Équations différentielles ordinaires, MAT3190
Exposé 2

Vestislav Apostolov

UQAM, Session H-2024

Rappels

Nous nous intéressons au problème suivant :

Problème Fondamental

Soit $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue de $(1 + nk)$-variables. Elle définie un système des ÉDO d'ordre k:

$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)), \tag{1}$$

où $y = y(t) : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction k-fois continument dérivable, définie sur une intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Toute fonction $y(t)$ qui vérifie (1) s'appèle **une solution** *de l'ÉDO. Nous voudrions étudier les solutions de (1) vérifiant la* **condition initiale**

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0', \ldots,\ y^{(k-1)}(t_0) = y_0^{(k-1)},\ t_0 \in I \tag{2}$$

où $(t_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(k-1)})$ sont des réels donnés.

Rappels

Le problème fundamental se réduit au problème suivant (système EDO d'ordre 1) :

Problème de Cauchy

Soit $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ *une application continue de* $(1+m)$*-variables. Le problème de Cauchy consiste à trouver les solutions* $x = x(t)$*, définies sur un intervalle* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$*, de l'EDO d'ordre* 1

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), & t &\in (\alpha, \beta), \\ x(t_0) &= x_0, & t_0 &\in (\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{3}$$

Rappels

Où encore au problème de Cauchy géométrique (système d'ordre 1 autonome) :

Problème de Cauchy géométrique

Soit $V(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champs de vecteurs continu sur $\mathbb{R}^N$. Trouver les courbes intégrales $x = x(t)$ de $V(x)$, définies sur un intervalle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, qui passent, au moment $t = t_0$, par le point $x_0 \in \mathbb{R}^N$, i.e. résoudre le problème de Cauchy autonome :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(x), \qquad & t \in (\alpha, \beta), \\ x(t_0) &= x_0, \qquad & t_0 \in (\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{4}$$

Trois résultats fondamentaux

Théorème 1 (Théorème de Cauchy–Peano–Arzela d'existence)
Soit $f(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où $t \in I \subset \mathbb{R}$ est et intervalle et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

possède au moins une solution $x(t)$, définie pour $t \in (\alpha, \beta) \subset I$, où (α, β) est un intervalle ouvert qui contient t_0.

Trois résultats fondamentaux

Définition (Unicité)

On dit que le problème de Cauchy associé à une fonction continue $f(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ possède *l'unicité de solutions* lorsque chaque deux solutions $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ du problème de Cauchy avec la même condition initiale en $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

coïncident sur leur domaine commun de definition

$$x(t) \equiv \tilde{x}(t), \qquad \forall t \in (\alpha, \beta) \cap (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \ni t_0.$$

Trois résultats fondamentaux

Théorème 2 (Théorème de Cauchy–Lipschitz d'unicité)

Soit $f(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1(I \times \Omega)$ [1]. *Alors, pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, *le problème de Cauchy possède l'unicité de solutions.*

Théorème 3 (Théorème de dépéndence continue)

Soit $f(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1(I \times \Omega)$ *et notons par* $\varphi(t; t_0, x_0) : J \times I_0 \times \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ *une fonction telle que pour tout* $(t_0, x_0) \in I_0 \times \Omega_0 \subset I \times \Omega$, *la fonction* $x(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$ *est l'unique solution du problème de Cauchy avec condition initiale en* (t_0, x_0). *Alors* $\varphi(t, t_0, x_0)$ *est continue par rapport à* $(t_0, x_0) \in I_0 \times \Omega_0$.

---

[1] C.-à.-d. $f(t,x)$ possède toutes ses dérivées partielles et elles sont des fonctions continues

Le problème de Cauchy en dimension 1

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Preuve du Théorème 1 (existence) pour $N = 1$.

Cas 1 : $V(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ solution (stationaire) de (5);
Cas 2 : $V(x_0) \neq 0$

$$\int_{t_0}^{t} 1 d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(\tau)}{V(x(\tau))} d\tau \overset{\text{pourquoi ?}}{=} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{V(\xi)}.$$

$\square$

Le problème de Cauchy en dimension 1

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Preuve du Théorème 1 (existence) pour $N = 1$.

