Introduction à la géométrie riemannienne et kählérienne

Vestislav Apostolov

Nantes, 2022

Fonctions lisses

M est une variété lisse de dimension n .

Définition (**fonctions lisses)**

$f : M \to \mathbb{R}$ est lisse si pour toute carte compatible (U, φ), la fonction

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

est infiniment dérivable.

Lemma

L'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M est un espace vectoriel de dimension infini.

Exercice 1

Que pouvez vous dire sur l'ensemble de fonction complexes holomorphes définie sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}}$?

Espace tangent et co-tangent

M est une variété lisse de dimension n et $a \in M$

Définition (**l'espace co-tangent**)

$$T_a^*(M) := C^\infty(M)/Z_a(M) = \{[df_a]\}$$

les classes d'equivalences de fonctions lisses qui ont même dérivées partielles en a (par rapport à toute carte (U, φ), $a \in U$).

$$\begin{aligned}(df)_a &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big)(\varphi(a))(dx_i)_a \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(a)(dx_i)_a\end{aligned}$$

Définition (**l'espace tangent**)

$$T_a(M) := \{X_a : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \,|\, \text{linéaire et vérifie la règle de Leibnitz}\}$$

$$X_a(\lambda f + \mu g) = \lambda X_a(f) + \mu X_a(g), \;\; X_a(fg) = f(a)X_a(g) + g(a)X_a(f).$$

Proposition

$T_a(M)$ est le dual de $T_a^*(M)$ et $T_a^*(M)$ est le dual de $T_a(M)$.

$$X_a = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$$

où $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\right\}$ et la base duale de $\{(dx_1)_a, \ldots, (dx_n)_a\}$.

$$X_a(f) := \langle X_a, (df)_a\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\right)(\varphi(a)).$$

Une autre définition de $T_a(M)$

Définition (**courbes lisse**)

Une courbe lisse sur M est une application

$$\gamma : (\alpha, \beta) \to M,$$

telle que pour toute carte compatible (U, φ), $\gamma \circ \varphi$ est lisse.

Nous allons regarder l'ensemble $C_a(M)$ de toutes les courbes lisses $\gamma(t)$ sur M, telles que $0 \in (\alpha, \beta)$ et $\gamma(0) = a \in M$.

Définition (**vélocité d'une courbe lisse**)

Deux courbes $\gamma(t)$ et $\tilde{\gamma}(t)$ dans $C_a(M)$ ont la même vélocité en $a \in M$ si

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \gamma(t)\Big)_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ \tilde{\gamma}(t)\Big)_{t=0}.$$

Cette définition ne depend pas de choix de carte (U, φ) atour a.

Une autre définition de $T_a(M)$

Définition (vélocité d'une courbe lisse)

La vélocité en a de $\gamma \in C_a(M)$ est la classe d'equivalence $[\gamma]_a$ dans $V_a(M) := C_a(M)/\sim$.

Proposition

Il existe un isomorphisme canonique $V_a(M) \sim T_a(M)$:

$$[\gamma]_a(f) := \frac{d}{dt}\Big(f(\gamma(t))\Big)_{|t=0}.$$

La différentielle d'une application lisse

Définition (Rappel: application lisse entre variétés)

Soient M, N deux variétés lisses. $F : M \to N$ est une application lisse si pour tout $x \in M$ et toutes cartes de coordonnées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ avec $x \in U_\alpha$ et (V_i, ψ_i) avec $F(x) \in V_i$, l'application composée

$$\psi_i \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

est de classe C^∞ (comme fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ qui prend valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

Définition (La différentielle de F)

La différentielle D_aF en $a \in M$ est l'application linéaire $D_aF : T_a(M) \to T_{F(a)}(N)$ définie par

$$(D_aF)(X_a)(f) := X_a(f \circ F), \qquad \forall f \in C^\infty(N).$$

La différentielle d'une application lisse

Si (U,φ) est une carte autour a, avec coordonnées $(x_1,\dots,x_m)$, et (V,ψ) est une carte autour de $F(a)$ avec coordonnées $(y_1,\dots,y_n)$ nous avons:

$$\begin{aligned}
(D_aF)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a(f) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left((f\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})\right)(\varphi(a)) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)(a)\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(F(a)) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(a)}\right)(f).
\end{aligned}$$

