Équations différentielles ordinaires, MAT3190
Exposé 6

Vestislav Apostolov

UQAM, Session H-2024

Rappels: La théorie des ÉDO linéaires autonomes

Considérons le problème de Cauchy autonome

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, et $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue.

Rappels: La théorie des ÉDO linéaires autonomes

Considérons le problème de Cauchy autonome

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, et $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue.

Théorème (Théorème fondamental de systèmes linéaires autonomes)

Pour toute matrice A, la fonction

$$x(t) := e^{A(t-t_0)}x_0$$

est une solution globale de (1). *De plus, tout autre solution est obtenue par restriction de $x(t)$.*

Systèmes linéaires non-homogènes à coefficients constants

Considérons le problem de Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \qquad x(t_0) = x_0, t_0 \in (a, b) \tag{2}$$

où $f(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Corollaire 1 (Résolution de (2))

La fonction définie pour $t \in J$ par

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds$$

est une solution de (2)*, définie sur l'intervalle* (a, b)*. De plus, toute autre solution est obtenue par restriction de* $x(t)$*.*

Systèmes linéaires non-homogènes à coefficients constants

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ x(t_0) = x_0, t_0 \in (a, b) \qquad (*)$$

Démonstration du Corollaire 1.

- $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$ est une solution de $(*)$:
- Unicité:

$\square$

Exercices

Pour chacun des systèmes linéaires

$$\dot{x} = Ax,$$

nous allons trouver la solution générale $\varphi(t, t_0, x_0) := e^{A(t-t_0)}x_0$ en calculant e^{tA}:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.