Introduction à la géométrie riemannienne et kählérienne

Vestislav Apostolov

Nantes, 2022

Cartes de coordonnées

Soit M un ensemble dont les éléments $x \in M$ sont apélés *points*.

Définition (**Carte de coordonnées**)

Une **carte de coordonnées** sur M est un *sous-ensemble* $U \subset M$ muni d'une application bijective

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n,$$

où $\varphi(U)$ est un sous-ensemble *ouvert* de $\mathbb{R}^n$.

Si (U, φ) est une carte sur M, pour toute $x \in U \subset M$, nous utilisons les coordonnées euclidiennes de $\varphi(x) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ pour écrire

$$\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Atlas

Nous nous intéressons dans le cas où M peut être recouvert par un ensemble de cartes de coordonnées.

Définition (**Atlas de régularité C^k**)

Un **atlas de régularité** C^k ($k = 0, 1, \ldots, \infty$) sur M est une collection de cartes $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I\}$ telles que:

- $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$;
- $\forall \alpha, \beta \in I$, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- l'application

  $$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  est de classe C^k est son inverse est aussi de classe C^k.

Si $k = \infty$ on dit *un atlas lisse*. $F(x_1, \ldots, x_n)$ est de régularité C^k si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.

Atlas complexe

Nous allons nous intéresser dans un deuxième temps au cas où M peut être recouvert par un ensemble de cartes de coordonnées modélées sur $\mathbb{C}^n$:

Définition (**Atlas complexe**)

Un **atlas holomorphe complexe** sur M est une collection de cartes $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I\}$ telles que:

- $\varphi_\alpha : U_\alpha \sim \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n)\}$;
- $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$;
- $\forall \alpha, \beta \in I$, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$;
- l'application
$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
est une application holomorphe, i.e. elle vérifie les équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = 0$.

Exemples

Example (**Espaces vectoriels**)

$M = \mathbb{R}^n$ ou un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une carte est donnée par

$$U := M, \varphi := \mathrm{id}.$$

ce qui donne aussi un atlas lisse.
Soit $M = V$ où V est un espace vectoriel réel de dimension n. Pour toute base $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, nous posons

$$U := V, \varphi_{\mathbf{e}}(v) = (x_1, \ldots, x_n)$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $v \in V$ rélativement à $\mathbf{e}$.
Alors $\varphi_{\mathbf{e}} \circ \varphi_{\mathbf{e}'}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application linéaire du changement de bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ (c.à-d. un élément de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$), donc nous avons un atlas lisse des cartes *linéaires*.

Exemples

Example (Espaces vectoriels complexes)

$M = \mathbb{C}^n$ ou un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une carte est donnée par

$$U := M, \; \varphi := \mathrm{id}.$$

ce qui donne aussi un atlas complexe holomorphe.
Soit $M = V$ où V est un espace vectoriel complexe de dimension n. Pour toute base $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, nous posons

$$U := V, \; \varphi_{\mathbf{e}}(v) = (z_1, \ldots, z_n)$$

où $(z_1, \ldots, z_n)$ sont les coordonnées de $v \in V$ rélativement à $\mathbf{e}$. Alors $\varphi_{\mathbf{e}} \circ \varphi_{\mathbf{e}'}^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est l'application linéaire du changement de bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ (c.à-d. un élément de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$), donc nous avons un atlas complexe holomorphe de cartes *linéaires*.

Exemples

Example (Quotients d'espaces vectoriels)

$M := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{R}$ est considéré comme groupe aditif et $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe discret. $M = \{[x] | x \in \mathbb{R}\}$ où $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}$; $p : \mathbb{R} \to M$ l'application quotient.

$$U_0 := p(0,1), \qquad U_1 := p(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$\varphi_0 := \left(p_{|_{(0,1)}}\right)^{-1} : U_0 \to (0,1),$$

$$\varphi_1 := \left(p_{|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}\right)^{-1} : U_1 \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Exercice 1

Trouver $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$.