Un fibré vectoriel

Définition (**Un fibré vectoriel de rang m**)

Une variété lisse E munie d'une application surjective et lisse $p : E \to M$, telle que

- $p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^m$ pour tout $x \in M$;
- tout x possède un voisinage $U \ni x$ et un difféomorphisme

$$\psi_U : p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m,$$

  telle que $\psi_U : p^{-1}(x) \cong \{x\} \times \mathbb{R}^m$.
- sur l'intersection $U \cap V$

$$\psi_U \circ \psi_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^m$$

  est dans la forme $(x, v) \mapsto (x, g_{UV}(x)v)$ où $g_{UV}(x)$ est une matrice inversible $m \times m$ avec coefficients lisses.

Un fibré vectoriel

Examples

- $E := M \times \mathbb{R}^m$ avec $\psi_U(x, v) = v$ et
$$g_{UV}(x) = \mathbf{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$
- $E := TM = \bigcup_{a \in M} T_a(M)$ avec $\psi_U(a, v_a) := (a, (D_a\varphi)(v_a))$ où (U, φ) carte autour de a:
$$g_{UV}(a) = \mathbf{Jac}(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})(\varphi_V(a))$$
- $E := T^*M = \bigcup_{a \in M} T_a^*(M)$ avec
$\psi_U^*(a, [f]_a) := \left(a, \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi)(\varphi(a))(dx_i)_a\right)$ où (U, φ) carte autour de a:
$$g_{UV} = \left(\left(\mathbf{Jac}(\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})(\varphi_V(a))\right)^T\right)^{-1}.$$

Un fibré vectoriel

Définition

Une section lisse d'un fibré vectoriel $p : E \to M$ est une application lisse qui vérifie

$$s : M \to E, \qquad s \circ p = \mathrm{id}_M.$$

Lemma

$C^\infty(M, E) = \{\text{sections lisses de } E\}$ *est un espace vectoriel réel de dimension infinie.*

Preuve.

Dans une trivialization (U, ψ_U) : $s_U := \psi_U^{-1}(x, f_U(x))$ où $f_U \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$; ρ_U une fonction lisse de plateau $\Rightarrow$ $\rho_U s_U \in C^\infty(M, E)$. $\square$

Les champs de vecteurs

Définition (Champs de vecteurs lisses)

Un champ de vecteurs lisse est une section de TM.

$$\mathcal{X}(M) := \{X \mid X \,\text{est un champ de vecteurs lisse sur}\, M\}$$

est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

Soit (U, φ) une carte:

$$X(x) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} c_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x \right), \qquad c_j(x) \in C^\infty(\varphi(U)).$$

Les 1-forme différentielles

Définition (1-**forme différentielle)**

Les sections de T^*M s'appellent 1-formes différentielles.

$$\Omega^1(M) := \{\alpha \,|\, \alpha \text{ est une 1-forme différentielle sur } M\}$$

est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

Soit (U, φ) une carte:

$$\alpha(x) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(dx_j)_x \right), \qquad a_j(x) \in C^\infty(\varphi(U)).$$

Soit $f \in C^\infty$, alors

$$df(x) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)(dx_j)_x \right) \in \Omega^1(M).$$

Un fibré vectoriel à partir d'un co-cycle

Soit $p : E \to M$ un fibré vectoriel de rang m et $\{(U, \psi_U), U \in \mathcal{A}\}$ un recouvrement de E tel que

$$\begin{aligned}\psi_U \circ \psi_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^m &\to (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \\ (x, v) &\mapsto (x, g_{UV}(x)v),\end{aligned}$$

