Équations différentielles ordinaires, MAT3190
Exposé 4

Vestislav Apostolov

UQAM, Cours en ligne, Session H-2024

Rappels: La théorie des ÉDO linéaires autonomes

Nous considérons le problème de Cauchy autonome

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, et $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue.
De manière équivalente, si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j(t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{nj}x_j(t), \end{cases}$$

avec la condition initiale

$$x_j(t_0) = x_j^0, \qquad j = 1, \ldots n.$$

Rappel: Le cas $n = 1$

Nous considérons le problème de Cauchy autonome pour une seule fonction $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

où a est une constante réelle ($=$ matrice 1×1).
Conclusion : La solution est unique et est donnée par la formule

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0.$$

Rappel: Le cas $n > 1$

Approche :

- Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$e^{A(t-t_0)} \overset{?}{:=} I + A(t-t_0) + \ldots \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!} + \ldots$$

$$e^{A(t-t_0)} \overset{?}{:=} \lim_{k\to\infty} \left(I + \frac{A(t-t_0)}{k} \right)^k .$$

- Vérifier que $x(t) := \left(e^{A(t-t_0)}\right) x_0$ est la solution.
- Démontrer l'unicité de solutions.

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Théorème (Weierstrass, convergence absolue)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *(*$A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}$*) une série formelle, telle que la série numérique*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k||$$

converge. Alors $\lim_{k\to\infty} (A_0 + \cdots + A_k)$ *exists.*

Example

La série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ vérifie l'hypothèse plus haute.

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{||A||^k}{k!} = \frac{a^k}{k!}.$$

Le cas $n > 1$: exponentielle de matrices

Théorème (Weierstrass, convergence absolue)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ ($A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}$) une série formelle, telle que la série numérique

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k||$$

converge. Alors $\lim_{k\to\infty}(A_0 + \cdots + A_k)$ exists.

Corollaire

Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge et

$$e^A := \lim_{k\to\infty}\left(I + A + \cdots + \frac{A^k}{k!}\right).$$

La fonction exponentielle de matrices

Nous nous intéressons à l'application

$$\exp(A) := e^A$$

qui va de $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), d)$ dans $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), d)$.
Comme $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, on peut parler de continuité et de dérivabilité de exp, voir Analyse II. En particulier, nous allons démontrer

Théorème 1

Pour toute matrice A, la fonction

$$f(t) = e^{tA} : \mathbb{R} \to (\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), d)$$

est continue, dérivable, et sa dérivé est donnée par

$$\frac{df}{dt}(t_0) = Af(t_0) = f(t_0)A.$$

Démonstration du Théorème 1

Rappel (Analyse 2)

Pour deux fonctions continues $f(t), g(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *posons*

$$||f||_{C^0} := \sup_{[a,b]} |f(t)|, \qquad d(f, g) := ||f - g||_{C^0}.$$

Soit $(f_k(t))_k \in C^0[a, b]$ *une suite de fonctions continues. On dit que* $f_k(t)$ *converge uniformément vers* $f(t) \in C^0[a, b]$ *ssi*

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0.$$

Théorème (Critère de Weierstrass)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ *une série de fonctions continues* $f_k(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Supposons que la série numérique* $\sum_{k=0}^{\infty} ||f_i||_{C^0}$ *converge. Alors il existe* $f(t) \in C^0[a, b]$ *telle que* $s_k(t) := \sum_{i=0}^{k} f_i(t)$ *converge uniformément vers* $f(t)$.

Démonstration du Théorème 1

Généralisation

$f(t), g(t) : [a, b] \overset{C^0}{\to} (\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), ||\cdot||)$ *posons*

$$||f||_{C^0} := \sup_{[a,b]} ||f(t)||, \qquad d(f, g) := ||f - g||_{C^0}.$$

Soit $(f_k(t))_k : [a, b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une suite d'applications continues. On dit que* $f_k(t)$ *converge uniformement vers* $f(t)$ *ssi*

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0.$$

Théorème (Critère de Weierstrass)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ *une série avec* $f_k(t) : [a, b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*. Supposons que la série numérique* $\sum_{k=0}^{\infty} ||f_i||_{C^0}$ *converge. Alors il existe* $f(t) : [a, b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *telle que* $s_k(t) := \sum_{i=0}^{k} f_i(t)$ *converge uniformement vers* $f(t)$*.*

Démonstration du Théorème 1

Théorème (Critère de Weierstrass)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ une série avec $f_k(t) : [a,b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supposons que la série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} ||f_i||_{C^0}$ converge. Alors il existe $f(t) : [a,b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $s_k(t) := \sum_{i=0}^{k} f_i(t)$ converge uniformement vers $f(t)$.

