Définition 1. *Rappelons qu'une fonction $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un intégrale première du système des EDO*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(x))$$

si $\Phi(x(t)) = const$ pour toute solution $x(t)$.

1. Considérons le problème de Cauchy pour l'ÉDO de Newton
$$\ddot{x} = -\cos x, \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1. \tag{1}$$
   (a) Démontrez que les solutions locales de (1) sont en bijection avec les solutions locales du système
$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -\cos x, \\ &x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$
   (b) Vérifiez que la fonction
$$\Phi(x, y) = \frac{y^2}{2} + \sin x$$
   est une intégrale première pour (2)

   (c) Prouvez que la solution locale de (1) est indéfiniment prolongeable.
2. Considérons le système
$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x), \\ &\dot{y} = g(y), \end{aligned} \tag{3}$$
   ou $f(x)$ et $g(y)$ sont de fonctions lisses qui ne s'annulent pas sur leurs domains de definition.

   (a) Vérfiez que la fonction
$$\Phi(x, y) = \int^x \frac{d\xi}{f(\xi)} - \int^y \frac{d\eta}{g(\eta)},$$
   où $\int^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$ (resp. $\int^y \frac{d\eta}{g(\eta)}$) désigne une primitive de $\frac{1}{f(x)}$ (resp. de $\frac{1}{g(y)}$) est une intégrale première de (3).

   (b) Soit $f(x) = \frac{x}{bx-\ell}$, $\quad g(y) = -\frac{y}{ay-k}$ où $a, b, k, \ell > 0$ sont des constantes positives, et $x_0 > \frac{\ell}{b}$ et $y_0 > \frac{k}{a}$. Démontrez que la solution locale du problème de Cauchy $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ pour (3) est indéfinement prolongeable.
3. Considérons le système
$$\begin{aligned} &\dot{x} = Q(x, y), \\ &\dot{y} = P(x, y), \\ &x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{4}$$
   où $P(x, y), Q(x, y)$ sont de fonctions lisses avec $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

(a) Démontrez que pour toute solution différentiable $y = \varphi(x)$ de l'ÉDO
$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$
la fonction
$$\Phi(x,y) = y - \varphi(x)$$
est une intégrale première du système (4).

(b) Rappelons le système de Lotka–Voltera, décrivant la lutte entre deux espèces, l'un dévorant l'autre :
$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx - axy, \\ \dot{y} &= -\ell y + bxy, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{5}$$
où $a, b, k, \ell > 0$ et $x_0 > \frac{\ell}{b}, y_0 > \frac{k}{a}$.

Démontrez que la solution de (5) est indéfinement prolongeable et que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour $t \in \mathbb{R}$. Désigner une courbe intégrale de (5).