Nous avons $g_{UU}(x) = \mathrm{id}$ et

$$g_{UV}(x) = g_{VU}(x)^{-1}.$$

De manière similaire, sur $U \cap V \cap W$ nous avons

$$g_{UV}(x) \circ g_{VW}(x) \circ g_{WU}(x) = \mathrm{id}_{U \cap V \cap W}.$$

Un fibré vectoriel à partir d'un co-cycle

Définition (Un co-cycle de fonctions de transition)

Les données $\{U \in \mathcal{A}, g_{UV}(x) \in C^{\infty}(U \cap V, GL(m, \mathbb{R}))\}$ sur M, où $\{U \in \mathcal{A}\}$ est un recouvrement ouvert et $g_{UV}(x)$ vérifient les conditions

$$g_{UU} = \mathrm{id},\ g_{UV} \circ g_{VU} = \mathrm{id},\ g_{UV} \circ g_{VW} \circ g_{WU} = \mathrm{id}$$

s'appellent un **co-cycle de Czech** de fonctions de transition sur M.

Proposition

Tout co-cycle de Czech de fonctions de transition sur M

$$\{U \in \mathcal{A}, g_{UV}(x) \in C^{\infty}(U \cap V, GL(m, \mathbb{R}))\}$$

provient d'un fibré vectoriel E de rang m sur M.

Idée de démonstration.

Prénons les morceaux $\{(U, \mathbb{R}^m) | U \in \mathcal{A}\}$ et nous allons les recoller via la relation d'équivalence

$$U \times \mathbb{R}^m \ni (x, u) \sim (y, v) \in V \times \mathbb{R}^m \,\mathrm{si}$$
$$x = y \quad \mathrm{et} \qquad v = g_{UV}(x)u$$

Exercice 3

Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence sur

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \times \mathbb{R}^m$$

et que l'espace quotient E est un espace topologique séparé vérifiant le seconde axiome de dénombrabilité. Trouver un atlas lisse sur E.

$\square$

Le fibré vectoriel dual

Définition (**fibré dual**)

Si $p : E \to M$ est un fibré vectoriel lisse de rang m, le fibré dual $p : E^* \to M$ est **le** fibré vectoriel dont les fonctions de transition sont

$$g_{UV}^{E^*}(x) = \left[\left(g_{UV}^{E}(x)\right)^{-1}\right]^T.$$

Examples

T^*M est le dual de TM.

Somme directe de fibrés vectoriels

Définition (somme directe de fibrés vectoriels)

Soient $E \to M$ et $F \to M$ deux fibrés vectoriels, avec co-cycles de Chez $\{g^E_{UV}(x)\}$ et $\{g^F_{UV}(x)\}$, respectivement. La somme directe

$$E \oplus F \to M$$

est un fibré vectoriel de rang $\mathrm{rang}(E) + \mathrm{rangF}$ correspondants au co-cycle de Chez

$$\left\{ g^E_{UV}(x) \oplus g^F_{UV}(x) = \begin{pmatrix} g^E_{UV}(x) & 0 \\ 0 & g^F_{UV}(x) \end{pmatrix} \right\}.$$

Le fibré tautologique

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}P^n &:= \{\text{les sous-espaces vectoriels de dimension } 1 \text{ de } \mathbb{K}^{n+1}\} \\ &= \{L_{[v]} | v \neq 0 \in \mathbb{K}^{n+1}\}. \end{aligned}$$

Examples (le fibré tautologique)

$$\mathcal{O}(-1) := \bigcup_{[v] \in \mathbb{K}P^n} \{L_{[v]}\}, \qquad p : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{K}P^n,\ p(v) = [v].$$

Le fibré universel

Examples (**le grassmannien**)

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{\mathbb{R}}(m,N) &= \{\text{les sous-espaces vectoriels de dimension } m \text{ de } \mathbb{R}^N\} \\ &= \{V \subset \mathbb{R}^{n+1}\}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_m := \bigcup_{V \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}(m,N)} \{V\}, \qquad p : \mathcal{E}_m \to \mathbb{G}(m,N).$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{R}P^{N-1} = \mathbb{G}(1,N)$$

Le tiré d'un fibré et le fibré universel

Lemma

Soit $p : E \to M$ un fibré lisse de rang m et $F : N \to M$ une application lisse. Alors

$$F^*(E) := \bigcup_{y \in N} p^{-1}(F(y))$$

est un fibré vectoriel de rang m sur N, avec fonctions de transition $g_{UV}(F(y))$.

