courbes de niveau de $\Phi(p,b) = \Phi(p_0,b_0)$.

Motivation/Exemples

Example (Modèle SIR)

Les équations de Kermick–McKendrick modélisent l'infection d'une population pendant une pandémie : soitent $S(t)$ la fraction de la population (en %) susceptible d'être infectée ; $I(t)$ la fraction de personnes infectées ; $R(t)$ la fraction de personnes rétablies où immunisées. Alors

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t), \\ \dot{R}(t) = \alpha I(t) \end{cases}$$

- $\frac{1}{\alpha} > 0 =$ nombre de jours (en moyen) qu'une personne infectée reste malade.
- $\beta > 0$ est la « taux d'incidence » $\sim \#$ contacts entre personnes saines et infectées et de la virulence de la maladie.

Motivation/Exemples

Example (Équation de Newton)

L'ÉDO

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t))$$

décrit le movement d'un point matériel sur la droite, soumis sous l'action d'un champ de force $F(x)$.

- $y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$ est la vélocité;
- $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \ddot{x}(t)$ est l'acceleration ;
- $m > 0$ est la masse, une constante réelle.

Motivation/Exemples

Par la théorie qualitative des EDO nous allons démontrer :

Théorème

- *Si* $U(x)$ *est une fonction primitive* [2] *de* $-F(x)$ *alors*

$$E(x,y) := \frac{my^2}{2} + U(x)$$

  est une intégrale première, c.à d. pour toute solution $x(t)$ *de l'équation de Newton et* $y(t) := \dot{x}(t)$, $E(x(t),y(t)) = const.$

- *Si* $U(x) > 0$, *alors il existe unique solution infiniment définie* $x(t)$ *de l'équation de Newton qui vérifie la condition initiale*

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = y_0.$$

- *Si de plus* $E(x,y)$ *est une fonction propre, alors les trajectoires* $(x(t),y(t))$ *sont des courbes périodiques fermées dans* $\mathbb{R}^2$.

---

[2] C.à d. $\frac{d}{dx}U(x) = -F(x)$

Réduction à l'ordre 1

Rappel

Un sytème EDO d'ordre un est définie par une fonction continue $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, *et s'écrit*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{3}$$

ou $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt} x(t)$.

Exemples

Les systèmes EDO de la prédation et le modèle SIR sont d'ordre 1; l'équation de Newton ne l'est pas.

Réduction à l'ordre 1

Soit $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ une solution k-fois continument dérivable du système EDO

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)), \tag{4}$$

qui vérifie la condition initiale

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)}. \tag{5}$$

Posons

$$y(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{k-1}(t)) : I \to (\mathbb{R}^n)^k$$
$$y_0(t) := x(t), y_1(t) := x'(t), \ldots,\ y_{k-1}(t) := x^{(k-1)}(t)$$

Réduction à l'ordre 1

Théorème 1

La fonction $y(t)$ est une solution (continument dérivable) du système d'ordre 1

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = y_1(t), \\ \vdots \\ \dot{y}_{k-2}(t) = y_{k-1}(t), \\ \dot{y}_{k-1}(t) = f(t, y_0(t), y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)) \end{cases} \tag{6}$$

qui vérifie la condition initiale

$$y_0(t_0) = x_0, y_1(t_0) = x_0', \dots, y_{k-1}(t_0) = x_0^{(k-1)}. \tag{7}$$

Réciproquement, toute solution $y(t) = (y_0(t), \dots, y_{k-1}(t))$ de (6)-(7) détermine une solution $x(t) := y_0(t)$ de (4)-(5).

Réduction à l'ordre 1

Example (L'ÉDO de Newton)

L'ÉDO de Newton

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = y_0,$$

est équivalent au système de Hamilton–Jacobi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) = \dfrac{\partial E}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right), \\ \dot{y}(t) = \ddot{x}(t) = F(x(t)) = -\dfrac{\partial E}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right), \\ x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ est l'énergie totale (cinétique + potentielle) du système mécanique.

Systèmes autonomes

Définition

Un sytème EDO est dit *autonome* si la fonction $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ ne dépende pas de la variable temps t, c.-à-d.

$$x^{(k)}(t) = f(x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)). \tag{8}$$

Exemples

Les trois exemples de systèmes (prédation, SIR et Newton) sont autonomes.

Réduction à un système autonome

Théorème 2

Le système non-autonome

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

est équivalent au système autonome pour $y(t) = (y_0(t), y_1(t)) : I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*:*

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = 1, \\ \dot{y}_1(t) = f(y_0(t), y_1(t)), \\ y_0(t_0) = t_0, \qquad y_1(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque

Le théorème 2 n'est que mathématiquement significatif.

Champs de vecteurs et courbes intégrales

Définition (Champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^N$)

Un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^N$ est une application

$$V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$

Example

$V(x, y) = (-y, x)$ est un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$, qui est infiniment différentiable.

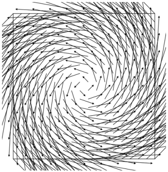

Figure: Le champ de vecteurs $V(x, y) = (-y, x)$

Champs de vecteurs et courbes intégrales

Définition (Une courbe intégrale)

Soit $V(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs, qui est une application continue. Une *courbe intégrale* $x = x(t)$ de $V(x)$ est une application $x(t) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^N$ de régularité $C^1(\alpha, \beta)$ (c.-à-d. continument dérivable sur l'interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$), qui est une solution du système autonome des EDO:

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), t \in (\alpha, \beta).$$

Champs de vecteurs et courbes intégrales

Example

Le courbes intégrales de $V(x, y) = (-y, x)$ sont données par

$$x(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t),\ y(t) = x_0 \sin(t) - y_0 \cos(t),\ t \in (-\infty, \infty).$$

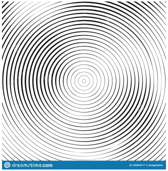

Figure: Les courbes intégrales de $V(x, y) = (-y, x)$

Conclusions

Conclusion

Les solutions d'un système EDO

$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)),$$

qui vérifient la condition initiale

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = x_0', \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_0^{(k-1)}$$

sont en correspondance bi-équivoque avec les courbes intégrales

$$\dot{x}(t) = V(x(t)) \tag{9}$$

d'un champs de vecteurs $V(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$*, qui vérifient la condition initiale de Cauchy:*

$$x(t_0) = x_0. \tag{10}$$

Exercices

Définition (Points d'équilibre)

Soit $V(x)$ un champ de vecteurs (continu) sur $\mathbb{R}^N$. Un point d'équilibre x_0 pour V est un point t.q. $V(x_0) = 0$.

Exercice 1

(a) Demontrer que si $x_0 \in \mathbb{R}^N$ est un point d'équilibre pour $V(x)$, alors la courbe stationnaire

$$x(t) = x_0, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

est une courbe intégrale de $V(x)$ qui vérifie la condition de Cauchy $x(t_0) = x_0$.

(b) Trouvez les points d'équilibre pour chacun des systèmes de prédation et SIR.

Exercices

Exercice 2

Considérons un système EDO d'ordre 1

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{11}$$

définie par une fonction $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *qui est* k*-fois continument dérivable sur l'ensemble de ses variables* $(t, x_1, \dots, x_n)$*. Supposons que* $x = x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ *est une solution continument dérivable de* (11)*.*
Démontrer que $x(t)$ *est forcement* $(k+1)$*-fois continument dérivable.*