Généraliser cette construction pour $M = V/\Lambda$ *où* V *est une space vectoriel de dimension* n *et* $\Lambda \subset V$ *est un réseau de rank* $k \leq n$.

Exemples

Example (La droite complexe élargie)

$M := \mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \overline{\mathbb{C}}$.

$$
\begin{aligned}
U_0 &:= \mathbb{C}, \varphi_0(z) := z;\\
U_1 &:= \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\},\\
\varphi_1(\tilde{z}) &:= \frac{1}{\tilde{z}},\ \tilde{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \text{et}\ \varphi_1(\infty) = 0.
\end{aligned}
$$

$$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(z) = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \sqrt{-1}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Exemples

Example (L'espace projectif réel/complexe)

$$\begin{aligned} M &:= \{\text{sous-espaces de dimension 1 de } \mathbb{K}^{n+1}\} \\ &= \{[v], v \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} | v \sim \lambda \tilde{v}, \lambda \neq 0\},\ \mathbb{K} := \mathbb{R}, \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Soit U_i ($i = 0, \ldots, m$) le sous-ensemble tel que la i-ème coordonnée de $[v]$ est non-nulle et

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{K}^n,\ \varphi_i([v]) := \big(\frac{v_0}{v_i}, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \frac{v_n}{v_i}\big).$$

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(\xi_0, \ldots, \xi_n) : \xi_i = 1, \xi_j \neq 0\}$$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{\xi_j}, \ldots, \frac{1}{\xi_j}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_j}\right).$$

La définition de variété

Les exemples précédents sont des variétés C^∞ (ou *variétés lisses*) parce qu'ils possèdent un atlas C^∞.
Mais il y a une subtilité:

Définition (**Compatibilité des atlas**)

Deux atlas de classe C^k sur M, $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I\}$ et $\mathcal{B} = \{(V_i, \psi_i), i \in J\}$ sont dits *compatibles* si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est aussi une atlas de classe C^k sur M. Une structure différentiable de classe C^k sur M est une classe d'equivalence des atlas compatibles ou, de manière équivalente, une structure différentiable est la réunion de tous les atlas compatibles (l'atlas *maximal*). Une variété lisse est un ensemble M muni d'une structure différentiable de classe C^∞.

Conclusion

Pour démontrer que M est une variété, il nous faut construire un atlas, mais la définition prend en compte tout autre atlas compatible.

Topologie

Définition (**Topologie**)

M est un espace topologique, s'il possède une *topologie* $\mathcal{T}$ c-à-d. $\mathcal{T}$ est une collection de sous-ensembles de M, dits *ouverts*, tels que

1. $\emptyset$ et M sont ouverts;
2. toute union des ouverts et un ouvert
3. toute intersection finie des ouverts et un ouvert.

Si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas de classe C^k sur M, alors on définit

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} := \{U \subset M | \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ est un ouvert}\}.$$

Exercice 2

Démontrer que : (a) $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ *est une topologie de* M *par rapport à quelle* $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ *est un homeomorphisme, et*
(b) si $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ *alors* $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Topologie

Convention (**La topologie des variétés lisses**)

Pour que M soit une variété lisse nous allons **toujours** *supposer que la topologie induite $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ par un atlas compatible est*

1. **séparée** *(Hausdorff) et*
2. **vérifie le second axiome de dénombrabilité** *(il existe une base topologique dénombrable)*

$\Rightarrow$ M **est métrisable** puisque il est séparé + second axiome de dénomrabilité + localement métrisable (Tietze-Uryson)
$\Rightarrow$ M est **paracompact**: toute recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini et une partition de l'unité subordonnée.

Topologie

Exercice 3

(a) Démontrer que si un atlas compatible $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ *vérifie*

- *les graphes* $(x, (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)) \subset U_\alpha \times U_\beta$ *sont fermés;*
- A *est dénombrable,*

alors $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ *vérifie la convention plus haut.*

(b) Vérifier que les topologies induites de tous les exemples discutés vérifient la convention plus haut.