Théorème (**Le fibré universel**)

Tout fibré lisse du rang m sur M est le tiré du fibré tautologique $\mathcal{E}_m$ sur $\mathbb{G}(m, N)$ pour $N >> 1$, par une application lisse

$$F : M \to \mathbb{G}(m, N).$$

(Steenrod « The topology of fibre-bundles ».)

Algèbre linéaire: produit tensoriel d'espaces vectoriels

Définition (**Produit tensoriel**)

Soient V, W espaces vectoriels réels/complexes de dimensions finies. Le **produit tensoriel** $V \otimes W$ est un espace vectoriel de dimension $\dim(V)\dim(W)$ tel que

- si $v \in V$ et $w \in W$, il existe un élément $v \otimes w \in V \otimes W$ avec les propriétés

$$
\begin{aligned}
(\lambda v_1 + \mu v_2) \otimes w &= \lambda v_1 \otimes w + \mu v_2 \otimes w, \\
v \otimes (\lambda w_1 + \mu w_2) &= \lambda v \otimes w_1 + \mu v \otimes w_2.
\end{aligned}
$$

- $V \otimes W$ possède la **propriété universelle**: c-à-d. pour toute application bi-linéaire $B : V \times W \to U$ il existe unique application
$$\beta : V \otimes W \to U$$
avec la propriété $B(v, w) = \beta(v \otimes w)$.

Algèbre linéaire: produit tensoriel d'espaces vectoriels

Proposition

Soient V, W espaces vectoriels réels de dimensions finies et notons $\mathcal{B} := \{B : V \times W \to \mathbb{K} \,|\, B \text{ forme bilinéaire}\}$. Alors l'espace dual $\mathcal{B}^*$ définie le produit tensoriel, i.e.

$$V \otimes W \equiv \mathcal{B}^*.$$

Preuve de la Proposition.

$$(v \otimes w)(B) := B(v, w) \in \mathbb{K}, \qquad (v \otimes w) \in \mathcal{B}^*.$$

Si $B : V \times W \to U$ bi-linéaire et $\xi \in U^* \Rightarrow \xi \circ B \in \mathcal{B}$.

$$\exists\, F_B : U^* \xrightarrow{\mathbb{R}\text{-linéaire}} \mathcal{B}, \qquad \beta := (F_B)^* : (V \otimes W) \to (U^*)^* \equiv U.$$

Algèbre linéaire: produit tensoriel d'espaces vectoriels

Corollary

Soient V, W espaces vectoriels de dimensions finies et soient $\{v_1, \dots, v_m\}$ et $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases. Alors

$$\{v_i \otimes w_j,\ i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n\}$$

est une base de $(V \otimes W) \equiv \mathcal{B}^*$.

Preuve du Corollaire.

Tout $B \in \mathcal{B}$ est déterminée par ses valeurs $B(v_i, w_j) = (v_i \otimes w_j)(B)$. □

Tout élément de $V \otimes W$ s'écrit

$$\sum_{i,j} a_{ij}(v_i \otimes w_j).$$

Le produit tensoriel d'applications linéaires

Corollary

Soient V, W espaces vectoriels de dimensions finies et soient $F_V : V \to V$ et $F_W : W \to W$ deux applications linéaire. Alors il existe unique application linéaire

$$(F_V \otimes F_W) : V \otimes W \to V \otimes W$$

qui vérifie

$$(F_V \otimes F_W)(v \otimes w) = F_V(v) \otimes F_W(w).$$

Preuve du Corollaire.

$$V \times W \to V \otimes W, \qquad (v, w) \to (F_V(v) \otimes F_W(w))$$

est bilinéaire et determine $F_V \otimes F_W$ par la propriété universelle. $\square$

Produit tensoriel des fibrés vectoriels

Définition (produit tensoriel de fibrés vectoriels)