Cas 1 : $V(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ solution (stationaire) de (5);
Cas 2 : $V(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\,(a, b) \ni x_0$ t.q. $V(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$.

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} 1 d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(\tau)}{V(x(\tau))} d\tau = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{V(\xi)}.$$

$\square$

Le problème de Cauchy en dimension 1

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Preuve du Théorème 1 (existence) pour $N = 1$.

Cas 1 : $V(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ solution (stationaire) de (5);
Cas 2 : $V(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\,(a, b) \ni x_0$ t.q. $V(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$.

$$t - t_0 = \Phi(x(t)), \qquad \Phi(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{V(\xi)}, \; x \in (a, b).$$

$\square$

Le problème de Cauchy en dimension 1

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Preuve du Théorème 1 (existence) pour $N = 1$.

Cas 1 : $V(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ solution (stationaire) de (5);
Cas 2 : $V(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\,[a, b] \ni x_0$ t.q. $V(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$.

$$\Phi^{-1}(t - t_0) \overset{\text{pourquoi ?}}{=} x(t), \;\; \Phi(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{V(\xi)}, \; x \in (a, b).$$

$\Rightarrow x(t)$ est solution définie pour $(t - t_0) \in (\alpha, \beta) := \Phi^{-1}(a, b)$. $\square$

Rappel: deux théorèmes de l'analyse

Théorème (Substitution sous l'intégrale)

Soient $x : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *une fonction dérivable dont la dérivée* $\dot{x}(\tau)$ *est continue sur* $[\alpha, \beta]$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f(x(\tau))\dot{x}(\tau)d\tau = \int_a^b f(\xi)d\xi.$$

Théorème (L'inversion d'une fonction strictement monotone)

Soit $\Phi(x)$ *une fonction continument dérivable sur* $[a, b]$ *et* $\Phi'(x) \neq 0$ *sur* $[a, b]$*. Alors* $\Phi(x)$ *est strictement monotone et* Φ^{-1} *est aussi dérivable. De plus, si* $y = \Phi(x)$*, alors*

$$(\Phi^{-1})'(y) = \frac{1}{\Phi'(x)}.$$

Le problème de Cauchy en dimension 1

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Si $V(x) \neq 0$ pour $x \in (a, b) \Rightarrow$ la solution est

$$\Phi^{-1}(t - t_0) = x(t),\ \ \Phi(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{V(\xi)},\ x \in (a, b).$$

Corollaire 1 (Unicité de solution)

Si $V(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors (5) possède l'unicité de solution.

Le problème de Cauchy en dimension 1

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Mais si $V(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}$? Prenons

$$V(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0(t) \equiv 0$ est une solution (stationnaire) de (5).
$\Rightarrow \forall c < 0$, $x_c(t) = \frac{1}{4}(c - t)^2$ si $t \leq c$ et $x_c(t) = 0$ si $t > c$ est une autre solution.

Le problème de Cauchy en dimension 1: conclusion

Considérons le problème de Cauchy autonome en $N = 1$ dimensions :

$$\dot{x}(t) = V(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où $V(x) \in C^0(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

Conclusion

Le problème de Cauchy en dimension $N = 1$ possède toujours une solution. De plus, il possède l'unicité de solution si $V(x)$ et continue mais ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Si $V(x)$ s'annule et n'est pas de régularité $C^1(\mathbb{R})$ (voir le Théorème 2), alors l'unicité de solution pourrait ne pas être satisfaite.

Le problème de Cauchy pour l'équation de Newton

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Newton :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\dfrac{dU}{dx}\left(x(t)\right), \\ x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \end{cases} \tag{6}$$

où $U(x)$ est l'énergie potentielle du système mécanique.
Admettons la validité des Théorèmes 1, 2, 3. Alors nous allons démontrer :

Corollaire 2 (Existence et unicité)

Si l'énergie potentielle $U(x)$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ qui est partout positive, alors (6) possède une solution $(x(t), y(t))$ infiniment définie sur la droite $\mathbb{R}$. De plus, (6) possède et l'unicité de solution.

