Équations différentielles ordinaires, MAT3190
Exposés 7-8

Vestislav Apostolov

UQAM, Session H-2024

Le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et unicité

Soit $f : J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue ($J \subset \mathbb{R}$ étant un intervalle et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domain).

Considérons le problème de Cauchy général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,\ (t_0, x_0) \in J \times \Omega. \tag{1}$$

Définition (La condition de Lipschitz)

Soit $(t_*, x_*) \in J \times \Omega$ et
$C_* = C(t_*, x_*) := [t_* - a, t_* + a] \times \overline{B(x_*, R)} \subset J \times \Omega$ un cylindre fermé centré en (t_*, x_*). On dit que $f(t, x)$ est λ-*lipschitzienne* par rapport à la variable d'espace (seconde variable) si pour tout $(t, x_1), (t, x_2) \in C_*$,

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)||_{\mathbb{R}^n} \leq \lambda ||x_1 - x_2||_{\mathbb{R}^n}. \qquad (*)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et unicité

Définition (La condition de Lipschitz locale)

On dit que $f(t,x)$ est *localement lipschitzienne* par rapport à la variable d'espace (seconde variable) si pour tout $(t_*, x_*) \in J \times \Omega$, il existe un cylindre C_* centré en (t_*, x_*) et une constante $\lambda = \lambda(C_*)$, tels que f est λ-lipschtzienne sur C_*.

Example (l'exemple fondamental)

Toute fonction continument dérivable ($f \in C^1(J \times \Omega)$) est localement lipschitzienne.

Par le théorème des accroissements finis sur C_* (un compact):

$$f(t,x_1) - f(t,x_2) = (\nabla_x f)(t,x') \cdot (x_1 - x_2), \qquad (t,x') \in C_*.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et unicité

Soit $f : J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue ($J \subset \mathbb{R}$ étant un intervalle et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domain).

Considérons le problème de Cauchy général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,\ (t_0, x_0) \in J \times \Omega, \qquad (1).$$

Théorème 1 (Cauchy–Lipschitz)

Supposons que $f(t, x)$ vérifie la condition de Lipschitz locale sur $J \times \Omega$ (par exemple $f \in C^1(J \times \Omega)$). Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$:

- *Il existe unique solution de (1) définie sur un intervalle $I = I(t_0, x_0) \subset J$;*
- *Il existe unique solution maximale de (1), définie sur $I_{\max}(t_0, x_0)$;*
- *Toute solution de (1) est obtenue par restriction de la solution maximale.*

Outil principal: le théorème de Picard des applications contractantes

Rappel (Espace métrique complet)

Soit (M, d) *un espace métrique, c.-à.-d. un ensemble muni d'une distance* d*:*

$$
\begin{aligned}
&d(m_1, m_2) = d(m_2, m_1) \geq 0, \;\; d(m_1, m_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \\
&d(m_1, m_3) + d(m_3, m_2) \geq d(m_1, m_2).
\end{aligned}
$$

(M, d) *est complet si toute suite de Cauchy est convergete, i.e. pour toute suite* $(m_k)_k$ *telle que*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} \;\; : \;\; d(m_p, m_q) < \varepsilon \, \forall p, q \geq N$$

il existe $m_0 \in M$ *tel que* $\lim_{k \to \infty} d(m_k, m_0) = 0.$

Outil principal: le théorème de Picard des applications contractantes

Exemples (Espaces métriques complets, voir Analyse I et II)

- $M = \mathbb{R}$, $d(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$;
- $M = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum_{t=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$;
- $M = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $d(A, B) = \sup_{||x||=1} ||(A - B)(x)||$;
- $M = C^0[a, b]$, $d(f, g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$.

Outil principal: le théorème de Picard des applications contractantes

Définition (Application contractante)

Soit (M, d) un espace métrique. Une application $T : M \to M$ est dite *contractante* s'il existe une constante $\lambda \in (0, 1)$ t.q.

$$d(T(m_1), T(m_2)) \leq \lambda d(m_1, m_2).$$

Exercice 1

Vérifier que toute contraction est continue.

Théorème (Picard)

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une contraction. Alors il existe unique $m_0 \in M$ telle que

$$T(m_0) = m_0.$$

Outil principal: le théorème de Picard des applications contractantes

Théorème (Picard)

Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une contraction. Alors il existe unique $m_0 \in M$ telle que

$$T(m_0) = m_0.$$

Preuve du Théorème de Picard.