Soient $E \to M$ et $F \to M$ deux fibrés vectoriels, avec co-cycles de Chez $\{g^E_{UV}(x)\}$ et $\{g^F_{UV}(x)\}$, respectivement. Le produit tensoriel

$$E \otimes F \to M$$

est un fibré vectoriel de rang $\mathrm{rang}(E) \times \mathrm{rangF}$ correspondants au co-cycle de Chez

$$\left\{ g^E_{UV}(x) \otimes g^F_{UV}(x) \right\}.$$

L'algèbre tensorielle

Prenons $V = W$ et notons

$$\otimes^k V := V \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{k-\text{times}} V, \qquad \otimes^0 V := \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{T}(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V.$$

Un élement de $\mathrm{T}(V)$ est une somme finie

$$\lambda \mathbf{1} + v_0 + \sum_{i,j} v_i \otimes v_j + \ldots + \sum_{i_1,\ldots,i_p} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p},$$

et on peut multiplier tels éléments en utilisant

$$(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}) \cdot (u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_q}) := v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_q}.$$

L'algèbre extérieure

$$\otimes^k V := V \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{k-\text{times}} V, \qquad \otimes^0 V := \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{T}(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V,$$

$$\mathrm{I}(V) = \{\text{l'idéal engéndé par } v \otimes v\}.$$

Définition (L'algèbre extérieure)

L'espace vectoriel

$$\bigwedge^*(V) := \mathrm{T}(M)/\mathrm{I}(V)$$

s'appèle l'algèbre extérieure de V.

L'algèbre extérieure

Lemma 1

Si $\alpha = \pi(a) \in \bigwedge^p(V)$ et $\beta = \pi(b) \in \bigwedge^q(V)$, alors

$$\alpha \wedge \beta := \pi(a \otimes b) \in \bigwedge^{p+q}(V)$$

est bien définie et vérifie $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

Preuve du Lemme 1.

Puisque $v \otimes v \in \mathrm{I}(V)$, nous avons $v \wedge v = 0$ et donc

$$\Rightarrow 0 = (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2) = 0 + v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 + 0.$$

$$\Rightarrow v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, \qquad \sigma \in S_k.$$

α s'écrit comme une combinaison linéaire des termes $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ et β des termes $w_1 \wedge \cdots \wedge w_q$ et nous avons

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \cdots \wedge w_q) = (-1)^{pq} (w_1 \wedge \cdots \wedge w_q) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p).$$

L'algèbre extérieure

Lemma 2

Si $\dim(V) = n$ alors $\dim\left(\bigwedge^n V\right) = 1$.

Preuve du Lemme 2.

Soit $\boldsymbol{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V.

$$M_{\boldsymbol{e}}(v_1, \ldots, v_n) := \det(v_{ij}), \qquad v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j$$

est une forme multilinéaire $M_{\boldsymbol{e}} : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ non-nulle $(M_{\boldsymbol{e}}(e_1, \ldots, e_n) = 1)$ qui vérifie $M_{\boldsymbol{e}}(\ldots, v, v, \ldots) = 0$.

$$0 \neq M_{\boldsymbol{e}} \in \left(\bigwedge^n (V)\right)^* \Rightarrow \dim\left(\bigwedge^n (V)\right) \geq 1.$$

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = \pi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = \lambda(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$$

$\Rightarrow \dim\left(\bigwedge^n (V)\right) \leq 1$.

L'algèbre extérieure

Lemma 3

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V, alors $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}$ est une base de $\bigwedge^p(V)$ et donc $\dim\left(\bigwedge^p(V)\right) = \binom{n}{p}$.

Lemma 4

Si $A : V \to W$ est une application linéaire, alors il existe unique application linéaire $(\wedge^p A) : \bigwedge^p(V) \to \bigwedge^p(W)$, satisfaisant

$$(\wedge^p A)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = A(v_1) \wedge \cdots \wedge A(v_p).$$

Lemma 5

Si $A : V \to V$ est une application linéaire, et $n = \dim(V)$, alors $(\wedge^n A) : \bigwedge^n(V) \to \bigwedge^n(V)$, est donnée par $\det(A)$.