Preuve du Corollaire 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\dfrac{dU}{dx}(x(t)), \\ x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \end{cases}$$

- Théorème 1 $\Rightarrow \exists$ solution $(x(t), y(t))$ définie pour $t \in (\alpha_0, \beta_0) \ni 0$.
- Théorème 2 $\Rightarrow \exists$ unique intervalle maximale $I_{max} = (\alpha, \beta)$ qui contient (α_0, β_0) et unique solution $(x(t), y(t))$ définie sur (α, β).
- soit $E_0 := E(x_0, y_0)$ où $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ est l'enérgie totale: $\Rightarrow E(x(t), y(t)) = E_0 > 0, \qquad t \in (\alpha, \beta)$.

Preuve du Corollaire 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\dfrac{dU}{dx}\left(x(t)\right), \\ x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \end{cases}$$

Lemme (Estimés a priori)

Si $(x(t), y(t))$ est une solution définie pour $|t| < T$, alors

$$|y(t)| < \sqrt{2E_0}, \qquad |x(t) - x_0| < \sqrt{2E_0}|t|.$$

Preuve du Lemme.

$E_0 = E(x(t), y(t)) = \frac{y^2(t)}{2} + U(x(t)) > \frac{y^2(t)}{2}$.

$\frac{|x(t)-x(0)|}{|t|} = |\dot{x}(\theta_0)| = |y(\theta_0)| < \sqrt{2E_0}$. $\square$

Preuve du Corollaire 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\dfrac{dU}{dx}\left(x(t)\right), \\ x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \end{cases}$$

$$|y(t)| < \sqrt{2E_0}, \qquad |x(t) - x_0| < \sqrt{2E_0}|t|.$$

Si $\alpha > -\infty$ $\exists$ une suite $(t_j)_j, \alpha < t_j < \beta$ t.q.

$$\lim_{j\to\infty} t_j = \alpha, \lim_{j\to\infty} x_j := x(t_j) = x_\alpha, \lim_{j\to\infty} y_j := y(t_j) = y_\alpha.$$

Preuve du Corollaire 2

Considérons

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -\dfrac{dU}{dx}(x(t)), \\ x(\alpha) = x_\alpha, \qquad y(\alpha) = y_\alpha, \end{cases}$$

- Théorème 2 et Théorème 3 $\Rightarrow \exists\ \varphi(t; \alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ continue en $(\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ qui donne la solution du problème de Cauchy.
- Par Théorème 2: $\varphi(t; t_j, x_j, y_j) \equiv \varphi(t; 0, x_0, y_0) = (x(t), y(t))$.
- Par Théorème 3:
  $(x(t), y(t)) = \lim_{j\to\infty} \varphi(t; t_j, x_j, y_j) = \varphi(t; \alpha, x_\alpha, y_\alpha)$
- $\Rightarrow (x(t), y(t))$ est prlongéable en arrière, contradiction avec la maximalité de $I_{max} = (\alpha, \beta)$.

Exercices

Exercice 1

Considérer les ÉDO de prédation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\left(\alpha - \beta y(t)\right), \\ \dot{y}(t) = y(t)\left(\delta x(t) - \gamma\right), \\ x(0) = x_0 > 0, \;\; y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \tag{7}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sont des constantes positives.*
En utilisant les théorèmes fondamentaux 1, 2 et 3, et les arguments développés pour le cas de l'EDO de Newton, démontrer que (7) possède une solution $(x(t), y(t))$ *infiniment définie sur la droite* $\mathbb{R}$.
Montrez qu'il existe des constantes $A, B > 0$ *t.q.* $0 < x(t) < A$ *et* $0 < y(t) < B \; \forall t$.