Soit $m^* \in M$ quelconque et posons $m_k^* := T^k(m^*)$.

$$\begin{aligned} d(m_p^*, m_q^*) &= d(T^p(m^*), T^q(m^*) \leq \lambda^q d(T^{p-q}(m^*), m^*) \\ &\leq \lambda^q(\lambda^{p-q-1} + \cdots + 1) d(T(m^*), m^*) \\ &\leq |s_{p-1} - s_{q-1}| d(T(m^*), m^*), \qquad s_k = 1 + \cdots + \lambda^k. \end{aligned}$$

$\Rightarrow (m_k^*)_k$ une suite de Cauchy.

Outil principal: le théorème de Picard des applications contractantes

Preuve du Théorème de Picard.

Soit $m^* \in M$ quelconque et posons $m_k^* := T^k(m^*)$.

- $(m_k^*)_k$ une suite de Cauchy $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} T^k(m_*) =: m_0 = \lim_{k\to\infty} T^{k+1}(m^*);$$

- $m_0 = \lim_{k\to\infty} T^{k+1}(m^*) = \lim_{k\to\infty} T(m_k^*) = T(m_0)$. ($T$ est continue);
- si $T(m_1) = m_1$ et $T(m_2) = m_2 \Rightarrow$ $d(T(m_1), T(m_2)) = d(m_1, m_2) \leq \lambda d(m_1, m_2) \Rightarrow$ $d(m_1, m_2) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_0$.

$\square$

L'idée de démonstration du Théorème 1

Soit $C = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq \varepsilon,\ ||x - x_0|| \leq R\} \subset M$ un cylindre centré en (t_0, x_0). Nous allons démontrer:

- $M = \{x(t) : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \xrightarrow{C^0} \overline{B(x_0, R)}\}$ muni da la distance

$$d(x(t), y(t)) := \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} ||x(t) - y(t)||_{\mathbb{R}^n}$$

  est un espace métrique complet;
- Pour un choix convenable de $C \subset J \times \Omega$, l'application

$$T(x(t)) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

  est une contraction de M;
- Le point fixe $x(t)$ de T vérifie $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

Démonstration du Théorème 1

Lemme 1

Soit $C = \{(t,x) \,|\, |t - t_0| \leq \varepsilon, \; ||x - x_0|| \leq R\} \subset M$ un cylindre centré en (t_0, x_0). Alors $M = \{x(t) : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \xrightarrow{C^0} \overline{B(x_0, R)}\}$ muni da la distance

$$d(x(t), y(t)) := \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} ||x(t) - y(t)||_{\mathbb{R}^n}$$

est un espace métrique complet.

Preuve du Lemme 1.

Rappel (Analyse II, convergence uniforme)

L'espace $M = \{x(t) : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}\}$ *munie de la distance* $d(x(t), y(t)) = \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |x(t) - y(t)|$ *est complet.*

Démonstration du Théorème 1

Lemme 1

Soit $C = \{(t,x) \,|\, |t - t_0| \leq \varepsilon,\, ||x - x_0|| \leq R\} \subset M$ un cylindre centré en (t_0, x_0). Alors $M = \{x(t) : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \xrightarrow{C^0} \overline{B(x_0, R)}\}$ muni da la distance

$$d(x(t), y(t)) := \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} ||x(t) - y(t)||_{\mathbb{R}^n}$$

est un espace métrique complet.

Preuve du Lemme 1.

Généralisation (Analyse II, convergence uniforme)

L'espace $M = \{x(t) : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \xrightarrow{C^0} (N, d_N)\}$ *munie de la distance* $d(x(t), y(t)) = \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} d_N(x(t), y(t))$ *est complet si* (N, d_N) *est complet.*

$\mathbb{R}^n$ est complet; $\overline{B(x_0, R)} \subset \mathbb{R}^n$ est complet (car fermé). $\square$

Démonstration du Théorème 1

Définition (Cylindre de sécurité pour f)

Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$. On dit qu'un cylindre centré en (t_0, x_0)

$$C = \{(t,x) \,|\, |t - t_0| \leq \varepsilon, ||x - x_0|| \leq R\} \subset J \times \Omega$$

est de *sécurité* lorsque $\varepsilon \leq \frac{R}{\mu}$ où $\mu = \sup_C ||f||$.

Exercice 2

Démontrer que pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ il existe un cylindre de sécurité pour f, centré en (t_0, x_0).

Lemme 2

Soit $C = \{(t,x) \,|\, |t - t_0| \leq \varepsilon, \; ||x - x_0|| \leq R\} \subset M$ un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0). Alors $T : M \to M$, où $T(x(t)) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau$.