L'algèbre extérieure et formes alternées

Une autre approche consiste à utiliser l'isomorphisme canonique :

$$\left(\bigwedge^p(V)\right)^* \cong A^p(V),$$

où

$$A^p(V) := \Big\{ f : V \underbrace{\times \cdots \times}_{p-\text{times}} V \to \mathbb{R} \,\text{multi-linéaire et}$$

$$f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} f(v_1, \ldots, v_p),\ \sigma \in S_p \Big\}.$$

$$\bigwedge^*(V) \cong \left(\bigoplus_{p=0}^{n} A^p(V)\right)^*.$$

Un isomorphisme (presque) canonique!

Lemma

$\bigwedge^p(V^*) \cong_\alpha (\bigwedge^p(V))^* \cong A^p(V)$.

Preuve du Lemme.

Nous allons introduire une application bilinéaire non-dégénérée

$$\alpha : \bigwedge^p(V^*) \times \bigwedge^p(V) \to \mathbb{R},$$
$$\alpha(w_1^* \wedge \cdots \wedge w_p^*, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \det(w_i^*(v_j)).$$

$\square$

Remarque

Un autre choix populaire (voir Kobayashi–Nomizu) est

$$\beta : \bigwedge^p(V^*) \times \bigwedge^p(V) \to \mathbb{R},$$
$$\beta(w_1^* \wedge \cdots \wedge w_p^*, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \frac{1}{p!}\det(w_i^*(v_j)).$$

Formes différentielles

Définition (**Formes différentielles)**

Le fibré vectoriel $\bigwedge^p T^*M$ s'appelle le fibré des p-**formes** de M. Une section de $\bigwedge^p T^*M$ s'appelle une p-**forme différentielle** sur M. L'ensemble des p-formes différentielles est un espace vectoriel de dimension infinie qui est noté par

$$\Omega^p(M) := \{p - \text{formes differentielles}\}$$

Si (U, φ) est une carte compatible et $\alpha \in \Omega^p(M)$:

$$\alpha_U = \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, \qquad a_{i_1 \ldots i_p}(x) \in C^\infty(U).$$

Métriques riemanniennes

Définition (Métrique riemannienne)

Une métrique riemanniénne sur M est une section lisse $g \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M)$ telle que

$$\forall x \in M,\ g_x : T_x(M) \times T_x(M) \to \mathbb{R}$$

définie un produit euclidien sur $T_x(M)$.

Si (U, φ) est une carte compatible

$$g_{|U} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

t.q. $G(x) := (g_{ij}(x)) \in C^\infty(U, M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ vérifie

$$G(x)^{\mathrm{T}} = G(x),\ G(x) > 0.$$

Métriques riemanniennes

- on peut déformer une métrique riemannienne par exemple via

$$\tilde{g} = e^f g, \qquad \tilde{g} = g + \alpha \otimes \alpha, \qquad f \in C^\infty(M), \alpha \in \Omega^1(M).$$

- si g_1 et g_2 sont deux métriques riemanniennes alors

$$g_t := t g_1 + (1-t) g_2, \qquad t \in [0,1]$$

  est une métrique riemannienne.

Examples

$M = \mathbb{R}^n$, $g_x = \sum_{i=1}^n (dx_i)_x \otimes (dx_i)_x$, $G(x) = \mathbf{I}$.

Fibrés riemanniennes

Définition

Une métrique riemanniénne sur $E \to M$ est une section lisse $g \in C^\infty(M, E^* \otimes E^*)$ telle que

$$\forall x \in M,\ \ g_x : E_x \times E_x \to \mathbb{R}$$

définie un produit euclidien sur E_x.

Métriques riemanniennes

Théorème (Existence)

Toute fibré lisse admet une infinité de métriques riemanniennes.

Preuve.