Cas particulier : $f_k(t) := \frac{A^k t^k}{k!} : [-T,T] \overset{C^0}{\to} (\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), ||\cdot||)$.

$$\left\| \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{||A||^k}{k!} |t|^k \leq \frac{(||A||T)^k}{k!}$$

$\Rightarrow f(t) = e^{tA}$ est continue sur $[-T,T]$.

Démonstration du Théorème 1

Définition

Soit $f(t) : [a, b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On dit que $f(t)$ est dérivable en t_0 avec dérivée $f'(t_0) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ si

$$\lim_{t\to t_0} \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right) = f'(t_0)$$

Théorème (Dérivation de série)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ une série avec $f_k(t) : [a, b] \overset{C^1}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supposons que la série converge vers $f(t)$ et que la série $f_k'(t)$ converge uniformement vers $g(t) : [a, b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors $f(t) : [a, b] \overset{C^0}{\to} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dérivable et $f'(t) = g(t)$.

Démonstration du Théorème 1

Théorème (Dérivation de série)

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ une série avec $f_k(t) : [a,b] \xrightarrow{C^1} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supposons que la série converge vers $f(t)$ et que la série $f_k'(t)$ converge uniformément vers $g(t) : [a,b] \xrightarrow{C^0} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors $f(t) : [a,b] \xrightarrow{C^0} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dérivable et $f'(t) = g(t)$.

Cas particulier : $f_k(t) := \frac{A^k t^k}{k!} : [-T, T] \xrightarrow{C^0} (\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), ||\cdot||)$.
$f_k'(t) = A\left(\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \left(\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right)A$
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(t)$ converge uniformément vers $Ae^{tA} = Ae^{tA}$;
$\Rightarrow f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ sur $[-T, T]$.
Conclusion : $t \to e^{tA}$ est dérivable et $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

La fonction exponentielle de matrices

Lemme

(a) Pour toute matrice inversible P, $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$;
(b) Lorsque $AB = BA$, $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.
(c) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

Preuve du Lemme.

La première relation résulte du fait que $(PAP^{-1})^i = PA^i P^{-1}$ et donc

$$P\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!}\right) P^{-1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(PAP^{-1})^i}{i!}.$$

Pour le calcul de e^{A+B}, lorsque $AB = BA$, on utilise la formule du binôme et la convergence absolue de la série pour la sommations par paquets. □

Le théorème fondamental des systèmes linéaires autonomes

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Le problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

possède unique solutions maximale, donnée par la formule $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

Preuve du Théorème 2.

$x(t)$ est une solution car $x(t_0) = e^0 x_0 = x_0$ et

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t-t_0)}x_0\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{At}e^{(-At_0)}x_0\right) = \left(Ae^{At}\right)e^{-At_0}x_0 = Ax(t).$$

La solution est unique car pour toute solution (Théorème 1)

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}x(t)\right) = -\left(e^{-tA}A\right)x(t) + e^{-tA}\left(Ax(t)\right) = 0.$$

Le pendule mathématique avec frottement

Les petites oscillations du pendule sont décrites par le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - hx_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0 \ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}.$$

La solution est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

L'exponentielle d'une matrice 2×2

Théorème (Théorème de Jordan, voir ALII)

Pour toute matrice 2×2 à coefficients réels A, il existe une matrice P inversible, telle qu'on aura une de trois possibilités:

- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: J_1$ *(cas de deux valeurs propres réelles et distinctes où $A = \lambda I$)*
- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =: J_2$ *(cas d'une valeur propre multiple et $A \neq \lambda I$)*
- $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} =: J_3$ *(cas de deux valeurs propres complexes conjuguées).*

L'exponentielle d'une matrice 2×2

Par les propriétés de l'exponentielle $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}(e^A)P$:

$$e^{tA} = Pe^{tJ_i}P^{-1}.$$

Cas 1: $J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{tJ_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k J_1^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_2^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'exponentielle d'une matrice 2×2

Par les propriétés de l'exponentielle $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}(e^A)P$:

$$e^{tA} = Pe^{tJ_i}P^{-1}.$$

Cas 2: $J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$, $DN = ND$, $N^2 = 0$.

$$\begin{aligned} e^{tJ_2} &= e^{tD+tN} = e^{tD}e^{tN} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \left(I + \frac{tN}{1!} + 0 + \cdots + 0 \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'exponentielle d'une matrice 2×2

Par les propriétés de l'exponentielle $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}(e^A)P$:

$$e^{tA} = Pe^{tJ_i}P^{-1}.$$

Cas 3: $J_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; valeurs propres $(\alpha + \sqrt{-1}\beta)$ et $(\alpha - \sqrt{-1}\beta)$.

si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \longleftrightarrow \alpha + \sqrt{-1}\beta$ alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^2 \longleftrightarrow (\alpha + \sqrt{-1}\beta)^2$

$$\begin{aligned} e^{tJ_3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^k \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t(\alpha + \sqrt{-1}\beta)^k}{k!} \\ &= e^{t(\alpha+\sqrt{-1}\beta)} = e^{t\alpha}(\cos t\beta + \sqrt{-1}\sin t\beta) \longleftrightarrow \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\alpha}\cos t\beta & e^{t\alpha}\sin t\beta \\ -e^{t\alpha}\sin t\beta & e^{t\alpha}\cos t\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le cas du pendule

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}, \qquad x(t) = e^{tA}x_0.$$

Polynôme charactéristique :

$$P_A(t) = \det(A - tI) = t^2 + ht + k, \qquad D = h^2 - 4k.$$

Cas 1: $D > 0$ ($k < h^2/4$), A a deux valeurs propres distinctes négatives $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

$$x(t) = e^{At}x_0 = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

$$\theta(t) = x_1(t) = p_0 e^{t\lambda_1} + q_0 e^{t\lambda_2}.$$

Le cas du pendule

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}, \qquad x(t) = e^{tA}x_0.$$

Polynôme caractéristique :

$$P_A(t) = \det(A - tI) = t^2 + ht + k, \qquad D = h^2 - 4k.$$

Cas 2: $D = 0$ $(k = h^2/4)$, A a une valeur propre multiple $\lambda = -\frac{h}{2} < 0$.

$$x(t) = e^{At}x_0 = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

$$\theta(t) = x_1(t) = (p_0 t + q_0)e^{t\lambda}.$$

Le cas du pendule

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}, \qquad x(t) = e^{tA}x_0.$$

Polynôme charactéristique :

$$P_A(t) = \det(A - tI) = t^2 + ht + k, \qquad D = h^2 - 4k.$$

Cas 3: $D < 0$ $(k > h^2/4)$, A a deux valeurs propres complexes $(\alpha \pm \sqrt{-1}\beta)$ ($\alpha = -\frac{h}{2}$ pourquoi ?).

$$x(t) = e^{At}x_0 = P \begin{pmatrix} e^{t\alpha}\cos t\beta & e^{t\alpha}\sin t\beta \\ -e^{t\alpha}\sin t\beta & e^{t\alpha}\cos t\beta \end{pmatrix} P^{-1}x_0.$$

$$\theta(t) = x_1(t) = e^{t\alpha}(p_0\cos t\beta + q_0\sin t\beta).$$

Le cas du pendule

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}, \qquad x(t) = e^{tA} x_0.$$

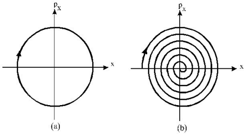

Figure: Cas 3 ($h < 2\sqrt{k}$): $h = 0$ and $h > 0$