Produit cartésiens de variétés

Définition (Produit)

Si $(M_1, \mathcal{A}_1) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $(M_2, \mathcal{A}_2 = \{(V_i, \psi_i)\}$ sont deux variétés lisses introduites à partir des atlas lisses, alors

$$M := M_1 \times M_2, \qquad \mathcal{A} = \{U_\alpha \times V_i, (\varphi_\alpha, \psi_i)\}$$

introduit un atlas lisse sur M et une structure de variété lisse.

Revêtements

Définition (Revêtement topologique)

Soit M un espace topologique est I un ensemble dénombrable. Un revêtement à I-feuilles $\pi : \hat{M} \to M$ est un autre espace topologique $\hat{M}$ munie d'une application continue surjective π, telle que

- $\forall x \in M$ il existe un overt $U \ni x$ t.q. $\pi^{-1}(U) = \cup_{i \in I} \hat{U}_i$;
- $\hat{U}_i \cap \hat{U}_j = \emptyset, \ i \neq j$
- $\pi : \hat{U}_i \to U_i$ est un homéomorphisme.

Théorème 1

Tout revêtement d'une variété lisse est une variété lisse. En particulier, le revêtement universelle $\widetilde{M}$ de M est une variété lisse simplement connexe.

Méthodes implicites pour construire des variétés lisses

Théorème 2

Soit $F : U \to \mathbb{R}^m$ *une fonction lisse définie sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *et* $c \in \mathbb{R}^m$. *Supposons que pour tout* $a \in F^{-1}(c)$ *la différentielle* D_aF *de* F

$$D_aF : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$$

est une application linéaire **surjective**. *Alors* $M := F^{-1}(c)$ *possède une structure de variété lisse de dimension* n, *compatible avec la topologie induite sur le sous-ensemble* $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

La sphère $\mathbb{S}^n$

Définition

Par le Théorème 1, l'ensemble

$$\mathbb{S}^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \Big| x_0^1 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

est une n-variété lisse de dimension n, que l'on appèle *la sphère ronde*.

Exercice 4

Verifier que on peut munir $\mathbb{S}^n$ avec un atlas de deux cartes compatibles (dit l'atals stéreographique) défini comme suit:

- $U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$, $\varphi_1(x) := \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_0}$.
- $U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$, $\varphi_2(x) := \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_0}$.

Régularité

Remarque

Si $\mathcal{A}$ est un atlas de régularité C^k sur M, il est aussi un atlas de régularité C^r, $r \leq k$.

Theorem (Whitney, 1934)

Si $\mathcal{A}$ est un atlas de régularité C^k sur M avec $k \geq 1$, alors il existe un atlas C^∞ sur M, $\mathcal{B}$, qui est compatible (tant que atlas C^k) avec $\mathcal{A}$.

Theorem (Donaldson, Friedman, 1982)

$M = \mathbb{R}^4$ possède une infinité de structures lisses non-équivalentes compatibles avec la structure C^0 canonique.

Theorem (Milnor, 1956)

$M = \mathbb{S}^7$ possède au moins 7 structures lisses non-équivalentes compatibles avec la structure C^0 canonique (28 connues présentement).

Orientation

Définition

Soit M une variété lisse. On dit que M est *orientée* si elle est munie d'une atlas lisse compatible $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tel que $\det(\mathrm{Jac}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$. On dit que M est orientable si elle possède au moins d'une orientation.

Exercice 5

(a) Démontrer que toute variété lisse non-orientable possède un revêtement à deux feuilles oriéntable. (b) Démontrer que $\mathbb{S}^n$ est orientable et que $\mathbb{R}P^n$ est orientable ssi $n = 2k + 1$. (c) Démontrer que toute variété lisse de dimension réelle $2n$, munie d'un atlas complexe-holomorphe compatible (de dimension complexe n) est oriéntée.

Difféomorphismes

Définition (**Application lisse entre variétés**)

Soient M, N deux variétés lisses. $F : M \to N$ est une application lisse si pour tout $x \in M$ et toutes cartes de coordonnées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ avec $x \in U_\alpha$ et (V_i, ψ_i) avec $F(x) \in V_i$, l'application composée

$$\psi_i \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

est de classe C^∞ (comme fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui prend valeurs dans $\mathbb{R}^k$).