Soit (U_α, ψ_α) une trivialization locale de E munie d'une partition de l'unité subordonnante $\rho_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$. Alors sur U_α nous définissons

$$g_\alpha := \sum_{i=1}^{k} s_i^* \otimes s_i^* \in (E^* \otimes E^*)_{|U_\alpha},$$

et prolongeons cette section de $E^* \otimes E^*$ sur M par $\rho_\alpha g_\alpha$.
Définissons

$$g := \sum_\alpha \rho_\alpha g_\alpha.$$

$\square$

Métriques riemanniennes

Corollary (Existence)

Toute variété lisse admet une infinité de métriques riemanniennes.

Rappels sur la partition d'unité

Convention (La topologie des variétés lisses)

Pour que M soit une variété lisse nous allons **toujours** *supposer que la topologie induite $\mathcal{T}_M$ par un atlas compatible est*

1. **séparée** *(Hausdorff) et*
2. **vérifie le second axiome de dénombrabilité** *(il existe une base topologique dénombrable)*

$\Rightarrow$ M **est métrisable** puisque il est séparé + second axiome de dénombrabilité + localement métrisable (Tietze-Uryson)
$\Rightarrow$ M est **paracompact**: toute recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini et une partition de l'unité subordonnée.

Partition continue de l'unité

Définition (**Partition de l'unité**)

Soit M un espace topologique et $\{U_i, i \in I\}$ un recouvrement de M par des ouverts ($\cup_{i\in I} U_i = M$) qui est **localement fini**, c.à.d.

$$\forall x \in M \, \exists U \ni x \text{ t.q. } U \, \text{intersecte nombre fini des ouverts } U_i.$$

Une partition d'unite consiste d'un recouvrement ouvert subordonné $\{V_j, j \in J\}$, $V_j \subset U_i$ et des fonctions C^0
$f_j : V_j \to [0, 1]$ tels que

- $\overline{V_j}$ est un compact de M
- $\mathrm{supp}(f_j) \subset V_j$
- $\sum_{j\in J} f_j(x) = 1 \qquad \forall x \in M$.

Partition lisse de l'unité

Lemma (Partition de l'unité lisse)

Soit M une variété lisse et $\{U_i, i \in I\}$ un recouvrement de M par des ouverts ($\cup_{i \in I} U_i = M$) qui est **localement fini**.
Il existe un recouvrement ouvert subordonné $\{V_j, j \in J\}$, $V_j \subset U_i$ et des fonctions $C^\infty(M)$ avec valeurs dans $[0, 1]$ tels que

- *$\overline{V_j}$ est un compact de M*
- $\mathrm{supp}(f_j) \subset V_j$
- $\sum_{j \in J} f_j(x) = 1 \qquad \forall x \in M.$

Voir le document PDF sur le page de cours ou à Madoc pour la preuve....

Le volume riemanniane

Définition (La forme volume riemannienne)

Soit (M, g) une variété riemannienne **orientée** de dimension n. La forme volume $v_g \in \Omega^n(M)$ est définie par

$$v_g(x) := (e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)_x,$$

où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormale positive de $(T_x(M), g_x)$ et $\{e^1, \ldots, e^n\}$ est sa base duale.

Dans une carte (U, φ) compatible avec l'oriéntaion, nous avons

$$g_U = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j, \qquad (v_g)_{|U} = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Le volume riemanniane

Définition (La forme volume riemannienne)

Soit (M, g) une variété riemannienne **orientée** de dimension n. La forme volume $v_g \in \Omega^n(M)$ est définie par

$$v_g(x) := (e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)_x,$$

où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormale positive de $(T_x(M), g_x)$ et $\{e^1, \ldots, e^n\}$ est sa base duale.

$$\mathrm{Vol}(M, g) = \int_M v_g.$$

Le volume riemanniane

Définition (Une forme volume)

Soit M une variété de dimension n. Une forme volume est une n-forme $v \in \Omega^n(M)$ qui ne s'annule jamais.

Proposition

M est orientable ssi elle admet une forme volume.

Discuté en classe. $\square$

Examples

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ est orientable ssi $n = 2k + 1$.