Démonstration du Théorème 1

Définition (Cylindre de sécurité pour f)

Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$. On dit qu'un cylindre centré en (t_0, x_0)

$$C = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq \varepsilon, ||x - x_0|| \leq R\} \subset J \times \Omega$$

est de *sécurité* lorsque $\varepsilon \leq \frac{R}{\mu}$ où $\mu = \sup_C ||f||$.

Preuve du Lemme 2.

Soit $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \overline{B(x_0, R)}$ continue.

$$||T(x(t)) - x_0|| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(\tau, x(\tau))|| d\tau$$
$$\leq \mu |t - t_0| \leq \mu \varepsilon \leq R.$$

Démonstration du Théorème 1

Lemme 3

Soit $C = \{(t,x) \,|\, |t-t_0| \leq \varepsilon,\ ||x-x_0|| \leq R\} \subset M$ un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0) et supposons que $f(t,x)$ est λ-lipschitzienne sur C. Alors

$$d_M(T(x(t)), T(y(t))) \leq (\lambda\varepsilon) d_M(x(t), y(t)).$$

Preuve du Lemme 3.

$$\begin{aligned}
||T(x(t)) - T(y(t))|| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)] d\tau \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))|| d\tau \\
&\leq \lambda \int_{t_0}^{t} ||x(\tau) - y(\tau)|| d\tau \\
&\leq \lambda |t - t_0| d_M(x(t), y(t)) \leq (\lambda\varepsilon) d_M(x(t), y(t)).
\end{aligned}$$

Théorème 1 (Cauchy–Lipschitz)

Supposons que $f(t, x)$ vérifie la condition de Cauchy-Lipschitz locale sur $J \times \Omega$ (par exemple $f \in C^1(J \times \Omega)$). Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$:

- *Il existe unique solution de (1) définie sur un intervalle $I = I(t_0, x_0) \subset J$;*
- *Il existe unique solution maximale de (1), définie sur $I_{\max}(t_0, x_0)$;*
- *Toute solution de (1) est obtenue par restriction de la solution maximale.*

Démonstration du Théorème 1 : partie existence

- Soit $C_0 = \{(t,x) \,|\, |t-t_0| \leq \varepsilon_0,\ ||x-x_0|| \leq R_0\} \subset J \times \Omega$ un cylindre centré dans (t_0,x_0) et soit $\mu := \sup_{C_0} ||f(t,x)||$.
- En diminuant $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, sot $C_1 = \{(t,x) \,|\, |t-t_0| \leq \varepsilon_1,\ ||x-x_0|| \leq R_0\} \subset C_0$ un cylindre de sécurité pour f $(\varepsilon_1 < \frac{R_0}{\mu})$;
- f localement lipschitzienne : $\Rightarrow \exists$ $C_2 = \{(t,x) \,|\, |t-t_0| \leq \varepsilon_2,\ ||x-x_0|| \leq R_2\}$ un cylindre de sécurité pour f sur lequel f est λ-lipscitzienne $(\varepsilon_2 = \epsilon\varepsilon_1, R_2 = \epsilon R_0$ pour $\epsilon > 0$ assez petit);
- En diminuant encore $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$, soit $C_3 = \{(t,x) \,|\, |t-t_0| \leq \varepsilon_3,\ ||x-x_0|| \leq R_2\}$ un cylindre de sécurité pour f sur lequel f est λ-lipscitzienne et $\varepsilon_3\lambda < 1$.

Démonstration du Théorème 1 : partie existence

Conclusion

Par les Lemmes 2 et 3, $\exists$ *un cylindre* $C = \{(t,x) \,|\, |t-t_0| \leq \varepsilon, \, ||x-x_0|| \leq R\} \subset J \times \Omega$ *tel que, si* $M := C^0\left([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \overline{B(0,R)}\right)$*, alors* $T : M \to M$ *est une contraction par rapport a* d_M*.*

Par Lemme 1, (M, d_M) est complet et par le Théorème de Picard $\exists$ $x_0(t) \in M$ t.q.

$$x_0(t) = T(x_0(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau)d\tau$$

$\Rightarrow$ $x_0(t)$ est une solution locale !

Théorème 1 (Cauchy–Lipschitz)

Supposons que $f(t,x)$ vérifie la condition de Cauchy-Lipschitz locale sur $J \times \Omega$ (par exemple $f \in C^1(J \times \Omega)$). Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$:

- *Il existe une unique solution de (1) définie sur un intervalle $I = I(t_0, x_0) \subset J$;*
- *Il existe unique solution maximale de (1), définie sur $I_{\max}(t_0, x_0)$;*
- *Toute solution de (1) est obtenue par restriction de la solution maximale.*