Équations différentielles ordinaires, MAT3190
Exposé 3

Vestislav Apostolov

UQAM, Cours en ligne, Session H-2024

Rappels

Nous nous intéressons au problème suivant :

Problème de Cauchy

Soit $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *une application continue de* $(1+n)$*-variables. Le problème de Cauchy consiste à trouver les solutions* $x = x(t)$*, définies sur un intervalle* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$*, de l'EDO d'ordre* 1

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \qquad & t \in (\alpha, \beta), \\ x(t_0) &= x_0, \qquad & t_0 \in (\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{1}$$

Rappels : Les trois résultats fondamentaux

Théorème 1 (Théorème de Cauchy–Peano–Arzela d'existence)
Soit $f(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où $t \in I \subset \mathbb{R}$ est et intervalle et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

possède au moins une solution $x(t)$, définie pour $t \in (\alpha, \beta) \subset I$, où (α, β) est un intervalle ouvert qui contient t_0.

Rappels : Trois résultats fondamentaux

Théorème 2 (Théorème de Cauchy–Lipschitz d'unicité)

Soit $f(t, x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1(I \times \Omega)$ [1]. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy possède l'unicité de solutions.

---

[1] C.-à.-d. $f(t, x)$ possède toutes ses dérivées partielles et elles sont des fonctions continues

Rappels : Trois résultats fondamentaux

Théorème 3 (Théorème de dépendence continue)

Soit $f(t,x) : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1(I \times \Omega)$ *et notons par* $\varphi(t; t_0, x_0) : J \times I_0 \times \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ *une fonction telle que pour tout* $(t_0, x_0) \in I_0 \times \Omega_0 \subset I \times \Omega$*, la fonction* $x(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$ *est l'unique solution du problème de Cauchy avec condition initiale en* (t_0, x_0)*. Alors* $\varphi(t; t_0, x_0)$ *est continue par rapport à* $(t_0, x_0) \in I_0 \times \Omega_0$*.*

La théorie des ÉDO linéaires autonomes

Nous considérons le problème de Cauchy autonome

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, et $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue.

$f(t, x) = Ax : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction linéaire en x, indépendante de t.

La théorie des ÉDO linéaires autonomes

Nous considérons le problème de Cauchy autonome

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, et $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue.
De manière équivalente, si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j(t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{nj} x_j(t), \end{cases}$$

avec la condition initiale

$$x_j(t_0) = x_j^0, \qquad j = 1, \ldots n.$$

Exemple: le pendule mathématique avec frottement

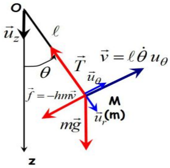

Figure: pendule

Pour petites oscillations ($\sin(\theta(t)) \sim \theta(t)$):

$$m\ell\ddot{\theta}(t) = -mg\theta(t) - hm\ell\dot{\theta}(t).$$

Exemple: le pendule mathématique avec frottement

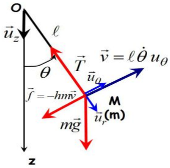

Figure: pendule

Pour petites oscillations ($\sin(\theta(t)) \sim \theta(t)$):

$$\ddot{\theta}(t) = -k\theta(t) - h\dot{\theta}(t), \qquad k = g/\ell, h > 0.$$

Exemple: le pendule mathématique avec frottement

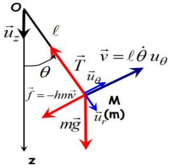

Figure: pendule

Pour petites oscillations ($\sin(\theta(t)) \sim \theta(t)$):

$$x_1(t) := \theta(t),\ x_2(t) := \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - hx_2 \end{cases}$$

Exemple: le pendule mathématique avec frottement

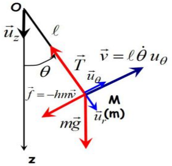

Figure: pendule

Pour petites oscillations ($\sin(\theta(t)) \sim \theta(t)$):

$$x_1(t) := \theta(t),\ \ x_2(t) := \dot{\theta}(t),\ \ x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$$

$$\dot{x} = Ax,\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}.$$

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle ($=$ matrice 1×1).
Un cas special de

$$\dot{x} = V(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

avec $V(x) = ax$ (voir exposé 2).

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle (= matrice 1×1).
La solution $x(t)$ vérifie

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{a\xi}$$

si $x_0 \neq 0$ et $x(t) \neq 0$.

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\, x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle ($=$ matrice 1×1).
La solution $x(t)$ vérifie

$$a(t - t_0) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi}$$

si $x_0 \neq 0$ et $x(t) \neq 0$.

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle ($=$ matrice 1×1).
La solution $x(t)$ vérifie

$$e^{a(t-t_0)} = e^{\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi}} = e^{\log(x(t)) - \log x_0} = \frac{x(t)}{x_0}$$

si $x_0 \neq 0$ et $x(t) \neq 0$.

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle (= matrice 1×1).
La solution $x(t)$ vérifie

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0,$$

si $x_0 \neq 0$ et $x(t) \neq 0$.

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\, x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle (= matrice 1×1).
La solution $x(t)$ vérifie

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0,$$

si $x_0 \neq 0$ ($\Rightarrow x(t) \neq 0$).

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle (= matrice 1×1).

Lemme

Toute solution $x(t)$ vérifie

$$\frac{d}{dt}\left(e^{a(t_0-t)}x(t)\right) = 0.$$

Conclusion : La solution est unique et est donnée par

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0.$$

Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle ($=$ matrice 1×1).
Conclusion : La fonction

$$\varphi(t; t_0, x_0) := e^{a(t-t_0)}x_0$$

génère toutes les solutions !