Remarque

Il suffit de prendre $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ à partir d'un atlas compatible $\mathcal{A}$ sur M et (V_i, ψ_i) à partir d'un atlas compatible sur N. La définition sera satisfaite pour tout autre choix car $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ est lisse ! On va parler des **cartes compatibles**.

Difféomorphismes

Définition (Application lisse entre variétés)

Soient M, N deux variétés lisses. $F : M \to N$ est une application lisse si pour tout $x \in M$ et toutes cartes de coordonnées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ avec $x \in U_\alpha$ et (V_i, ψ_i) avec $F(x) \in V_i$, l'application composée

$$\psi_i \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

est de classe C^∞ (comme fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui prend valeurs dans $\mathbb{R}^k$).

Difféomorphismes

La notion d'équivalence entre les variétés lisses est donnée par la notion suivante:

Définition (**Difféomorphisme entre variétés**)

Soient M, N deux variétés lisses. On dit que M est difféomorphe à n s'il existe une application lisse $F : M \to N$ qui est

- bijection
- $F^{-1} : N \to M$ est lisse

On appelle une telle application F un **difféomorphisme** et on dit que M est difféomorphe à N ($M \sim N$).

Le problème de classification

Problème (**Problème de classification**)

Étant donnée une variété lisse M qui est connexe et compacte par rapport à la topologie induite $\mathcal{T}_M$, trouver une variété **simple** (constructible) M_0, telle que $M \sim M_0$.

Example

1. Toute variété lisse compacte de dimension 1 est isomorphe à $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (facile à démontrer, **Exercice**).
2. **[au début du XX-ème siècle par Felix Klein, Paul Koebe et Henri Poincaré.]** Toute variété lisse compacte de dimension 2 est isomorphe soit à la sphère soit à un beignet à k trous, soit à un $\mathbb{Z}_2$-quotient d'un telle variété (k et le quotient sont déterminés par le groupe fundamental $\pi_1(M)$, un invariant de $\mathcal{T}_M$).

Le problème de classification

Example

3. **[Kervaire 1969]** Les groupes fondamentaux des variétés compactes de dimension 4 ne sont pas (algébriquement) classifiables.
4. **[Perelman, 2000's.]** Toute variété lisse compacte de dimension 3 peut être decomposée en des morceaux simples , c.-à.d. géométrisables en sense de Thurston. (La résolution de la conjecture de Thurston faite dans les années 1960's).

Le problème d'identification

Problème (**Problème d'identification**)

Étant données deux variétés lisses M, N de la même dimension, décider si $M \sim N$. **Introduire des invariants calculables... e.g. la Théorie K, théorie de jauge, existence de métriques riemanniennes spéciales.**

Example

$M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{S}^1 := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + z^2 = 1\}$
Atlas sur $N = \mathbb{S}^1$ donné par les projections stéréographiques :

$$V_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,+1)\},\ \psi_1(x,z) := \frac{x}{1-z}$$
$$V_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,-1)\},\ \psi_2(x,z) := \frac{x}{1+z}$$

Atlas sur $M = \mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donné par deux cartes :

$$U_0 = M \setminus \{[0]\},\ \varphi_0([y]) = y_0 \in (0,1)$$
$$U_1 = M \setminus \left\{\left[\frac{1}{2}\right]\right\},\ \varphi_1([y]) = y_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Un difféomorphisme entre M et N est défini par :

$$G : M \to N,$$
$$G([y]) := (\sin 2\pi y, \cos 2\pi y)$$

$$\left(\psi_1 \circ G \circ \varphi_0^{-1}\right)(y_0) = \frac{\sin 2\pi y_0}{1 - \cos 2\pi y_0},\ y_0 \in (0,1).$$

est un difféomorphisme de $(0,1)$ sur $\mathbb{R}$.