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Rappel (Analyse I)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$e^a = 1 + a + \dots \frac{a^k}{k!} + \dots$$

$$e^a = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{a}{k}\right)^k .$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Rappel (Analyse I)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = (e^{a(t-t_0)})x_0 = \left(1 + a(t-t_0) + \ldots \frac{a^k(t-t_0)^k}{k!} + \ldots\right) x_0$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 = \lim_{k\to\infty}\left(I + \frac{a(t-t_0)}{k}\right)^k x_0.$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Approche :

- Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 :\overset{?}{=} \left(I + A(t-t_0) + \dots \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!} + \dots \right) x_0$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 :\overset{?}{=} \lim_{k\to\infty} \left(I + \frac{A(t-t_0)}{k} \right)^k x_0.$$

- Vérifier que $x(t) := \left(e^{A(t-t_0)}\right) x_0$ est la solution.
- Démontrer l'unicité de solutions.

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Définition (Norme d'un opérateur)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ($A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ application linéaire).

$$||A|| := \sup_{x\neq 0} \frac{||A(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||A(x)||,$$

où $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Exercice 1 (Norme d'un opérateur)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ($A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ application linéaire). Démontrer que

- *si $A \neq 0$ alors $0 < ||A|| < \infty$ et $||A|| = |\lambda|||A||$.*
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
- $||AB|| \leq ||A||||B||$.
- *Si A est symétrique ($A^T = A$), démontrer que $||A|| = \max|\lambda_i|$ ou λ_i sont les valeurs propres de A.*
- $\max_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2\right) \leq ||A||^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$.

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Définition (L'espace métrique d'opérateurs)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$d(A, B) := ||A - B||,$$

est une distance, i.e.

$$d(A, B) = d(B, A) \geq 0 \qquad d(A, B) = 0 \text{ ssi } A = B$$
$$d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Définition (Covnergence)

Soit $A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une suite de matrices, et $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On dit que

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A$$

ssi

$$\lim_{k\to\infty} d(A_k, A) = 0.$$

Exercice 2

Démontrer que une suite de matrices $A_k = (a_{ij}(k))$ converge vers $A = (a_{ij})$ ssi pour tout i, j:

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}(k) = a_{ij}.$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Définition (Complétude)

Soit M un ensemble muni d'une distance d. On dit que une suite $(m_k)_k \in M$ converge vers m ssi $\lim_{k\to\infty} d(m_k, m) = 0$. On dit qu'une suite m_k est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, N_\epsilon \in \mathbb{N} \; : \; d(m_p, m_q) < \epsilon \, \forall \, p, q \geq N_\epsilon .$$

On dit que (M, d) est *complet* si toute suite de Cauchy converge.

Exercice 3

Démontrer que toute suite $(m_k)_k$ qui converge vers m est une suite de Cauchy.

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Théorème (Complétude de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$)

L'espace métrique $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), d)$ est complet.

Preuve.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, considérons la suite $y_k := A_k(x) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\epsilon > 0$ et N_ϵ t.q. $d(A_p, A_q) < \epsilon \,\forall\, p, q > N_\epsilon$.

$$\begin{aligned} ||y_p - y_q|| &= ||A_p(x) - A_q(x)|| = ||(A_p - A_q)(x)|| \\ &\leq ||A_p - A_q||\,||x|| = d(A_p, A_q)||x|| < \epsilon||x||. \end{aligned}$$

$\Rightarrow (y_k)_k$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$ est complet $\Rightarrow \exists\, y := \lim_{k\to\infty} A_k(x)$
$A(x) := y = \lim_{k\to\infty} A_k(x)$
$A(x_1 + x_2) = \lim_{k\to\infty} A_k(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$.
$d(A_p, A) = ||A_p - A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||y_p - y||}{||x||} \leq \epsilon$ si $p \geq \mathbb{N}_\epsilon$. $\square$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Théorème (Weierstrass, convergence absolue)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *(*$A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}$*) une série formelle, telle que la série numérique*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k||$$

converge. Alors $\lim_{k\to\infty}(A_0 + \cdots + A_k)$ *exists.*

Example

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ vérifie l'hypothèse plus haute.

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{||A||^k}{k!} = \frac{a^k}{k!}.$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Théorème (Weierstrass, convergence absolue)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ ($A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}$) une série formelle, telle que la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k||$$

converge. Alors $\lim_{k\to\infty}(A_0 + \cdots + A_k)$ exists.

Corollaire

Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge et

$$e^A := \lim_{k\to\infty}\left(I + A + \cdots + \frac{A^k}{k!}\right).$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Théorème (Weierstrass, convergence absolue)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ ($A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}$) une série formelle, telle que la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k||$$

converge. Alors $\lim_{k\to\infty} (A_0 + \cdots + A_k)$ exists.

Preuve du Théorème de Weierstrass.

Vérifions que $S_k := (A_0 + \cdots + A_k)$ est une suite de Cauchy:
Notons $s_k := \sum_{i=0}^{k} ||A_k||$, $\lim_{k\to\infty} s_k = s$

$$||S_p - S_q|| = ||A_{p+1} + \cdots + A_q|| \leq ||A_{p+1}|| + \cdots + ||A_q|| = |s_p - s_q|.$$

Comme $(s_k)_k$ converge elle est de Cauchy $\Rightarrow$ S_k est de Cauchy. $\square$